2023-2024 秋季线性代数 B1 期末

一、填空题

1. $1+x+x^2+x^3$ 在 $\{1,(x-1),(x-1)^2,(x-1)^3\}$ 下的坐标：$\underline{(4,6,4,1)^T}$

2. A 的特征多项式 $(\lambda-2)(\lambda^2+9)$ 则 $\det(I-A)$ 的值是 $\underline{-10}$

3. $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}^{2024}$=$\begin{pmatrix}-4047 & 2024\\ -8096 & 4049\end{pmatrix}$

4. 二次型 $x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-tx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 正定，t 的取值范围 $\underline{(-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})}$

5. $V\to V$ 的线性变换在一组基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$, 则在 $\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1\}$ 下矩阵为 $\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\ 1 & 4 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

6. $(x,y)\to(x+y,y)$ 把单位圆变成椭圆，椭圆的长半轴是 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

二、判断题

1. A 是 n 阶上三角正交方阵，则 A 是对角阵。正确

2. A 是满足 $AA^T=0$ 的复矩阵则 $A=0$. 错误，反例 $\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}$

3. A 正定，B 对称，则存在正实数 c 使得 $cA+B$ 正定。正确

4. 线性空间的子空间 X,Y 满足 $X\cup Y$ 是子空间，则 $X\subset Y$ 或 $Y\subset X$. 正确

三、二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+ax_2x_3$ 经过变换 $X=PY$ 可以变为 $by_1^2+2y_2^2-7y_3^2$.

(1) a 和 b 分别是多少 8,2

(2) 求出正交矩阵 P.（答案不唯一）

(3) $Q=1$ 是什么类型的曲面？单叶双曲面

四、对多项式 f,g 定义 $(f,g)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$

(1) 证明这是一个内积。验证内积三条性质即可

(2) 把一组基 $\{1,x,x^2,x^3\}$ 正交化为标准正交基 $\left\{1,\sqrt{3}x,\frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2-1),\frac{\sqrt{7}}{2}(5x^3-3x)\right\}$

(3) $h(x)=1+x^3$, W 为 $\{x,x^2\}$ 张成的子空间, 求一个 $k\in W$ 使得 $|h-k|$ 最小

我们取 $k(x)=\frac{3}{5}x+\frac{5}{3}x^2$, 注意到 $(x,h-k)=(x^2,h-k)=0$, 故对任意 $k_0\in W$,

$$(h-k_0,h-k_0)=(h-k,h-k)+(k-k_0,k-k_0)\geq |h-k|^2$$

故 $|h-k|$ 达到最小值。

五、记 $M=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 2 & 7\end{pmatrix}$, 二阶方阵的线性变换 $\mathfrak{A}(X)=MX-XM$.

(1) 求 $\mathfrak{A}$ 在基 $\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$ 下的矩阵，其中 E_{ij} 是i行j列为 1 其他为 0 的矩阵.

$$\begin{pmatrix}0 & -2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

(2) 求 $\mathfrak{A}$ 的特征值和对应的特征向量

$$2\sqrt{2}, t\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1\\ 2 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}, t\neq 0$$

$$-2\sqrt{2}, t\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1\\ -2 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}, t\neq 0$$

$$0, t_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}, t_1\ t_2 \text{ 不全为 } 0$$

六、实对称方阵 A,B 满足 $AB=BA$

(1) 证明 A,B 存在公共特征向量 v

设 A 有正交相似 $A=P^{-1}diag(\lambda_1 I_1,\dots,\lambda_k I_k)P$, 其中 λ_i 互相不同。设 $B=P^{-1}CP$.

由 $AB=BA$ 知道 $diag(\lambda_1 I_1,\dots,\lambda_k I_k)C=Cdiag(\lambda_1 I_1,\dots,\lambda_k I_k)$, 故 C 也是准对角阵

$$C=diag(C_1,\dots,C_k)$$

设 x 为 C_1 的特征值 λ 的特征向量. 令 $v=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}$. 则

$$Av=P^{-1}diag(\lambda_1 I_1,\dots,\lambda_k I_k)PP^{-1}\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}$$

$$Bv=P^{-1}diag(C_1,\dots,C_k)PP^{-1}\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}$$

故 v 是所求特征向量

(2) 证明存在正交方阵 P 使得 P^TAP,P^TBP 都是对角阵

对 n 归纳. 由 (1) 知道 $A\ B$ 有公共特征向量 v, 把它扩成标准正交基 $(x_1,\dots,x_n)=P_0$

则 $P_0^TAP_0=\begin{pmatrix}a & X\\ 0 & A_0\end{pmatrix}, P_0^TBP_0=\begin{pmatrix}b & Y\\ 0 & B_0\end{pmatrix}$. 由对称性 $X=Y=0$. 由归纳假设存在正交 P_1 使得

$P_1^TA_0P_1, P_1^TB_0P_1$ 都是对角阵. 现在令 $P=P_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1\end{pmatrix}$, 即为所求的 P.