调和函数的泊松积分公式(由柯西积分公式导出)

P72定理4平均值定理:

调和函数在圆心的值可用圆周上的平均值表示出来.

下面定理6：调和函数在圆内任一点的值也可用圆周上值表示出来.

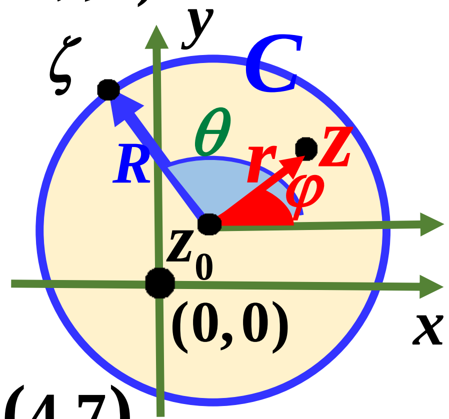
(不是平均值)

定理6(泊松积分公式)(P73)

设$u(z)=u(x,y)$是闭圆 $|z-z_0|\le R$上的调和函数,

则u 在圆内任一点$z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\ (0<r<R)$的值

可用u 在闭圆边界$C:\ |z-z_0|=R$上的值表示出来:



$$u(z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)u(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\theta.\quad(4.7)$$

证明:因为$u(z)$是闭圆上$|z-z_0|\le R$上的调和函数, 故由P70 定理3 知,

存在闭圆$|z-z_0|\le R$上的调和函数$v(z)=v(x,y)$,

使得$f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$ 是闭圆$|z-z_0|\le R$上的解析函数.

对$f(z)$利用柯西积分公式(P59定理5) , 得$f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=$

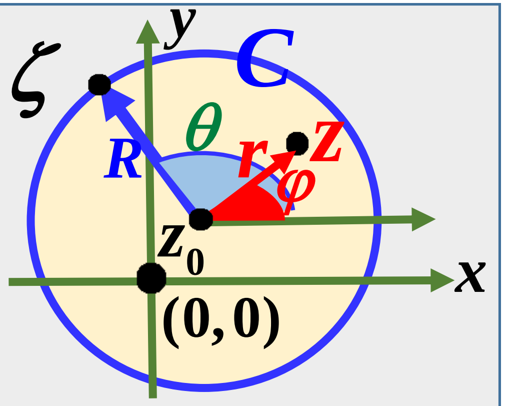
定理6(泊松积分公式)(P73)

设$u(z)=u(x,y)$是闭圆$|z-z_0|\le R$上的调和函数,

则u 在圆内任一点$z=z_0+re^{i\varphi}\ (0<r<R)$的值

可用u 在闭圆边界C: $|z-z_0|=R$上的值表示出来:

$$u(z_0+re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)u(z_0+Re^{i\theta})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta. \quad (4.7)$$



证明：由P 70 定理3, 在题中闭圆上, 存在调和函数$v(z)=v(x,y)$,

使得$f(z)=u(z)+iv(z)$ 是闭圆$|z-z_0|\le R$上的解析函数.

对$f(z)$利用柯西积分公式(P 59定理5), 得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+Re^{i\theta})}{(\cancel{z_0}+Re^{i\theta})-(\cancel{z_0}+re^{i\varphi})}\cancel{i}Re^{i\theta}d\theta$$

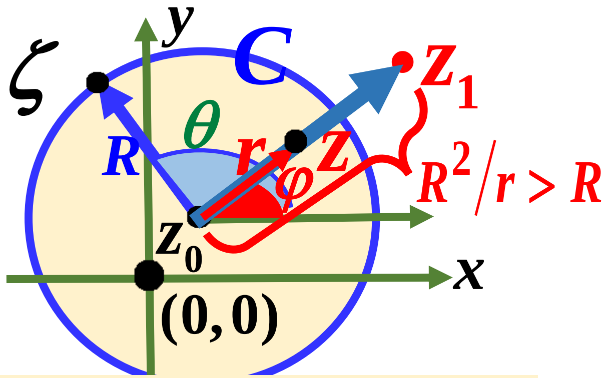
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\theta})\frac{Re^{i\theta}}{Re^{i\theta}-re^{i\varphi}}d\theta. \quad (4.8)$$

参数法, C: $\zeta=z_0+Re^{i\theta}$, $0\le\theta<2\pi$, $\zeta'(\theta)=Rie^{i\theta}$.

$f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$ 是闭圆 $|z-z_0|\le R$ 上的解析函数.

对 $f(z)$ 利用柯西积分公式(P59定理5), 得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{d}\theta. \quad (4.8)$$



在圆外取一个与点 $z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 关于圆周对称的点 $z_1=z_0+\frac{R^2}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 则

$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_1}$ 在 $|\zeta-z_0|\le R$ 上解析，对它用柯西积分定理(P54定理2), 得

$$0=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_1}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\frac{R^2}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{d}\theta. \quad (4.9)$$

$$\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}-\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}=\frac{R^2-Rr\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}-\frac{r^2-rR\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}}{r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+R^2}=\underline{\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}}.$$

实的，虚部为0.

故 (4.8)−(4.9)后两边取实部得

$$\mathrm{Re}\, f\left(z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left\{f\left(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right\}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\theta. \ \#$$

定理7(P74) 设u_1和u_2都是有界区域D 内的调和(实值) 函数,

u_1和u_2在有界闭域$\bar{D}=C+D$上连续 (C是D 的边界) ,

若$\forall \zeta \in C$, $\left|u_1(\zeta)-u_2(\zeta)\right| \le \varepsilon$, 则

$\forall z \in \bar{D}$, $\left|u_1(z)-u_2(z)\right| \le \varepsilon$ (整个闭域$\bar{D}$上解的变化也“小”).

证明: 令$u=u_1-u_2$, 则因为u_1, u_2在D 内调和, 故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\right)=0,$$

即u在D内调和. 又因u_1和u_2在$\bar{D}$上连续, 故u 在$\bar{D}$上连续.

故可以对u用调和函数极值原理(P72定理5), 得

定理7(P74) 设u_1和u_2都是有界区域D内的调和(实值)函数，u_1和u_2在有界闭域$\overline{D}=C+D$上连续 (C是D的边界)，且$\forall \zeta\in C$, $|u_1(\zeta)-u_2(\zeta)|\le\varepsilon$, 则$\forall z\in\overline{D}$, $|u_1(z)-u_2(z)|\le\varepsilon$.

证明：令$u=u_1-u_2$, 因u_1, u_2在D内调和，故u在D内调和.

又因u_1和u_2在$\overline{D}$上连续，故u在$\overline{D}$上连续.

故可以对u用调和函数极值原理(P72定理5)，得

最大值：$\max\limits_{z\in\overline{D}}\{u_1(z)-u_2(z)\}=\max\limits_{\zeta\in C}\{u_1(\zeta)-u_2(\zeta)\}\le\varepsilon$,

最小值：$\min\limits_{z\in\overline{D}}\{u_1(z)-u_2(z)\}=\min\limits_{\zeta\in C}\{u_1(\zeta)-u_2(\zeta)\}\ge-\varepsilon$.

因此$\forall z\in\overline{D}$, $|u_1(z)-u_2(z)|\le\varepsilon$. #

定理7隐含着Laplace方程Dirichlet问题唯一性.

定理7(P74) 设u_1和u_2都是有界区域D 内的调和(实值) 函数, u_1和u_2在有界闭域$\bar{D}=C+D$上连续 (C是D 的边界) ，且$\forall \zeta \in C$, $|u_1(\zeta)-u_2(\zeta)|\le \varepsilon$, 则 $\forall z\in \bar{D}$, $|u_1(z)-u_2(z)|\le \varepsilon$.

Laplace方程Dirichlet问题:

$$(*)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & z\in D,\ D\text{是}xy\text{平面任意有界区域, 其边界记为}C,\\ u(x,y)\big|_C=\varphi(x,y)\big|_C & \text{(给定的已知函数)}.\end{cases}$$

定理7隐含着Laplace方程Dirichlet问题唯一性，即

在(P 74)定理7条件下，若$\forall \zeta\in C$, $u_1(\zeta)=u_2(\zeta)$ $(\varepsilon=0)$, 则

则 $\forall z\in \bar{D}$, $u_1(z)=u_2(z)$.

第五章 解析函数的级数展开★★★

除了 柯西-黎曼方程(P28定理2)、

柯西积分定理(P54定理2, P55定理3)、

柯西积分公式(P59定理5, P56定理6)外，

级数是研究解析函数的又一重要工具.

先学习复数项级数，再学习复变函数项级数.

重点：1.幂级数，2. 罗朗级数.

(两类特殊的复变函数项级数)

5.1 复级数的基本性质

5.1.1 复数项级数(与实数项级数类似)

5.1.1 复数项级数(与实数项级数类似)

定义 设有序复数列$\{z_n = x_n + \mathrm{i}\, y_n, n = 1, 2, \cdots\}$, 其中$x_n, y_n \in \mathbb{R}$,
(P 77)

称$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \cdots$ 为复数项无穷级数.

(1) 记$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$, 称为$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$的部分和,

若部分和列$\{s_n\}$有极限, $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$(有限复数),

则称复无穷级数$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$ 收敛, 称 S 为$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$的和, 记作 $\sum_{k=1}^{+\infty} z_k = S$,

即 $\sum_{k=1}^{+\infty} z_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k$.

(2) 若 $\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$部分和列$\{S_n\}$不收敛(包含极限为∞), 则称$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$发散.

定理1 (P78) $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+\mathrm{i}b_n)$ 收敛(于$S=a+\mathrm{i}b$) 的充要条件是：

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛(于a)和 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛(于b)，所有a_n, b_n, a, b均为实数.

证明：因为$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k+\mathrm{i}b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} b_k$. 故根据P12的定理1,

$\{S_n\}$收敛的充要条件是 $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}$收敛和$\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k\right\}$收敛.

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = a+\mathrm{i}b$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = a$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = b$. #

定理1 ⇨ $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+\mathrm{i}b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \mathrm{i}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

定理1 (P 78) $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + \mathrm{i}\, b_n)$ 收敛(于 $S = a + \mathrm{i}\, b$) 的充要条件是:

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛(于 $a \triangleq \operatorname{Re} S$)和 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛(于 $b \triangleq \operatorname{Im} S$).

例1. 判断 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2^n} + \mathrm{i}\,\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \mathrm{i}\,\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

解 因为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2^n} + \mathrm{i}\,\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 收敛;

因 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \mathrm{i}\,\frac{1}{n}\right)$ 发散. #

根据定理1, 关于实数项级数的一些结果, 可以推广到复数项级数.

定理1 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + \mathrm{i} b_n)$ 收敛(于$S = a + \mathrm{i} b$) 的充要条件是:
(P 78)
$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛(于$a \triangleq \mathrm{Re}\, S$)和 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛(于$b \triangleq \mathrm{Im}\, S$).

定理2(柯西收敛准则) $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + \mathrm{i} b_n)$ 收敛的充要条件是:
(P 78)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 使得当$n > N$时, $\forall p \in \mathbb{Z}^+$, $\left| z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p} \right| < \varepsilon$.

略证: $\left| z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p} \right| \leq \left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| + \left| b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p} \right|$,

$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| \leq \left| z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p} \right|$,

$\left| b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p} \right| \leq \left| z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p} \right|$.

利用定理1, 并对$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$和 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 应用实数项级数柯西收敛准则相应结果,

即可得本定理结论. #

定理1 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + \mathrm{i} b_n)$ 收敛(于$S = a + \mathrm{i} b$) 的充要条件是:
(P 78)
$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛(于$a \triangleq \operatorname{Re} S$)和 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛(于$b \triangleq \operatorname{Im} S$).

推论(P 78) 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + \mathrm{i} b_n)$ 收敛, 则 $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0.$

复级数收敛的必要条件

证明: 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + \mathrm{i} b_n)$ 收敛, 则由定理1,

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛, 故 $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0,$

故 $\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} a_n + \mathrm{i} \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$ #

此推论可以用于证明级数发散.

绝对收敛

定义2(P 78) 如果$\sum_{n=1}^{+\infty}|z_n|$收敛，则称$\sum_{n=1}^{+\infty}z_n$绝对收敛.

定理3 (P 78) $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+\mathrm{i}b_n)$绝对收敛充要条件是$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$都绝对收敛.

证明：根据$\left.\begin{matrix}|a_n|\\|b_n|\end{matrix}\right\}\le|z_n|\le|a_n|+|b_n|$，可证明定理结论. #

例 判断复级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n}+\mathrm{i}\frac{1}{2^n}\right\}$是否绝对收敛？

解. 因为$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散，故$\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n}+\mathrm{i}\frac{1}{2^n}\right\}$不绝对收敛. #

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散是因为$\forall n\in\mathbb{Z}^+$，$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\ge\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$以及柯西收敛准则.

定义2 (P78) 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty}|z_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n$ 绝对收敛.

定理3 (P78) $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+\mathrm{i}b_n)$ 绝对收敛充要条件是 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 都绝对收敛.

推论 若 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+\mathrm{i}b_n)$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n$ 收敛.

证明：由定理3，若 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 都绝对收敛，

故 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 都收敛，故由定理1(P78)得 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n$ 收敛. #

因 $\sum_{n=1}^{+\infty}|z_n|$ 是实正项级数，故

- 实正项级数的收敛判别法，都可用来判别复数项级数绝对收敛性.
  (比如比较判别法.)

例2(P79) 讨论级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ 的敛散性. ★★★★★

解 (1)因 当 $0 \le q < 1$ 时, 实级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ 收敛, $|z^n| = |z|^n$,

故当 $|z| < 1$ 时, ★ 故 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ 绝对收敛. 求和.

因 $S_n - zS_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} = 1 - z^n$, 故当 $z \ne 1$ 时, $S_n = \frac{1-z^n}{1-z}$. 两边取极限.

当 $|z| < 1$ 时, $\lim_{n\to+\infty} |z^n| = \lim_{n\to+\infty} |z|^n = 0$, 故 $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1-0}{1-z}$.

故当 $|z| < 1$ 时, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ 收敛, 且 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-z}$. ★★★★★

(2) 当 $|z| \ge 1$ 时, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $|z^n| = |z|^n \ge 1$, 故 $\lim_{n\to+\infty} z^n \ne 0$, 故 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ 发散. #

★★★★

例2(P 79)结论非常重要, 今后可以直接用, 请务必熟记. (根据定理1的推论(P 78).)

定理4(P 78-79)

1). 绝对收敛的复数项级数各项任意重新排序后求和,仍然绝对收敛, 且其和不变.

2). 设 $\sum_{n=1}^{+\infty}\tilde{z}_n = A$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\hat{z}_n = B$都是绝对收敛.

令$z_k = \tilde{z}_1\hat{z}_{k-1} + \tilde{z}_2\hat{z}_{k-2} + \cdots \tilde{z}_{k-1}\hat{z}_1$, (所有下标之和等于$k$ 的项之和)

则$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$也绝对收敛, 且 $\sum_{k=1}^{+\infty} z_k = AB$, 即

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\tilde{z}_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\hat{z}_n\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\underline{\tilde{z}_1\hat{z}_{k-1} + \tilde{z}_2\hat{z}_{k-2} + \cdots + \tilde{z}_{k-1}\hat{z}_1}\right).$$

(所有下标之和等于k 的项之和)

证明：略. #

例 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2^n}\mathrm{i}\right)$的敛散性.

解 首先判断$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$的收敛性. 1). $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right\}$单调增加, 且有上界.

事实上，单调增加显然, 而且$\forall n\in\mathbb{Z}^+$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\le 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=1+\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right\}=2-\frac{1}{n}<2,$$ 有上界.

因此 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛. #

2). $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1=2-1=1,$$ 收敛.

因此, 由定理1(P 78)知, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2^n}\mathrm{i}\right)$收敛. #

作业

补充：1.判断复级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}+\mathrm{i}\,\dfrac{1}{2^n}\right\}$ 是否收敛, 是否绝对收敛?

2. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2\mathrm{i})^n}$的和. (提示：直接利用P 79例2的结论)

3. 证明$v=xy+3x$是全平面调和函数，

并求解析函数(1) $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$, 且 $f(1)=1+3\mathrm{i}$;

(2) $g(z)=v(x,y)+\mathrm{i}\,u(x,y)$, 且 $g(1)=3+2\mathrm{i}$;

4. 设$f(z)=xy^2+\mathrm{i}\,x^2y$, 复变函数$f(z)$在何处满足柯西-黎曼(C-R)方程，

并分别指出$f(z)$的可微点和解析点.

5. 求(a) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}$; (b) i^{i};

(c) 求方程$\ln z=2-\mathrm{i}\,\dfrac{\pi}{3}$ 的解(提示：利用教材P41对数函数定义).

复学第二章.

推论 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + \mathrm{i}b_n)$ 收敛, 则 $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0.$

(P 78)

复级数收敛的必要条件

应用此推论，可以判断出一些复级数发散.

例 判别级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ 的敛散性.

解 记 $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$，则

$$|z_n| = \left|1+\frac{1}{n}\right| \cdot \left|\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^n = 1+\frac{1}{n} \to 1,$$ 当 $n \to +\infty$ 时.

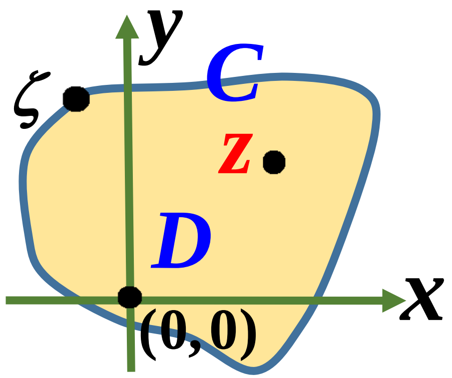
故 $\lim_{n\to+\infty} z_n \neq 0$, 所以 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ 发散.

考虑Laplace方程的Dirichlet问题：

$$(*)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & z\in D,\\ u(x,y)\big|_C=\varphi(\zeta), & \end{cases}$$

D是区域, C是D 的边界, 即$C=\partial D$,

$\zeta\in C$, $\varphi(\zeta)$是C上给定的连续函数.



问： u在D内调和, u 在D 内任一点的值,

能否由u 在D边界C上的函数$\varphi(\zeta)$ 唯一确定?

此外，在应用中$\varphi(\zeta)$往往是通过测量得到,

测量中误差总是难免的,因此还需考虑稳定性,

即当边界值$\varphi(\zeta)$ 有一个"很小"的变化时,

(*)的解u在整个闭域$\bar{D}$上的值是否也只有"很小"的变化?

定理7(P74)给这个称为Laplace方程Dirichlet问题一个肯定的回答.