§7.2 函数项级数

7.2.1 基本概念

设 $u_1(x)$, $u_2(x), \cdots, u_n(x)$, $\cdots$ 是定义在 E 上的一列函数. 称和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots .$$

为 E 上的函数项级数. 对 $x_0 \in E$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 就是一个数项级数. 如果此级数收敛, 则称 x_0 为上面函数项级数的收敛点, 如果发散, 则称为发散点.

不妨设函数项级数的收敛点集全体为 $[a, b]$, 所以

$$x \in [a, b], \quad x \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$$

定义了一个函数. 或者, 记

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x),$$

为函数项级数的前 n 项的部分和, 如果存在函数 $S(x)$, 使得对任意 $x_0 \in [a,b]$, 数列 $S_n(x_0)$ 收敛到 $S(x_0)$, 则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上逐点收敛于函数 $S(x)$. 称 $S(x)$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数.

从定义中我们得到, 函数项级数的收敛, 就是部分和所构成的函数列的收敛问题.

例 1 讨论 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛性.

解 函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上都有定义 (对于固定的 x, 就是一个几何级数), 但只在 $(-1,1)$ 上收敛, 并有

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

而当 $|x| \geqslant 1$ 时, 级数发散.

在有限求和过程中, 函数的连续性, 以及可导、可积等解析性质都保持. 对于无限求和, 和函数是否也能继承这些性质? 即

问题 1 通项 $u_n(x)$ 都连续, 是否 $\Longrightarrow S(x)$ 连续?

问题 2 通项 $u_n(x)$ 都可导, 是否 $\Longrightarrow S(x)$ 可导? 如果可导, 是否有

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)?$$

问题 3 通项 $u_n(x)$ 都可积, 是否 $\Longrightarrow S(x)$ 可积? 如果可积, 是否有

$$\int_a^b S(x)\,dx=\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx?$$

有很多例子表明如果不加条件, 那么上面的问题的回答都是否定的. 为了得到肯定的结果我们需要添加某些条件.

例 2 设 $u_1(x) = x$,

$$u_n(x) = x^n - x^{n-1},\ (n = 2, 3, \cdots),$$

则

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = x^n\ (n = 1, 2, \cdots .)$$

显然 $S_n(x)$ 都在 $[0, 1]$ 上连续且可导. 因为

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1); \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

所以 $S(x)$ 在 1 不连续, 当然也不可导.

此例说明连续函数列的极限不一定连续, 也说明通项是连续函数的级数, 其和函数未必连续.

例 3 设 $\{r_1, r_2, \cdots\}$ 是 $[0,1]$ 上全体有理数. 令

$$S_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}; \\ 0, & x \notin \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}, \end{cases}$$

则

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是 } [0,1] \text{ 中有理数}; \\ 0, & x \text{ 是 } [0,1] \text{ 中无理数}, \end{cases}$$

显然 $S_n(x)$ 在 $[0,1]$ 可积, 但 $S(x)$ 在 $[0,1]$ 不可积.

此例说明可积函数列的极限不一定可积. 也说明通项都可积的函数项级数的和函数不一定可积.

例 4 设

$$S_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2x^2}\ (n = 1, 2, \cdots),\ x \in [0, 1].$$

则有

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0.$$

显然 $S_n(x)$ 和 $S(x)$ 都在 $[0, 1]$ 上可积, 但

$$\int_0^1 S_n(x)\,dx = \int_0^1 (-e^{-n^2x^2})' dx = 1 - e^{-n^2} \to 1,\ (n \to \infty),$$

$$\int_0^1 S(x)\,dx = 0.$$

此例说明即便 $S_n(x)$ 和它的极限函数 $S(x)$ 都在区间 $[a, b]$ 可积, 一般也不一定有

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx.$$

例 5 设

$$S_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \quad (n = 1, 2, \cdots),\ x \in (-\infty, +\infty),$$

则

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0.$$

显然 $S_n(x)$ 和 $S(x)$ 都在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 且 $S'(x) = 0$, 但

$$S_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx \not\to 0 = S'(x) \quad (n \to \infty).$$

此例说明即便 $S_n(x)$ 和它的极限函数 $S(x)$ 都在区间 $[a, b]$ 上可导时, $S_n(x)$ 的导函数可能不一定收敛, 即便收敛也不一定收敛到 $S(x)$ 的导函数.

7.2.2 一致收敛性

先从函数列的收敛来说.

函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛于函数 $f(x) \Longleftrightarrow$ $\forall\, x_0 \in [a,b], \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N = N(x_0,\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

一般来说, 上面的 N 不仅依赖于 ε 也依赖于 x_0, 它表示的是函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 x_0 点的收敛快慢, N 越大收敛得越慢, N 越小收敛得越快. 由于 N 一般与 x_0 有关, 因此在不同点收敛的速度不同, 即快慢不一致.

例如, 函数列 $\{x^n\}$ 在 $(0,1)$ 上收敛于 0. 对于 $x \in (0,1)$ 及任意 $\varepsilon \in (0,1)$, 为了 $|x^n - 0| < \varepsilon$, 必须 $n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln x}$. 因此, 至少需要 $N = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right]$. 这样当 x 越靠近 1, N 就越大. 不存在共同的对所有点一致成立的 N.

函数列和函数项级数在收敛域上的收敛性, 本质上是"点态"的收敛. 在各个收敛点有不同的收敛速度. 当收敛速度有某种整体的一致性时, 称其为一致收敛, 准确地说就有下面的定义.

定义 1 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上收敛于 $f(x)$, 如果对任意正数 ε, 都存在 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时, 对所有 $x \in E$ 都有

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$ (或一致趋于 $f(x)$).

当定义中的函数列是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和时, 即

$$f_n(x) = S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x),$$

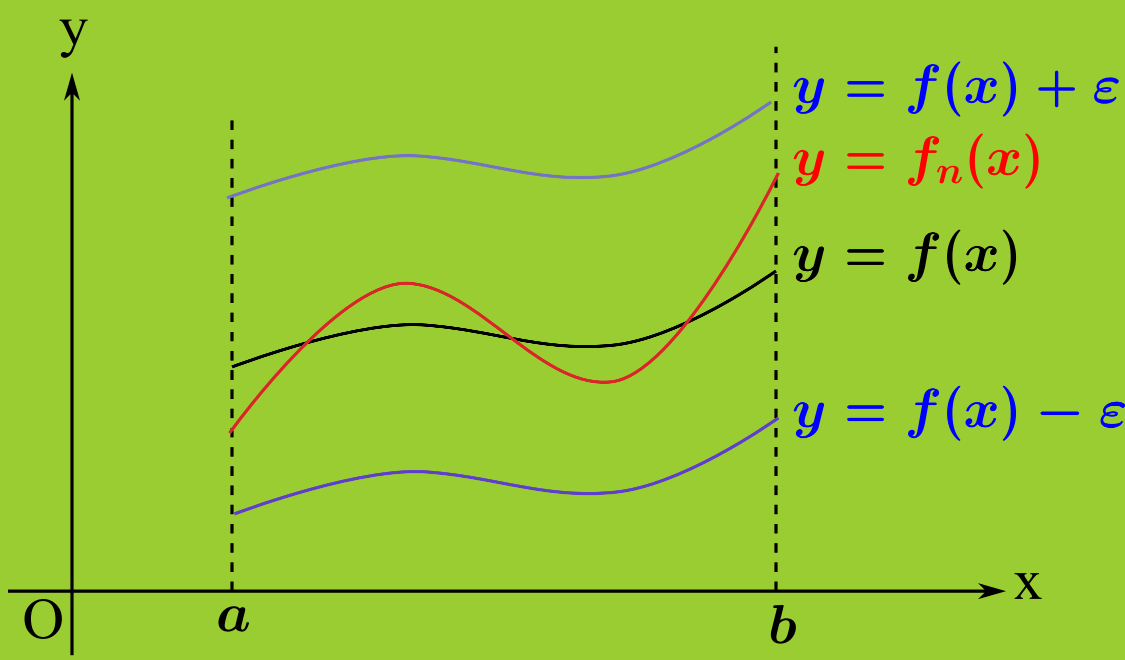
上面的定义也就给出了函数项级数的一致收敛性的定义.

一致收敛的几何意义 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N(\varepsilon)$, 当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 方程

$$y = f_n(x), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

表示的曲线都落入条形区域

$$\{(x, y):\ x \in [a, b], \quad y \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)\}$$



显然 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$ 等价于 $\{f(x)-f_n(x)\}$ 一致趋于零. 因此我们有等价的命题

定理 1 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=0,\quad \text{其中,}\ \beta_n=\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|.$$

证明 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$ $\Longleftrightarrow$ $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N$ 时, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对一切 $x\in E$ 成立. 因而有

$$\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon,$$

即当 $n\geqslant N$ 时, 有 $0\leqslant\beta_n\leqslant\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$.

例 6 讨论函数列 $f_n(x)=\frac{1}{x+n}$ 在 $[0,1]$ 上的一致收敛性.

解 任给 $\varepsilon>0$, 取 $N>\frac{1}{\varepsilon}$, 当 $n>N$ 时,

$$|f_n(x)-0|=\frac{1}{x+n}\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon$$

对所有 $x\in[0,1]$ 都成立. 所以该函数列在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0. 也可以从

$$\beta_n=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|=\frac{1}{n}\to 0$$

得到这个结论.

例 7 函数列 $\{x^n\}$ 在 $[0,1)$ 上不一致收敛于 0.

证明 因为

$$\beta_n=\sup_{x\in[0,1)}|x^n-0|=1\not\to 0,\ (n\to\infty),$$

所以 $\{x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛于 0.

例 8 讨论函数列 $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ 在分别区间 $(0,1)$ 和 $[1,+\infty)$ 上的一致收敛性.

解 显然 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上逐点收敛于 0. 在 $(0,1)$ 上有

$$\beta_n=\sup_{x\in(0,1)}\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right|\geqslant f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\not\to 0,$$

所以该函数列在区间 $(0,1)$ 上不一致收敛.

在区间 $[1,+\infty)$ 上, 有

$$\beta_n=\sup_{x\in[1,+\infty)}\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right|\leqslant\sup_{x\in[1,+\infty)}\left|\frac{nx}{n^2x^2}\right|\leqslant\frac{1}{n}\to 0\quad(n\to\infty),$$

所以该函数列在区间 $[1,+\infty)$ 上一致收敛.

问题 该函数列在区间 $[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$ 上是否一致收敛?

例 9 讨论函数列 $f_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}$ 在区间 $[0,1]$ 上的一致收敛性.

解 在区间 $[0,1]$ 上, 显然有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. 又

$$\begin{aligned}\beta_n &= \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| \\ &\geqslant \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = 2ne^{-1} \not\to 0 \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

所以该函数列在区间 $[0,1]$ 上不一致收敛.

问题 区间 $[0,1]$ 中的哪个点影响了这个函数列的一致收敛性?

定理 2 (函数列一致收敛的 Cauchy 准则) 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛的充分必要条件是: 对任给的正数 ε, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 对任何正整数 p 和 $x \in E$ 都有

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

证明 ($\Longrightarrow$) 设 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$. 则任意 $\varepsilon > 0$ $\exists$ $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时,

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

对一切 $p \in \mathbb{N}$ 及 $x \in E$ 成立. 因而

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

对一切 $p \in \mathbb{N}$ 及 $x \in E$ 成立.

($\Longleftarrow$) 由条件知对每个固定的 $x \in E$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 是 Cauchy 数列, 因而存在一个数, 记为 $f(x)$ 使得 $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$. 于是 $f(x)$ 是定义在 E 上的一个函数, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上逐点收敛于 $f(x)$. 因为对任意 $\varepsilon > 0$, $\exists$ $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时,

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

对一切 $p \in \mathbb{N}$ 及 $x \in E$ 成立. 在此不等式中令 $p \to \infty$ 得

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

对一切 $x \in E$ 成立. 于是 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$.