§12.2　平方平均收敛

12.2.1　基本概念

设 $C[-\pi,\pi]$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上连续函数全体. 对于 $f\in C[-\pi,\pi]$, 令

$$\|f\|_0=\max_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|f(x)|.$$

易知 $\|f\|_0$ 是 $C[-\pi,\pi]$ 上一个范数(模), 即

1° $\|f\|_0\geqslant 0$, 且 $\|f\|_0=0\iff f=0$; (正性)

2° 对于正数 λ 有 $\|\lambda f\|_0=\lambda\|f\|_0$; (齐性)

3° 对于 $f,g\in C[-\pi,\pi]$, 有 $\|f+g\|_0\leqslant\|f\|_0+\|g\|_0$; (三角不等式)

$C[-\pi,\pi]$ 上的这个范数可以诱导出一个距离, 即

$$d(f,g)=\|f-g\|_0$$

一般距离 $d(f,g)$ 应满足下面三个性质:

1° $d(f,g) \geqslant 0$, 且 $d(f,g) = 0 \Longleftrightarrow f = g$; (正性)

2° $d(f,g) = d(g,f)$; (对称性)

3° 对于 $f,g,h \in \mathrm{C}[-\pi,\pi]$, 有 $d(f,g) \leqslant d(f,h) + d(h,g)$; (三角不等式)

在欧氏空间中, 两个向量 $x = (x_1,x_2,x_3)$ 和 $y = (y_1,y_2,y_3)$ 之间的距离为

$$d(x,y) = |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}.$$

在连续函数空间 $C[a,b]$ 中, 还可以定义范数

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx},$$

这个范数诱导出两个连续函数 f,g 之间的距离:

$$d(f,g) = \|f-g\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)-g(x)|^2\,dx}.$$

当 $f(-\pi)=f(\pi)$ 且 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续且分段光滑时, 由 Dirichlet 定理知 f 的 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n(x)-f(x)\|_0=0, \tag{1}$$

这里

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos kx+b_k\sin kx\Big) \tag{2}$$

是 $f(x)$ 的 Fourier 级数前 n 项部分和.

一般称形如

$$S_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\Big(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\Big) \tag{3}$$

的函数为 n 次三角多项式, (1) 式表示连续且分段光滑的函数可由三角多项式一致逼近.

12.2.2 Bessel 不等式

设 $L^2[-\pi,\pi]$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上可积且平方可积的函数全体 (即, 对于 $f\in L^2[-\pi,\pi]$, 若 $f(x)$ 有界, 则 $f\in \mathrm{R}[-\pi,\pi]$. 若 $f(x)$ 无界, 则 f 和 f^2 都广义可积).

对于 $f,g\in L^2[-\pi,\pi]$, 令

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

则 $\langle f,g\rangle$ 是 $L^2[-\pi,\pi]$ 上一个内积, 令

$$\|f-g\|=\sqrt{\langle f-g,f-g\rangle}.$$

可以验证 $\|f-g\|$ 是 $L^2[-\pi,\pi]$ 上一个距离.

问题 1 对于 $f\in L^2[-\pi,\pi]$ 是否存在一列三角多项式 $S_n(x)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n(x)-f(x)\|=0. \tag{4}$$

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

(4) 式也可以写为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(S_n(x) - f(x)\big)^2 \, dx = 0. \tag{5}$$

若 (5) 成立, 则称三角多项式列 $\{S_n(x)\}$ 平方平均收敛于 $f(x)$.

设 $f \in L^2[-\pi, \pi]$, $S_n(x)$ 是由 (3) 式表示的 n 次三角多项式.

$$\begin{aligned}\Delta_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(S_n(x) - f(x)\big)^2 \, dx &= \langle S_n(x) - f(x), S_n(x) - f(x)\rangle \\ &= \langle f, f\rangle - 2\langle f, S_n\rangle + \langle S_n, S_n\rangle.\end{aligned}$$

设 $a_0, a_1, \cdots$, 及 $b_1, b_2, \cdots$, 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数. 则

$$\begin{aligned}\langle f, S_n\rangle &= \left\langle f, \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\big) \right\rangle \\ &= \frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(\alpha_k a_k + \beta_k b_k\big).\end{aligned}$$

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

再根据三角函数系的正交性, 有

$$\begin{aligned}\langle S_n, S_n\rangle &= \left\langle \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right), \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right)\right\rangle \\ &= \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \langle f, f\rangle - \alpha_0 a_0 - 2\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k a_k + \beta_k b_k\right) + \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^2 + \beta_k^2\right) \\ &= \langle f, f\rangle + \frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2\right] \\ &\quad - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \qquad (6) \\ &\geqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right). \qquad (7)\end{aligned}$$

(7) 式表明只有当 $\alpha_k = a_k, \beta_k = b_k$ 时, Δ_n 才取到最小值. 也就是说在所有 n 次三角多项式中, 由 $f(x)$ 的 Fourier 系数所确定的 $T_n(x)$ 到 $f(x)$ 的距离最小.

根据 (7) 式可得到

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx.$$

由于上式中 n 是任意正整数, 可得

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx, \tag{8}$$

这称为 Bessel 不等式. 事实上, 对于 $f(x)$ 的 Fourier 系数 a_n, b_n, 成立如下等式:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx, \tag{9}$$

这称为 Parseval 等式. 我们将在后面的课程证明这个等式.

12.2.3 平方平均收敛

根据 (6) 式, 有

$$\begin{aligned}\|T_n(x)-f(x)\|^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(T_n(x)-f(x)\right)^2 dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx-\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right).\end{aligned}$$

而 Parseval 等式说明了

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n(x)-f(x)\|=0,$$

即, $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和 $T_n(x)$ 平方平均收敛于 $f(x)$. 这就肯定地回答了前面提出的问题 1.

例 1 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$$

根据前面的例子, 有

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right].$$

由 Parseval 等式, 有

$$\frac{\pi^2}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{((-1)^n-1)^2}{n^4\pi^2}+\frac{1}{n^2}\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=\frac{\pi^2}{3}.$$

由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 故,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

例 2 因为

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x, \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

所以根据 Parseval 等式, 有

$$\frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{(2k-1)^4\pi^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

由此可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96},$$

接着有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{16k^4},$$

因而

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}0, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x^2 & 0<x<1\end{cases}$ 则有

$$f(x)\sim\frac{1}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}+\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^3\pi^3}\right)\sin n\pi x\right].$$

根据 Parseval 等式, 有

$$\frac{1}{18}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^4\pi^4}+\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}+\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^3\pi^3}\right)^2\right]=\int_{-1}^{1}f^2(x)\,dx.$$

即,

$$\frac{1}{18}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^4\pi^4}+\frac{1}{n^2\pi^2}+\frac{4((-1)^n-1)}{n^4\pi^4}+\frac{4((-1)^n-1)^2}{n^6\pi^6}\right]=\frac{1}{5}.$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

因此

$$\frac{1}{18}+\frac{4}{\pi^4}\cdot\frac{\pi^4}{90}+\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}+-\frac{8}{\pi^4}\cdot\frac{\pi^4}{96}+\frac{16}{\pi^6}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^6}=\frac{1}{5}$$

故,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}.$$

由此还可以得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{\pi^6}{945}.$$