概率论期中考试

刘党政

2024.4.14

Problem 1 (15 分)**.** 欣赏题：**Talagrand 不等式**。

Problem 2 (15 分)**.** 有 n 个盒子，其中第 r 个盒子里包含 $r-1$ 个红球和 $n-r$ 个黑色球。你随机挑选一个盒子，并从中不放回地随机取出两个球。求解以下问题：

(1) 求第二个球是黑球的概率；(2) 在第一个球是黑球的条件下，求第二个球是黑球的概率。

Problem 3 (10 分)**.** 二次函数：

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x-y} & x,y\geq 0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

是否为某随机向量 (X,Y) 的联合分布函数？请说明理由。

Problem 4 (15 分)**.** 有一个参数为 n,p 的 Erdös-Rényi 随即图 G：点集大小为 n，而每对点间出现边的概率为 p，而且不同点队之间是否出现边是独立的。

(1) 求 G 中边的期望数量。

(2) 求 G 中三角形的期望数量。

Problem 5 (15 分)**.** 有一列独立同分布的随机变量 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $\mathbb{E}[X_1]=\mu$。又有一正整数值随机变量 N，满足 $\mathbb{E}[N]=2024$，且 N 与 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 相互独立。

令 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，求 $\mathbb{E}[S_N]$。

Problem 6 (15 分)**.** 对于直线上的简单随机游走 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i, S_0=0$，这里 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列独立同分布的随机变量，且 $\mathbb{P}(X_1=1)=p, \mathbb{P}(X_1=-1)=1-p$。求概率：

$$\mathbb{P}(S_1\leq 0, S_2\leq 0,\ldots,S_{2n}\leq 0, S_{2n}=0)$$

Problem 7 (15 分)**.** 对于整数值随机变量 X,Y,Z，定义：

$$d_{\mathrm{TV}}(X,Y)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\mathbb{P}(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)|$$

(1) 证明 d_{TV} 构成整数值随机变量间的距离，即满足**对称性** $d_{\mathrm{TV}}(X,Y)=d_{\mathrm{TV}}(Y,X)$，**三角不等式** $d_{\mathrm{TV}}(X,Y)\le d_{\mathrm{TV}}(X,Z)+d_{\mathrm{TV}}(Z,Y)$，以及**规范性** $d_{\mathrm{TV}}(X,Y)=0\Longleftrightarrow X\overset{D}{=}Y$。

(2) 试证明：

$$d_{\mathrm{TV}}(X,Y)=2\sup_{A\subset\mathbb{Z}}|\mathbb{P}(X\in A)-\mathbb{P}(Y\in A)|$$