2023 秋 代数拓扑 期末考试

授课老师：俞建青

1.

(1.1) X 单连通，$\mathrm{H}_c^n(X) =$ ______。

(1.2) 忘了。

(1.3) (此题可能回忆有误，但是此题一定是关于单纯复形的题目)
对于单纯复形，K, L 和连续映射

$$f : |K| \to |L|$$

写出 f 存在单纯逼近的条件。

(1.4) U, V 是闭集，写出 (U, V) 是 Mayer-Vietoris 耦的条件。

(1.5) $\mathbb{RP}^{2023}$ 是否可定向？请说明理由。

(1.6) (本题是关于对角映射 $\Delta : X \to X \times X : x \mapsto (x, x)$ 的题目，回忆版不清晰，之后找到准确叙述之后再补上。)

2. 证明：$\mathrm{H}_{p+1}(SX; R) \cong \mathrm{H}_p(X; R)$.

3. $f : (X, A) \to (Y, B)$ 是连续映射，满足：$f : X \to Y$ 和 $f|_A : A \to B$ 都是零伦的。判断 f 是否诱导了上同调模的同构

$$\mathrm{H}^p(X, A; R) \cong \mathrm{H}^p(Y, B; R)$$

4.(4.1) 写出 $\mathbb{CP}^n$ 的 $\mathbb{Z}$ 系数上同调环。

(4.2) 对于 $n > m > 0$，$f : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^m$ 是一个连续映射。是否存在 f, 使得

$$f^* : \mathrm{H}^2(\mathbb{CP}^m; \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z})$$

是非平凡的?

5.(5.1) 忘了。不过可以确定的是，本问很简单。

(5.2) 考察如下交换图。

$$\begin{tikzcd} \cdots & C_k \arrow[d, dashed, "\Phi_k"'] & \cdots & C_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\Phi_1"'] & C_0 \arrow[r, "\mathcal{E}"] \arrow[d, dashed, "\Phi_0"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ \cdots & C'_k & \cdots & C_2 \arrow[r] & C'_0 \arrow[r, "\mathcal{E}'"] & A' \end{tikzcd}$$

其中 (C_*, R)，(C'_*, R) 为复形，A，A' 为 R-模。
$\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}'$，$\phi : A \to A'$ 是 R-模同态。
证明：存在链映射 $\Phi : C_* \to C'_*$ 且 Φ 在链通同伦意义下唯一。

6.(6.1) 写出 Klein 瓶 K 的单纯剖分，并计算 $\mathrm{H}_*(K; R)$。

(6.2) 计算 Klein 瓶 K 的上同调环。、

7. $(I,\leqslant)$ 是一个有向集, $(A_i,\phi^A_{j,k})$, $(B_i,\phi^B_{j,k})$, $(C_i,\phi^C_{j,k})$ 是关于 $(I,\leqslant)$ 的正向系统（direct system），对于任意的 $i\leqslant j\in I$, 我们有一族模同态 f_i,g_i 满足如下行正合交换图：

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\Phi^A_{i,j}"'] & B_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\Phi^B_{i,j}"'] & C_i \arrow[d, "\Phi^C_{i,j}"'] \\ A_j \arrow[r, "f_j"'] & B_j \arrow[r, "g_j"'] & C_j \end{tikzcd}$$

(7.1) 证明：可以定义模同态 f,g 满足如下正合列：

$$\varinjlim_{i\in I} A_i \xrightarrow{f} \varinjlim_{i\in I} B_i \xrightarrow{g} \varinjlim_{i\in I} C_i$$

(7.2) $((C_{i,*},\partial_{i,*}),\phi_{i,j,*})$ 是复形的正向系统，即我们有如下交换图：

$$\begin{tikzcd} C_{i,p} \arrow[r, "\partial_{i,p}"] \arrow[d, "\varphi_{i,j,p}"'] & C_{i,p-1} \arrow[r, "\partial_{i,p-1}"] \arrow[d, "\varphi_{i,j,p-1}"'] & C_{i,p-2} \arrow[d, "\varphi_{i,j,p-2}"'] \\ C_{j,p} \arrow[r, "\partial_{j,p}"'] & C_{j,p-1} \arrow[r, "\partial_{j,p}"'] & C_{j,p-2} \end{tikzcd}$$

证明：

$$\varinjlim_{i\in I} \mathrm{H}_p(C_i;R) \cong \mathrm{H}_p(\varinjlim_{i\in I} C_i;R)$$