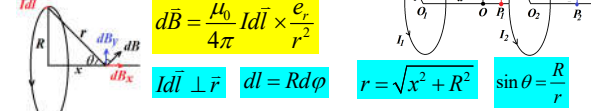


【例1】如图,两个共轴的载流线圈,半径分别为 R_1 和 R_2 ,电流分别为 I_1 和 I_2 ,电流的方向相同,两圆心 O_1 和 O_2 相距为 $2a$,连线的中点为 O ,试分别求轴线上离 O 点为 r_1 处 P_1 点和离 O 点为 r_2 处 P_2 点的磁感应强度 B_1 和 B_2 。

【解】利用毕奥—萨伐尔定律和叠加原理求 B 。

先求一个线圈在轴线上距离线圈中心为 x 处的磁感应强度



由对称性, y 方向 B 抵消, B 只有 x 分量

$$dB_x = dB \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 R_1 d\varphi}{r^2} \frac{R_1}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 R_1^2 d\varphi}{r^3}$$

$$B = \int dB_x = 2 \int_0^\pi \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 R_1^2 d\varphi}{r^3} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_1 R_1^2}{r^3} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_1 R_1^2}{(x^2 + R_1^2)^{3/2}}$$

P_1 点

$$B_{1-P1} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_1 R_1^2}{[(a+r_1)^2 + R_1^2]^{3/2}}$$

$$B_{2-P1} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_2 R_2^2}{[(a-r_1)^2 + R_2^2]^{3/2}}$$

$$B_{P1} = B_{1-P1} + B_{2-P1} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_1 R_1^2}{[(a+r_1)^2 + R_1^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0}{2} \frac{I_2 R_2^2}{[(a-r_1)^2 + R_2^2]^{3/2}}$$

P_2 点

$$B_{1-P2} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_1 R_1^2}{[(a+r_2)^2 + R_1^2]^{3/2}}$$

$$B_{2-P2} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_2 R_2^2}{[(r_2-a)^2 + R_2^2]^{3/2}}$$

$$B_{P2} = B_{1-P2} + B_{2-P2} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_1 R_1^2}{[(a+r_2)^2 + R_1^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0}{2} \frac{I_2 R_2^2}{[(r_2-a)^2 + R_2^2]^{3/2}}$$

【例2】电荷量 Q 均匀地分布在半径为 R 的球面上,球以匀角速度 ω 绕它的一个固定的直径旋转,试求:(1)轴线上离球心为 r 处的磁感应强度 B ; (2)磁矩

【解】(1)电荷运动形成电流,用毕奥—萨伐尔定律和叠加原理求 B

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

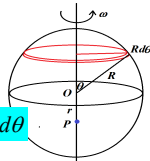
球面上宽为 $Rd\theta$ 的环带的电量 dQ 为

$$dQ = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi R \sin \theta \cdot Rd\theta = \sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

dQ 随球面旋转,形成电流 dI

$$dI = \frac{dQ}{T} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$dI = \frac{\sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{2\pi / \omega} = \omega \sigma R^2 \sin \theta d\theta$$



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \times \frac{\vec{e}_r}{r^2} \quad \text{半径为 } a \text{ 的圆电流在轴线上离圆心 } x \text{ 处的 } B \text{ 为}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{Ia^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

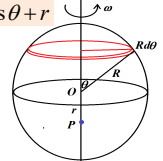
$$dI = \omega \sigma R^2 \sin \theta d\theta \quad a = R \sin \theta \quad x = R \cos \theta + r$$

则圆电流 dI 在 r 处的 dB 为

$$dB = \frac{\mu_0 \omega \sigma R^4}{2} \frac{\sin^3 \theta d\theta}{(r^2 + R^2 + 2rR \cos \theta)^{3/2}}$$

$$B = \int dB = \int_0^\pi \frac{\mu_0 \omega \sigma R^4}{2} \frac{\sin^3 \theta d\theta}{(r^2 + R^2 + 2rR \cos \theta)^{3/2}} = \begin{cases} \frac{\mu_0 Q}{6\pi R} \omega & (\text{球内 } r < R) \\ \frac{\mu_0 Q}{6\pi R} \omega \left(\frac{R}{r}\right)^3 & (\text{球外 } r > R) \end{cases}$$

方向: 沿着转轴方向



(2) 求磁矩 $\vec{m} = I\vec{S}$

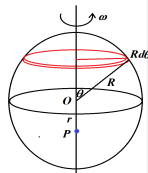
dQ 随球面旋转形成圆电流 dI

$$dI = \omega \sigma R^2 \sin \theta d\theta = \frac{\omega Q}{4\pi} \sin \theta d\theta$$

$$S = \pi (R \sin \theta)^2$$

$$dm = dI \cdot S = \frac{\omega Q}{4\pi} \sin \theta d\theta \cdot \pi (R \sin \theta)^2 = \frac{1}{4} Q R^2 \omega \sin^3 \theta d\theta$$

$$m = \int dm = \int_0^\pi \frac{1}{4} Q R^2 \omega \sin^3 \theta d\theta = \frac{1}{3} Q R^2 \omega$$



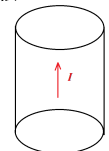
【例3】一半径为 R 的无限长圆柱面上载有电流 I , I 平行于圆柱面的轴线流动,并且均匀分布在圆柱面上。试求(1)这圆柱面内、外离轴线为 r 处的任一点的磁感应强度;(2)圆柱面上任一点的磁感应强度(即面电流所在处的磁感应强度);(3)圆柱面受到的压强

【解】(1)由安培定理求 B

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$r < R, B = 0$$

$$r > R, B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



(2) 注意: 圆柱面上(面电流所在处)的 B 不能由安培定理求出

方法1, 利用与面电荷电场类似的普遍规律:

$$B = \frac{1}{2} (B_+ + B_-) \quad \begin{matrix} r \rightarrow R_-, B_- = 0 \\ r \rightarrow R_+, B_+ = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \end{matrix} \Rightarrow B = \frac{1}{2} (B_+ + B_-) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

方法2: 由叠加原理求圆柱面上的 B

圆柱面的面电流密度为 $i = \frac{I}{L} = \frac{I}{2\pi R}$

在圆柱面上任取一点 P , 过 P 作圆柱的横截面, θ 处的线电流为 dI

$$dI = idl = \frac{I}{2\pi R} R d\theta = \frac{I}{2\pi} d\theta$$

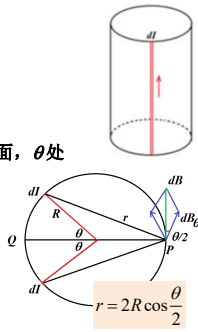
无限长直导线磁场

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$$

线电流 dI 在 P 点产生的 dB_θ 为

$$dB_\theta = \frac{\mu_0}{2\pi r} dI = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{I}{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{8\pi^2 R \cos \frac{\theta}{2}} d\theta$$



由对称性得: $dB = 2dB_\theta \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi^2 R} d\theta$

方向: 沿 P 点切线方向

$$B = \int dB = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{4\pi^2 R} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

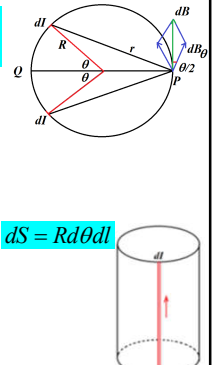
(3)求圆柱面受到的压强

取长为 dl 、宽为 $Rd\theta$ 的条带

安培力 $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} = i dS \times \vec{B}$ $i = \frac{I}{2\pi R}$ $dS = Rd\theta dl$

$$d\vec{F} = -\frac{I}{2\pi R} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} dS \vec{e}_r = -\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2} dS \vec{e}_r$$

$$p = \frac{|dF|}{dS} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2}$$



【例4】一回旋加速器, 最大半径为 R , 用它来加速质量为 m 电量为 q 的质子, 要把质子加速到 E_k 的能量, 求(1)需要的磁感应强度 B , (2)若 D 形电极间的距离为 d , 加速电压为 U , 其间电场均匀, 求加速到上述能量需要的时间。

【解】(1) 回旋加速器原理: 电荷在磁场下受洛伦兹力圆周运动, 在中间的 D 形区间受电场力作用加速。

$$F_B = qvB = m \frac{v^2}{R} \quad E_k = \frac{1}{2} mv^2 \quad B = \frac{mv}{qR} = \frac{\sqrt{2mE_k}}{qR}$$

(2) 电荷在 D 形电极间的匀加速运动

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{qU}{md}$$

每次在 D 形电极间加速获得能量为 qU , 因此需要加速的次数为

$$n = \frac{E_k}{qU} \quad s = nd = \frac{1}{2} at_1^2 \quad t_1 = \frac{\sqrt{2mE_k}}{qU} d$$

圆周运动周期

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad t_2 = (n-1) \frac{T}{2} = \frac{(n-1)\pi m}{qB} \quad t = t_1 + t_2$$

【例5】一铁环, 均匀磁化, 磁化强度为 M , 如图 M 沿环的方向, 环上有一很窄的空气隙。已知环的截面积半径比环长小很多, 求图中1、2、3点的磁场强度 H 和磁感应强度 B

【解】磁化 $M \rightarrow$ 面磁化电流 i'

$$\vec{i}' = \vec{n} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1)$$

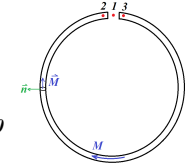
铁环为介质1, $M_1=M$; 真空为介质2, $M_2=0$

$$\vec{i}' = -\vec{n} \times \vec{M} = M \vec{e}_\phi$$

磁化面电流方向为逆时针方向, 类似与一个载流螺绕环, 产生的 B 的方向与 M 相同

螺绕环的磁感应强度 $B = \mu_0 nI = \mu_0 i'$

$$\therefore B_2 = B_3 = \mu_0 i' = \mu_0 M$$



边值关系 $B_{2n} = B_{1n}$

$$B_{2n} = B_2 = \mu_0 M$$

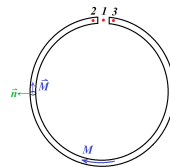
$$\therefore B_1 = B_2 = \mu_0 M$$

本构方程

$$\vec{H}_1 = \vec{B}_1 / \mu_0 - \vec{M}_1 = \vec{M} - 0 = \vec{M}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \Rightarrow \vec{H}_2 = \vec{B}_2 / \mu_0 - \vec{M}_2 = \vec{M} - \vec{M} = 0$$

$$\vec{H}_3 = \vec{B}_3 / \mu_0 - \vec{M}_3 = \vec{M} - \vec{M} = 0$$



【例6】磁导率分别为 μ_1, μ_2 的两种均匀磁介质各充满一半空间, 它们的交界面是一无限大平面, 如图, 一条外皮绝缘的无穷长直导线正处在交界面上, 并载有电流 I , 试求 I 在1和2介质中产生的磁感应强度 B_1, B_2 。

【解】由右手螺旋, B_1, B_2 都与交界面垂直

边值关系 $B_{2n} = B_{1n}$

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_2$$

介质中的安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

$$\pi r H_1 + \pi r H_2 = I$$

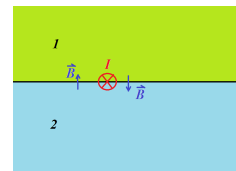
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\pi r \frac{B_1}{\mu_1} + \pi r \frac{B_2}{\mu_2} = I$$

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_2$$

$$B = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{I}{\pi r}$$

与无介质时的 B_0 仅相差一个常数



【例7】一块很大的铁磁介质，相对磁导率为 $\mu_r=200$ ，内部有磁感应强度为 $B=2.0\text{T}$ 的磁场。在它里面有两个小空穴，一个是两面垂直于 B 的薄圆盘形，另一个是平行于 B 的细长针形。试分别求这两个空穴的磁场强度 H 。

【解】(1)垂直于 B 的薄圆盘空穴， B 垂直于界面

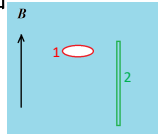
$$\text{边值关系 } B_{2n} = B_{1n}$$

$$B_{\text{圆盘}} = B_{\text{介质}} = 2\text{T}$$

$$H_{\text{圆盘}} = \frac{B_{\text{圆盘}}}{\mu_0} = \frac{2}{4\pi \times 10^{-7}} = 1.6 \times 10^6 \text{ (A/m)}$$

(2)细长针形空穴 边值关系 $H_{1t} = H_{2t} \quad (i_0 = 0)$

$$H_{\text{细针}} = H_{\text{介质}} = \frac{B_{\text{介质}}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{2}{200 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 8.0 \times 10^3 \text{ (A/m)}$$



【例8】两块无限大的平板上均匀地通有电流；电流面密度为 i_0 ，两块板上电流相互平行，但方向相反，板之间有两层相对磁导率为 μ_{r1} 和 μ_{r2} 的磁介质，两磁介质的厚度均为 d 。求(1)各区域的磁感应强度；(2)三个分界面的磁化电流面密度；(3)单位面积的自感系数。

【解】(1)磁场沿水平方向，平行于介质界面，介质1和2的界面无 i_0

$$\text{边值关系 } H_{1t} = H_{2t} \Rightarrow H_1 = H_2$$

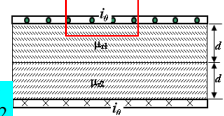
两平板外侧 $B=0, H=0$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

$$HL + 0 + 0 = i_0 L \quad H = i_0$$

$$B_1 = \mu_0 \mu_{r1} H_1 = \mu_0 \mu_{r1} i_0$$

$$B_2 = \mu_0 \mu_{r2} H_2 = \mu_0 \mu_{r2} i_0$$



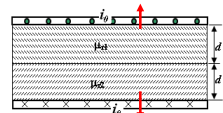
(2)求三个分界面的磁化电流面密度

$$\vec{i}' = \vec{n} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$M_1 = \chi_{m1} H_1 = (\mu_{r1} - 1) i_0$$

$$M_2 = \chi_{m2} H_2 = (\mu_{r2} - 1) i_0$$

设垂直纸面向外为 e_y 方向



上表面：M1与真空分界面 $\vec{i}' = \vec{n} \times (0 - \vec{M}_1) = (\mu_{r1} - 1) i_0 \vec{e}_y$

两介质M1、M2界面 $\vec{i}' = \vec{n} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) = (\mu_{r2} - \mu_{r1}) i_0 \vec{e}_y$

下表面：M2与真空分界面 $\vec{i}' = -(\mu_{r2} - 1) i_0 \vec{e}_y$

(3)求单位面积的自感系数

$$\text{由磁能求自感系数 } L = \frac{2W_m}{I^2}$$

取一边长为 a 的正方形

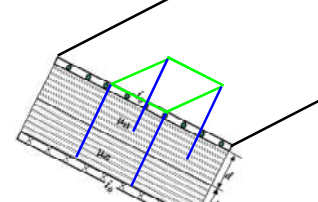
$$I = i_0 a$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \vec{B}_1 \cdot \vec{H}_1 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_{r1} i_0^2$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \vec{B}_2 \cdot \vec{H}_2 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_{r2} i_0^2$$

$$W = (\omega_1 + \omega_2) V = \left(\frac{1}{2} \mu_0 \mu_{r1} i_0^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mu_{r2} i_0^2 \right) a^2 d$$

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{2W_m}{i_0^2 a^2} = \mu_0 (\mu_{r1} + \mu_{r2}) d$$



【例9】同轴电缆的内导体是半径为 a 的空心圆柱，外导体是半径为 b 的薄圆柱面，其厚度可以忽略不计。内外导体间填充有绝对磁导率分别为 μ_1 、 μ_2 、 μ_3 的三种磁介质，每种磁介质均占三分之一的圆柱间体积，分界面正好沿半径方向。设内外圆柱面内沿轴线方向流有大小相等、方向相反的电流，内圆柱面电流密度为 i ，求(1)各区域的磁感应强度和磁场强度；(2)同轴电缆单位长度存储的磁场能量(3)同轴电缆单位长度自感。

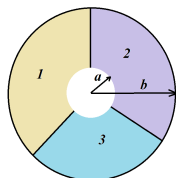
【解】(1)介质中环路定理 $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$

$$r < a \quad I_0 = 0 \quad B = 0$$

$$r > b \quad I_0 = I + (-I) = 0 \quad B = 0$$

$$a < r < b \quad H_1 \cdot \frac{2\pi r}{3} + H_2 \cdot \frac{2\pi r}{3} + H_3 \cdot \frac{2\pi r}{3} = \sum I_0 = i 2\pi a \quad i = \frac{I}{L}$$

$$B = \mu H \quad \frac{B_1}{\mu_1} \cdot \frac{2\pi r}{3} + \frac{B_2}{\mu_2} \cdot \frac{2\pi r}{3} + \frac{B_3}{\mu_3} \cdot \frac{2\pi r}{3} = i 2\pi a$$



B 垂直于两介质界面 $B = B_n \quad B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow B_1 = B_2 = B_3$

$$B_1 = B_2 = B_3 = \frac{3ia}{r \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} \right)} = \frac{\mu' 3ia}{r} \quad \frac{1}{\mu'} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3}$$

(2)求同轴电缆单位长度存储的磁场能量 $\omega_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2\mu} B^2$

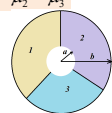
$$W_m = \iiint_V \omega_{m1} dV + \iiint_V \omega_{m2} dV + \iiint_V \omega_{m3} dV$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{B^2}{\mu_1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\pi r \cdot l \cdot dr + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{B^2}{\mu_2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\pi r \cdot l \cdot dr + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{B^2}{\mu_3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\pi r \cdot l \cdot dr = 3\pi \mu' i^2 a^2 l \ln \frac{b}{a}$$

$$\frac{W_m}{l} = 3\pi \mu' i^2 a^2 \ln \frac{b}{a}$$

(3)求自感 $L = \frac{2W_m}{I^2}$

$$L = \frac{3\mu' \ln \frac{b}{a}}{2\pi}$$

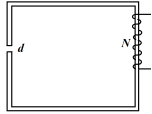


【例10】一铁芯长为 l ，弯成方形，在一边留有宽为 d 的空气隙，铁芯的截面积为 S ，磁导率为 $\mu_0\mu_r$ ，它的另一边用表面绝缘的导线绕有 N 匝线圈，求线圈的自感。

【解】经铁芯内和空气隙作一方形回路

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

$$H_1 l + H_2 d = NI$$



$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0\mu_r}, H_2 = \frac{B_2}{\mu_0}$$

边值关系

$$B_{2n} = B_{1n}$$

$$B_2 = B_1 = B$$

$$B \left(\frac{l}{\mu_0\mu_r} + \frac{d}{\mu_0} \right) = NI$$

$$B = \frac{\mu_0\mu_r}{l + \mu_r d} NI$$

$$\Phi = NBS = \frac{\mu_0\mu_r}{l + \mu_r d} N^2 IS$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0\mu_r}{l + \mu_r d} N^2 S$$

19

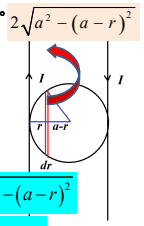
【例11】两根无限长直载流导线相互平行，相距为 $2a$ 。两导线中的电流彼此相反，电流强度相同。在两平行长直导线所在平面内有一半径为 a 的圆环，圆环刚好在两平行长直导线之间，并且彼此绝缘。求圆环与两平行长直导线之间的互感系数。

【解】长直导线电流大小相同方向相反，可视为在无穷远处连通的闭合回路

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi (2a - r)}$$



$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{2a - r} \right]$$

$$dS = dr \cdot 2\sqrt{a^2 - (a - r)^2}$$

$$\Phi = BS = 2 \int_0^a \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{2a - r} \right] 2\sqrt{a^2 - (a - r)^2} dr = 2\mu_0 I a$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = 2\mu_0 a$$

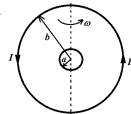
20

【例12】一半径为 a 的小线圈，电阻为 R ，开始时与一个半径为 b ($b \gg a$) 的大线圈共面且同心，固定大线圈，并在其中维持恒定电流 I ，使小线圈绕其直径以匀角速度 ω 转动 (线圈自感可以忽略)，求：(1) 两线圈的互感系数；(2) 小线圈中的感应电流；(3) 维持线圈转动需要的外力矩；(4) 大线圈中的感应电动势

【解】(1) 线圈 b 在圆心(线圈 a 处)产生的磁感应强度为

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$dl = b d\theta \quad r = b$$



$$B = \int dB = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I b}{b^2} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2b}$$

$b \gg a$ 线圈 a 中磁场视为等于圆心处磁场

$$\Phi_{ab} = \vec{B} \cdot \vec{S}_a = BS_a \cos \omega t$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2b} \pi a^2 \cos \omega t$$

$$M_{ab} = \frac{\Phi_{ab}}{I} = \frac{\mu_0}{2b} \pi a^2 \cos \omega t$$

21

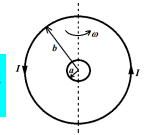
(2) 求小线圈中的感应电流；

小线圈中的感应电动势为

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I \omega}{2b} \pi a^2 \sin \omega t$$

感应电流为

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \quad I_a = \frac{\mu_0 I \omega}{2bR} \pi a^2 \sin \omega t$$



(3) 求维持线圈转动需要的外力矩；

线圈 a 需加的外力的力矩等于它在磁场中所受的安培力的力矩

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B} \quad \vec{m} = I \vec{S} \quad m \text{ 为线圈 } a \text{ 的磁矩} \quad m_a = I_a S_a$$

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B} = -I_a S_a B \sin \omega t \vec{e}_z = -\left(\frac{\mu_0^2 I^2 \pi^2 a^4}{4b^2 R} \right) \omega \sin^2 \omega t \vec{e}_z$$

22

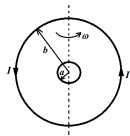
(4) 求大线圈中的感应电动势；

线圈 a 中的电流所产生的磁场穿过线圈 b 中的磁通量为：

$$\Phi_{ba} = MI_a \quad M = \frac{\mu_0}{2b} \pi a^2 \cos \omega t \quad I_a = \frac{\mu_0 I \omega}{2bR} \pi a^2 \sin \omega t$$

$$\Phi_{ba} = MI_a = \left(\frac{\mu_0 \pi a^2}{2b} \right)^2 \frac{I}{2R} \omega \sin 2\omega t$$

$$\varepsilon_b = -\frac{d\Phi_{ba}}{dt} = -\left(\frac{\mu_0 \pi a^2}{2b} \right)^2 \frac{I}{R} \omega^2 \cos 2\omega t$$



23

【例13】一漏电电容器的平板之间的空间填满电阻为 R 的物质，电容为 C ，极板是圆形的，半径为 a ，内部电场均匀， $t=0$ 时刻电容器两极板间的初始电压为0。(1) 若电压以恒定速率 $dU/dt=k$ 增加，那么位移电流是多少？(2) 电容器的真实漏电流在什么时间等于位移电流(3) 半径 r ($r < a$) 处，时刻极板之间 B 的大小为多少？

【解】(1) $I_D = j_D S$ $j_D = \frac{\partial D}{\partial t}$ $D = \varepsilon E = \varepsilon \frac{U}{d}$ $C = \frac{\varepsilon S}{d}$

$$I_D = \frac{\partial D}{\partial t} S = \varepsilon S \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\varepsilon S}{d} \frac{\partial U}{\partial t} = C \frac{\partial U}{\partial t} = Ck$$

(2) $U = U_0 + \frac{dU}{dt} t = kt$ $U_0 = 0$ $I_0 = \frac{U}{R} = \frac{k}{R} t$

$$I_0 = I_D \Rightarrow t = CR$$

(3) $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0 + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

$$2\pi r \frac{B}{\mu_0} = (j_0 + j_D) S = \frac{I_0 + I_D}{\pi a^2} \pi r^2 = \left(Ck + \frac{k}{R} t \right) \frac{r^2}{a^2} \quad B(t) = \frac{\mu_0 k}{2\pi R a^2} (RC + t) r$$

【例14】一平行板电容器的两极均为圆形金属板，面积为 S ，相距为 d ，接于一交流电源时，板上电荷随时间变化，即 $q=q_0\sin\omega t$ ，求：

- (1) 电容器中位移电流密度的大小；
- (2) 电容器内距轴线中心 r 处的磁感应强度 B ；
- (3) 单位时间流入电容器的能量。

【解】(1) $j_D = \frac{\partial D}{\partial t}$ $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$ $D = \frac{q_0}{S} = \sigma_0$

$j_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q_0}{S} \sin \omega t \right) = \frac{q_0}{S} \omega \cos \omega t$

(2) $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0 + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ 电容器内(无漏电流) $I_0 = 0$

$H 2\pi r = j_D S = j_D \cdot \pi r^2 = \frac{q_0}{S} \omega \cos \omega t \cdot \pi r^2$

$H = \frac{q_0 \omega r}{2S} \cos \omega t$ $\mu_r = 1$ $B = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 q_0 \omega r}{2S} \cos \omega t$

25

(3) 求单位时间流入电容器的能量

能流密度(单位时间、单位面积流出的能量)

$$S_{\text{能流密度}} = \frac{W}{t \cdot S_{\text{面积}}}$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

方向垂直指向圆柱体的侧壁

$$\frac{W}{t} = S_{\text{能流密度}} \cdot S_{\text{面积}} = EH \cdot 2\pi r d$$

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{q_0 \sin \omega t}{\epsilon_0 S}$$

$$H = \frac{q_0 \omega r}{2S} \cos \omega t$$

$$\frac{W}{t} = \frac{q_0 \sin \omega t}{\epsilon_0 S} \cdot \frac{q_0 \omega r}{2S} \cos \omega t \cdot 2\pi r d = \frac{q_0^2 \omega d}{2\epsilon_0 S} \sin 2\omega t$$

26

【例15】一条圆柱状导线，其截面为半径为 a 的圆，电阻率为 ρ ，通以恒定电流 I 。求(1)导线内部距离轴为 r 处的电场、磁场、及坡印亭矢量 \vec{S} 的大小和方向。(2)长为 l 半径为 r 的导体内能量的耗散率为多少？与 S 的关系如何？

【解】(1) $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} = \rho \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z$ E 不随时间变化，无位移电流

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0 + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$H \cdot 2\pi r = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2a^2} r \vec{e}_\phi$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \rho \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z \times \frac{I}{2a^2} r \vec{e}_\phi = -\rho \frac{I^2}{2\pi a^4} r \vec{e}_r$$

(2) $P = I^2 R = \left(\frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 \right)^2 \cdot \rho \frac{l}{\pi r^2} = \frac{I^2}{\pi a^4} r^2 \rho l = S (2\pi r l) = SA$

$$A = 2\pi r l \text{ 为侧面积}$$

27

【例16】半径为 r 的金属圆环，由两个半圆弧连接而成，左边一半amb的电阻为 R_1 ，右边一半anb的电阻为 R_2 。圆环放在长直螺线管内，螺线管的轴线与圆环轴线重合，螺线管的电流为 $I = kt$ ($k > 0$)，单位长度匝数为 n ，求(1)ab两点的电势差 $U_{ab} = U_a - U_b$ ；(2)导体内的感应电动势的方向(即涡旋电场的方向)是否总是由低电势指向高电势？

【解】(1) $B = \mu_0 n I = \mu_0 n k t$

$$\epsilon = \oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$\vec{E}_{\text{感}}$ 逆时针方向

$$\frac{dB}{dt} = \mu_0 n k$$

$$\epsilon = \mu_0 n k \pi r^2$$

$$I_{\text{感}} = \frac{\epsilon}{R_1 + R_2} = \frac{\mu_0 n k \pi r^2}{R_1 + R_2}$$

感应电流 $I_{\text{感}}$ 与涡旋电场方向相同，也是逆时针方向

28

$E_{\text{感}}$ 沿逆时针方向， $b \rightarrow n \rightarrow a$ 是一个电动势为 $\epsilon/2$ ，内阻为 R_2 的电源， a 为电源正极

$$U_{ab} = U_a - U_b = \frac{\epsilon}{2} - IR_2 = \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{R_1 + R_2} R_2$$

$$I = \frac{\epsilon}{R_1 + R_2} = \frac{\mu_0 n k \pi r^2}{R_1 + R_2}$$

$$= \epsilon \frac{R_1 - R_2}{2(R_1 + R_2)} = \mu_0 n k \pi r^2 \frac{R_1 - R_2}{2(R_1 + R_2)}$$

$a \rightarrow m \rightarrow b$ 也是一个电动势为 $\epsilon/2$ 的电源，内阻为 R_1 ， b 为电源正极

$$U_{ba} = U_b - U_a = \frac{\epsilon}{2} - IR_1$$

$$= \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{R_1 + R_2} R_1 = \epsilon \frac{R_2 - R_1}{2(R_1 + R_2)} = -U_{ab}$$

两种计算结果相等

(2)导体内的感应电动势的方向(即涡旋电场的方向)是否总是由低电势指向高电势？

$$R_1 > R_2 \quad U_a > U_b$$

$$R_1 < R_2 \quad U_a < U_b$$

29

【例17】半径为 R 的无限长载流螺线管中电流 $I = I_0 \sin(\omega t)$ ，单位长度匝数为 n ，取一个横截面，其上有如图所示 P 、 Q 、 N 三点，离螺线管轴线的距离分别为 $0.5R$ 、 R 和 $1.5R$ ，求(1)三点各自的涡旋电场大小及方向；(2)在QN间加一个导线，如何连接会使得QN两点间的电势差为0；(3)PQ两点间的电势差可能的最大值为多少，如何才能实现？(导线不重叠)

【解】(1) 设回路方向为顺时针方向，则管内 $B > 0$

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 n I_0 \sin \omega t$$

$$\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$2\pi r E_{\text{感}} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$r \leq R \quad E_{\text{感}} = \frac{r}{2} \mu_0 n \omega I_0 \cos \omega t$$

$$E_{P\text{感}} = \frac{0.5}{2} \mu_0 n \omega I_0 \cos \omega t$$

管外 $B=0$,

$$E_{Q\text{感}} = \frac{a}{2} \mu_0 n \omega I_0 \cos \omega t$$

$$r > R \quad E_{\text{感}} = \frac{1}{2r} R^2 \mu_0 n \omega I_0 \cos \omega t$$

$$E_{N\text{感}} = \frac{1}{3} a \mu_0 n \omega I_0 \cos \omega t$$

方向：逆时针，沿圆周切线方向

30

(2)在QN间加一个导线，如何连接会使得QN两点间的电势差为0？

涡旋电场方向沿圆周切线，要使得QN间电势差为0，需使导线与 $E_{\text{旋}}$ 垂直，即导线沿径向，如图中蓝线Q-O-N所示。

(3) PQ两点间的电势差可能的最大值为多少，如何才能实现？(导线不重叠)

$$r \leq R \quad E_{\text{旋}} = \frac{r}{2} \mu_0 n \omega I_0 \cos \omega t$$

要使得PQ间电势差最大，则需要导线沿着 $E_{\text{旋}}$ 方向，即导线沿圆周方向，另外螺线管内 $E_{\text{旋}}$ 与 r 成正比，尽可能以最大 $r(r=R)$ 绕更长的导线，如下图绿色线所示，P-O-Q-M-Q

$$V_{PQ-\max} = \varepsilon = \int_P^Q \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = \int_P^O \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} + \int_O^Q \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} + \oint_{Q-M-Q} \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} \\ = 0 + 0 + \frac{1}{2} \mu_0 n \omega I_0 R \cos(\omega t) 2\pi R = \mu_0 n \omega I_0 R^2 \pi \cos(\omega t)$$

31

【例18】已知真空中一平面电磁波的电场强度为 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

式中 E_0 为常矢量， ω 是圆频率， k 为传播矢量， r 为位置。(1)由麦克斯韦方程求这个电磁波的磁场强度 H ；(2)求能量密度的瞬时值和一个周期内的平均值

【解】

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

对平面电磁波

$$\nabla = i\vec{k} \quad \nabla \times \vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -i\omega \vec{H}$$

$$i\vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = -\mu_0 (-i\omega \vec{H})$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega \mu_0} \vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

32

(2)求能量密度的瞬时值和一个周期内的平均值

$$\omega = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2$$

对真空中的平面电磁波，有 $\omega_e = \omega_m$

$$\omega = 2\omega_e = \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\bar{\omega} = \int_0^T \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) dt = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$$

33