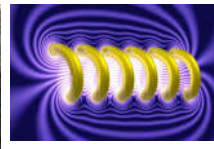


第4章 磁力与磁场

§ 4-1 磁现象与磁力

§ 4.1.1 磁现象研究历史和磁性的起源

1. 磁现象研究简史



$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

磁现象是一种普遍现象，一切物质都具有磁性。

2

2007年诺贝尔物理奖—巨磁电阻效应



Albert Fert
法国Paris-Sud大学

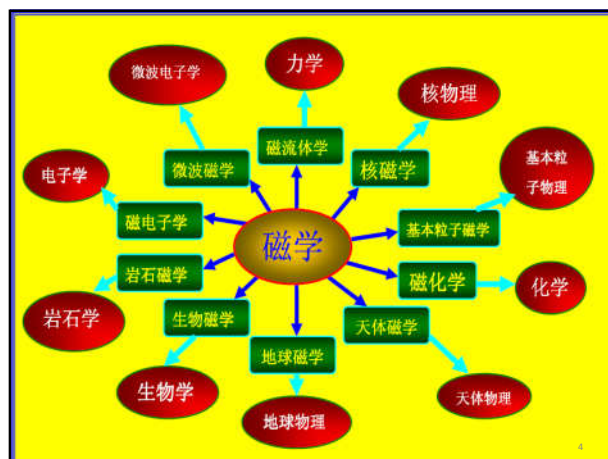


Peter Grünberg
德国尤里希研究中心

巨磁电阻效应：一些层状薄膜磁性材料的电阻率 ρ 在有外磁场作用时，较之无外磁场作用时，存在**巨大变化**的现象。

机理：当铁磁层的**磁矩相互平行/反平行**时，载流子与**自旋有关的散射最小/最强**，材料有最小/最大的电阻。

3



4

2. 磁的基本现象

天然磁铁（吸铁石）能**吸引铁、镍、钴等物质**。

条形磁铁的两端称作**磁极**，中部称作**中性区**，将条形磁铁的中心支撑或悬挂起来，使它能够水平面内运动，则两极总是指向南北方向，分别称作**S极**和**N极**。

条形磁铁与条形磁铁之间的相互作用说明**同号磁极相互排斥**，**异号磁极相互吸引**。

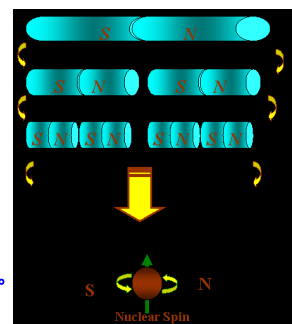


5

磁铁可以一直细分成很多很小的磁铁，**每一个小磁铁都具有N、S极**。

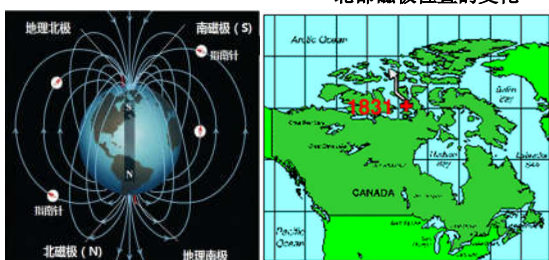
自然界中有独立存在的正电荷或负电荷，但迄今却**未发现独立的N、S极（磁单极子）**。

但在近代理论中，有人认为可能存在**磁单极子**。



6

北部磁极位置的变化



地球的磁场类似于一个巨大的条形磁铁，但 **S 极位于地球的地理北极附近** (加拿大的 **Ellesmere 岛**)；

实际上 **地球的磁极位置不是固定不变的**，而是随时间发生变化。历史上地球的磁极发生多次反转。

- 目前，地球南北两极的**磁场一直在衰减**。
- **地球磁极会不会因此而反转？反转的过程中有多长时间地球磁场消失？**
- 地球磁场消失时，太阳粒子风暴将猛击地球大气层，地球将完全暴露在各种致命的宇宙射线线下。卫星将遭受太阳电磁风暴的吹打，人类高科技通信技术将遭遇毁灭性的瘫痪。许多随季节变化而移居的候鸟或动物（他们依赖先天本能寻找地球南北极）的命运难测。
- 人类需要提前做好对太阳电磁风暴的预测和防御。



磁铁可分为**永久磁铁(硬磁)**和**非永久磁铁(软磁)**。

永久磁铁可以是天然的，也可以是人造的。


天然磁铁矿的主要成分是 Fe_3O_4 ，具有强磁性。

人造永久磁铁也具有强磁性，可以由**金属合金**制成，如钕磁铁、铝镍钴、铁氧体、稀土磁铁，如钕铁硼磁铁。



天然磁铁矿石 人工制造的磁铁吊车

目前市场上各种各样的磁铁



钕磁铁 钕铁硼磁铁 铝镍钴磁铁 钐钴磁铁

最强磁力的永久磁铁是钕磁铁(钕铁硼磁铁)，化学式为 $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ 。

它具有**体积小、重量轻、磁性强的特点**，是目前性价比最佳的磁体，在磁学界被誉为**磁王**。

3. 电与磁的联系

电流磁的效应：奥斯特于1820年4月首次发现铂导线**接通电源瞬间**，位于其上方的小磁针发生偏转。

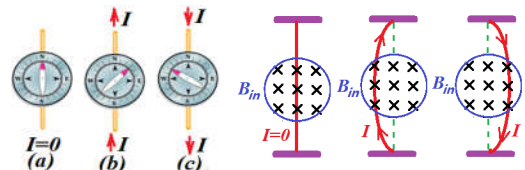


电流磁效应打破了长期以来电学与磁学彼此独立发展和研究的界限，使人们开始认识到**电与磁有着不可分割的联系**。

载流导线下小磁针偏转

法拉第“它突然打开了科学中一个一直是黑暗领域的大门，使其充满光明”。

- **电流对磁铁有作用；**
- **磁铁对电流有作用；**
- **电流和电流之间也有相互作用；**
- 进一步发现**载流螺线管**的行为很像一根**磁棒**，由此可用**右手定则**来判断**载流线圈的极性**。



电流对磁铁有作用 磁场对电流有作用

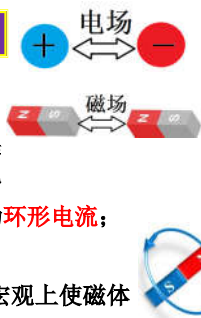
4. 物质磁性的起源

经典电磁学

⚡ **分子电流假说**：安培在1822年提出的针对物质磁性的起源的假说

- 组成磁铁的最小单元(磁分子)为**环形电流**；
- 环形电流与小磁针具有等效性；
- 分子环流定向地排列起来，在宏观上使磁体显示出 *N*、*S* 极，即具有磁性。

安培分子电流假说揭示了**物质磁性**与它内部带**电粒子运动**相联系这一基本性质。

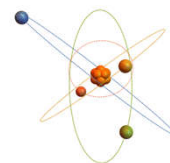
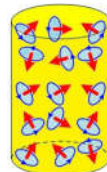


13

安培：分子
环流假说

近代原子
分子结构

两者有
一致性



环形电流与小
磁针的等效性

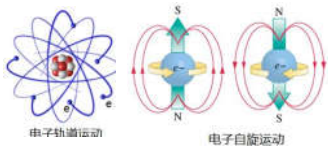
⚡ **等效磁荷理论**：磁铁有*N/S*两极，同号相斥，异号相吸，与电学中的正、负电荷存在相似性。人们假定在*N*极上聚集着正磁荷，在*S*极上聚集着负磁荷。由此可以将磁现象与电现象类比。

14

现代电磁学

物质磁性来源 的量子解释

- ① 电子轨道磁矩：电子绕核的轨道运动
- ② 电子自旋磁矩：电子自身的自旋运动
- ③ 质子、中子、原子核的磁矩



- ✓ 原子的磁性主要考虑**电子的磁性**，因为原子核的磁性比核外电子的磁性小很多(与质量成反比)。
- ✓ 分子的磁性不是构成分子的原子磁性的简单迭加，而是与**分子的结构、分子中原子间的相互作用等多种因素有关**。

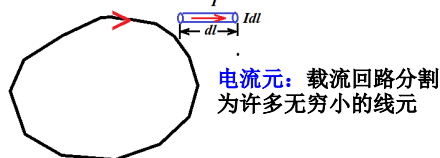
15

§ 4.1.2 安培定律

静电场的基本规律——点电荷间相互作用规律——库仑定律

稳恒磁场的基本规律？**电流间相互作用规律——安培定律**

稳恒电流只能存在于闭合回路之中。闭合回路的形状和大小可以千变万化。两载流闭合回路间的相互作用与它们的形状、大小和相对位置等许多因素有关。



16

⚡ 实验中可以有孤立的电荷，但**无法实现一个孤立的稳恒电流元**，从而无法直接用实验来确定它们的相互作用。

⚡ 电流元之间的相互作用规律只能间接地从闭合载流回路的实验中倒推出来。

⚡ 闭合回路受力通过**矢量叠加**得到。

⚡ 安培定律并不是直接从实验得到，而是在**安培**设计得很巧妙的**四个实验**和**一个假设**的基础上，与相当高超的数学技巧相结合得到的。



André Marie Ampère
(1775 – 1836)

17

1. 安培定律的建立历史

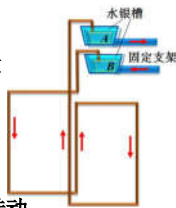
- ⚡ 1820年7月21日 **奥斯特**——**电流的磁效应**实验
- ⚡ 9月18日 **安培**——**圆电流对磁针的作用**的实验
- ⚡ 9月25日 **安培**——**平行载流导线之间的相互作用**
- ⚡ 10月初 **安培**——**螺线管与条形磁铁的等效性**
- ⚡ 10月30日 **毕奥和萨伐尔**——**长直导线对磁极的作用力反比于距离**的实验
- ⚡ 12月4日 **安培**——**电流相互作用的公式**
- ⚡ 1821年元月 **安培**——**分子电流假说**

日新月异、突飞猛进！

18

2. 安培的四个示零实验

- 安培首先设计制作了**无定向秤**。
- 他用一根硬导线弯成两个共面的、大小相等的矩形线框，线框的两个端点A、B通过水银槽和固定支架相连。
- 接通电源时，两个线框中的**电流方向正好相反**。
- 整个线框可以以水银槽为支点自由转动。
- 在**均匀磁场**(如地磁场)中，它所受到的**合力和合力矩为零**，处于随遇平衡；
- 但在**非均匀磁场**中，它会发生**运动**。



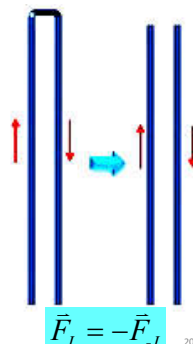
19

实验一：电流反向，作用力也反向

- 安培将一对折的**通电导线**，移近无定向秤，以检验对折导线对无定向秤有无作用力。
- 结果：**无定向秤丝毫不动**(即所受合力为0)。

说明：

- ① 电流反向时，电流产生的作用力也反向；
- ② 大小相等的电流，产生的力的大小相等。



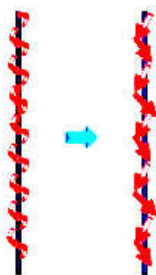
20

实验二：磁作用力的方向性

- 将对折导线中的一段，绕在另一段上，成**螺旋形**，通电后，将它移近无定向秤，**无定向秤仍无任何反应**。

表明：

- ① 一段螺旋状导线的作用与一段**长导线**的作用相同；
- ② 若将螺旋状导线的每一小段看作电流元，则**电流元具有矢量性质**，即许多电流元的作用力是各单个电流元作用的**矢量叠加**。



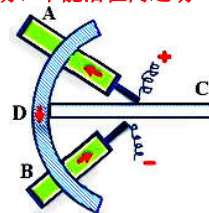
21

实验三：作用力的方向

- 弧形导体D架在水银槽A、B上。导体D与一绝缘棒固接，棒的另一端架在圆心C处的支点上，D可以绕C自由旋转。通过水银槽给导体D通电，构成一个**只能沿弧线方向移动、不能沿径向运动的电流元**。

- 安培用这个装置检验各种载流线圈对它产生的作用力，结果发现**弧形导体D不运动(不沿弧线方向移动)**。

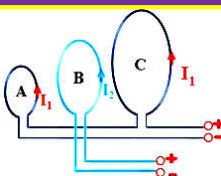
- 这表明：**作用在电流元上的力与电流本身垂直**。



22

实验四：作用力与电流及距离的关系

- A、B、C是用导线弯成的三个几何形状相似的线圈，其周长比为 $1:k:k^2$ 。A、C两线圈相互串联，位置固定，通入电流 I_1 。线圈B可以活动，通入电流 I_2 。



- 实验发现，**只有当A、B间距与B、C间距之比为 $1:k$ 时，线圈B才不受力**，即此时A对B的作用力与C对B的作用力大小相等、方向相反。

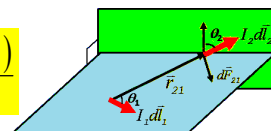
- 这表明：
- 电流元长度增加，作用力增加；
 - 相互距离增加，作用力减小；
 - 如果两电流元的长度及相互距离增加同一倍数，相互作用力不变。

23

3. 安培定律

- 在以上实验基础上，安培提出**安培定律**，描述**电流元 $I_1 dl_1$ 对电流元 $I_2 dl_2$ 的作用力**：

$$d\vec{F}_{21} = k \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{e}_r)}{r_{21}^2}$$

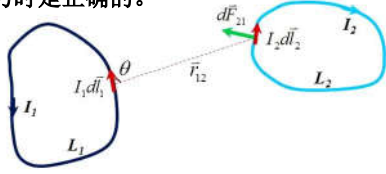


式中 \vec{e}_r 是施力电流元 $I_1 dl_1$ 到受力电流元 $I_2 dl_2$ 方向的单位矢量

$$dF_{21} = k \frac{I_1 I_2 dl_1 dl_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2}{r_{21}^2}$$

24

- ✚ 该式的正确性**无法用实验来检验**，因为无法得到稳恒电流元，但是在计算两个线圈的作用力时是正确的。



- ✚ 在该式上加上任意一个附加项，只要该附加项满足对任意闭合路径的积分为零，则附加项并不影响其结果，说明**该式不是唯一的**，它仅是最简单又较合理的一种形式。

25

- ✚ 面电流元 idS 之间的安培力：

$$d\vec{F}_{21} = k \frac{i_2 d\vec{S}_2 \times (i_1 d\vec{S}_1 \times \vec{e}_r)}{r_{21}^2}$$

- ✚ 体电流元 jdV 之间的安培力：

$$d\vec{F}_{21} = k \frac{\vec{j}_2 dV_2 \times (\vec{j}_1 dV_1 \times \vec{e}_r)}{r_{21}^2}$$

交换下标1和2，即得电流元2对1的作用力公式

26

4. 讨论

- ✚ 电流元之间的相互作用力不一定满足牛顿第三定律

- ✚ 原因：实际上不存在孤立的稳恒电流元，它们总是闭合回路的一部分。

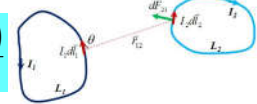
$$dF_{12} = dF_{21} \quad dF_{12} = k \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{r_{12}^2} \neq dF_{21} \quad dF_{21} = 0$$

- ✚ 但可以证明，上面的公式在计算两个线圈的作用力时是正确的。沿闭合回路积分，得到的合成作用力总是与反作用力大小相等，方向相反。

27

闭合回路电流之间作用力满足牛顿第三定律

$$d\vec{F}_{21} = k \frac{(I_2 d\vec{l}_2) \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{e}_r)}{r_{21}^2}$$



所有 L_1 对 L_2 的作用力

$$d\vec{F}_2 = \oint_{L_1} d\vec{F}_{21} = k I_2 d\vec{l}_2 \times \oint_{L_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{21}}{r_{21}^3}$$

所有 L_1 对 L_2 的总力

$$\vec{F}_{21} = \oint_{L_2} d\vec{F}_2 = k I_1 I_2 \oint_{L_2} d\vec{l}_2 \times \oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{21}}{r_{21}^3}$$

同理，所有 L_2 对 L_1 的总力

$$\vec{F}_{12} = k I_1 I_2 \oint_{L_2} d\vec{l}_2 \times \oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

28



$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$\oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{21})}{r_{21}^3} = \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{(d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{21}) d\vec{l}_1 - (d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1) \vec{r}_{21}}{r_{21}^3}$$

$$= \oint_{L_1} \left(\oint_{L_2} \frac{(d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{21})}{r_{21}^3} \right) d\vec{l}_1 - \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{(d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1) \vec{r}_{21}}{r_{21}^3}$$

对任意 L_2 ，均有：

$$\oint_{L_2} \frac{(d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{21})}{r_{21}^3} = \oint_{L_2} \frac{dr_{21}}{r_{21}^2} = 0$$

29

因此

$$\oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{21})}{r_{21}^3} = - \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{(d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1) \vec{r}_{21}}{r_{21}^3}$$

同理

$$\oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = - \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

又

$$\because r_{12} = r_{21}, \vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$$

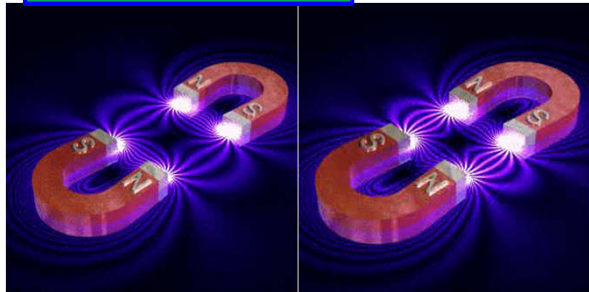
$$\therefore \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

即闭合回路电流之间作用力满足牛顿第三定律

30

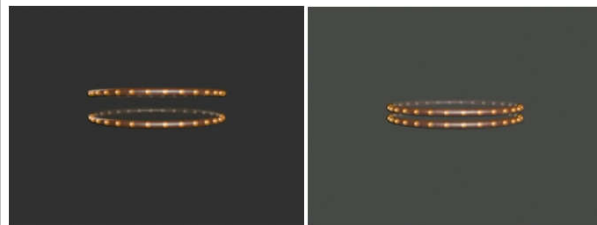
§ 4-2 电流的磁场

§ 4.2.1 磁感应强度



安培定律

$$d\vec{F}_{21} = k \frac{(I_2 d\vec{l}_2) \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{e}_r)}{r_{21}^2} \quad k = \frac{\mu_0}{4\pi}$$



一、稳恒磁场与磁场感应强度

- 电荷间的库仑力不是超距作用，而是通过**电场**来传递的。
- 电流之间的作用也不是超距作用，而是通过**磁场**来传递的。
- 磁体的磁性来源于电流，电流是电荷的运动，因此**磁场是运动电荷或电场变化而产生的**。
- 稳恒磁场**：稳恒电流产生的磁场，**随空间变化、不随时间改变**：
$$\frac{\partial \vec{B}(x, y, z)}{\partial t} = 0$$



- 试探电流元**： $I_0 d\vec{l}$ ，类似于**试探点电荷**，要求电流元的引入不改变空间的磁场分布，**但困难是并不存在这样的电流元**。

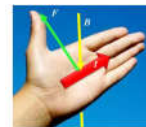
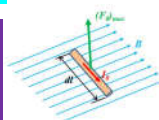
- 磁感应强度B**：反映磁场本身的特性的物理量，磁场是**矢量场**。本应称**磁场强度**，由于历史的原理，被另一个物理量**H**长期占用。

$$\begin{cases} d\vec{F}_0 = I_0 d\vec{l} \times \vec{B} \\ d\vec{F}_0 = q\vec{E} \end{cases}$$

试探电流元 $I_0 d\vec{l}$ 在磁场 \vec{B} 中

试探点电荷 q 在电场 \vec{E} 中

试探电流元所受的力除了与本身电流元大小有关外，还与作用于它的磁场的强弱和取向有关



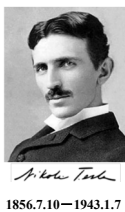
- B 的单位**：牛顿/(安培·米)，或特斯拉(T)

$$1 \text{ T} = 1 \text{ N}/(\text{Am}) = 10^4 \text{ Gauss}$$

特斯拉是一位伟大的发明家，平生有**几千件发明**，有**几百项专利**，他都无私的奉献给了世界。

美国电动汽车厂商采用特斯拉作为汽车的商标体现了后人对这位伟大发明家的尊敬。

2005年，他被电视节目“最伟大的美国人”列为前100名。



二、毕奥—萨伐尔定律



Jean Baptiste Biot
(1774-1862)



Felix Savart
(1791-1841)

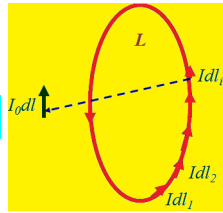
1. 磁场叠加原理

$$d\vec{F}_0^i = I_0 d\vec{l}_0 \times \vec{B}_i \quad (i=1,2,3,\dots,n)$$

由力的叠加原理, 有:

$$d\vec{F}_0 = \sum_i d\vec{F}_0^i = I_0 d\vec{l}_0 \times \sum_i \vec{B}_i = I_0 d\vec{l}_0 \times \vec{B}$$

即 $\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$ 或 $\vec{B} = \oint_L d\vec{B}$



2. 毕奥—萨伐尔定律

线电流中的一段电流元 Idl 在 $I_0 dl_0$ 处产生的磁场为 dB , 则

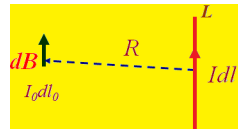
$$d\vec{F} = I_0 d\vec{l}_0 \times d\vec{B}$$

由安培定律:

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 d\vec{l}_0 \times \frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} = I_0 d\vec{l}_0 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \right)$$

比较得到电流元 Idl 产生的磁感应强度 dB :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Id\vec{l} \times \frac{\vec{R}}{R^3} \quad \text{或} \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Id\vec{l} \times \frac{\vec{e}_R}{R^2}$$



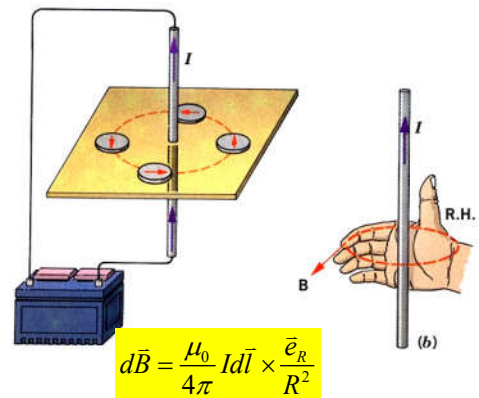
同理可得到体电流分布 $j dV$ 和面电流分布 $i dS$ 所产生的磁感应强度 dB :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{S} \times \vec{R}}{R^3}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j dV \times \vec{R}}{R^3}$$

由叠加原理, 有:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Id\vec{l} \times \frac{\vec{e}_R}{R^2}$$

【例1】无限长直线电流 I , 在距 I 为 r_0 处一点 P 的磁场。

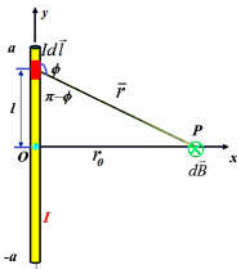
【解】

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Id\vec{l} \times \frac{\vec{e}_R}{R^2}$$

$$\vec{B} = \int_{A1}^{A2} d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{A1}^{A2} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{A1}^{A2} \frac{Idl \sin \phi}{r^2}$$

$$l = -r_0 \cot \phi, \quad dl = \frac{r_0 d\phi}{\sin^2 \phi} \quad \sin \phi = \sin(\pi - \phi) = \frac{r_0}{r}$$



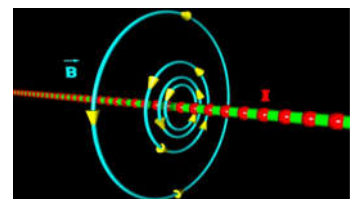
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{I \sin \phi d\phi}{r_0} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2)$$

对无限长导线:

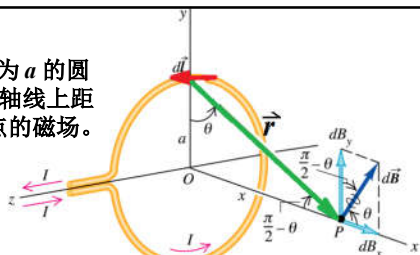
$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = \pi$$

所以, 有:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$$



【例2】半径为 a 的圆形电流 I ，在轴线上距离为 x 的 P 点的磁场。



【解】由于对称性， x 轴上 P 点处的磁感应强度只有 x 分量，其余分量互相抵消

$$B_x = \oint dB \cos \theta \quad x = r \sin \theta \quad \theta \text{ 是 } dB \text{ 与 } x \text{ 轴的夹角}$$

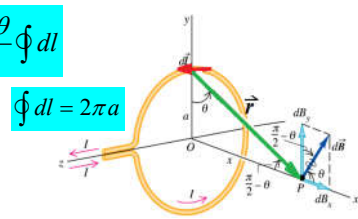
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \phi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \quad \phi \text{ 是 } dl \text{ 与 } r \text{ 的夹角} \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$B_x = \oint dB \cos \theta = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{Idl}{x^2 / \sin^2 \theta} \cos \theta$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin^2 \theta \cos \theta}{x^2} \oint dl$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$



$$B_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{a^2 I}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$m = IS = I\pi a^2$$

电流的磁矩

$$B_x = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{r^3}$$

【讨论】圆心处： $x=0$, $B_x = \frac{\mu_0 I}{2a}$

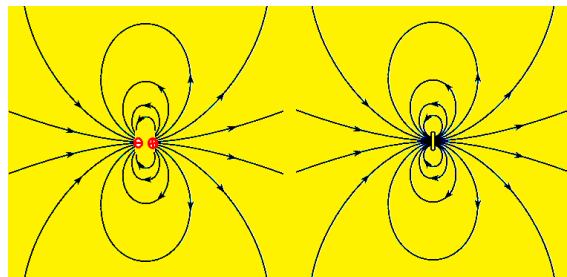
$$\text{远处: } x \gg a, B = \frac{\mu_0 I a^2}{2x^3} = \frac{\mu_0 m}{2\pi x^3}$$

其中 $m = I\pi a^2$ 称电流的磁矩 $\vec{m} = I\vec{S}$

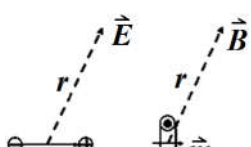
电偶极子在远处产生的电场： $\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}$

电流磁矩在远处产生的磁场： $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{r^3}$

电偶极子产生的电场和圆形电流环产生的磁场的比较



比较电偶极子电场和磁偶极子的磁场



$$\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5}$$

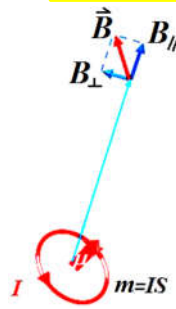
$$\vec{p} = q\vec{l}, \quad \vec{m} = I\vec{S}$$

不一定是圆形电流，可以是任意形状的闭合电流

$$\vec{S} = \iint_S d\vec{S} = \frac{1}{2} \oint \vec{r}' \times d\vec{r}'$$



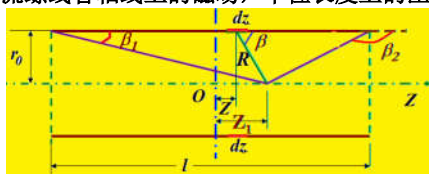
圆形电流环的磁场与条形磁场所产生的磁场在远处具有很好的相似性



$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5}$$

由条形磁铁的磁矩 m (构成磁铁的物质中未配对电子的自旋磁矩和轨道磁矩的矢量和)，可算出条形磁铁在远处产生的磁场。

【例3】求载流螺线管轴线上的磁场，单位长度上的匝数为 n 。



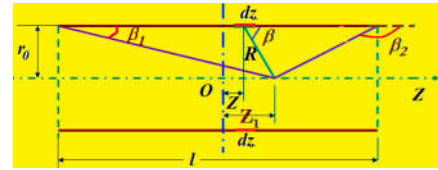
【解】前例已得到单个圆电流 I 在轴线上的 B_x

$$B_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{a^2 I}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

则 Z 处圆电流 $I(ndz)$ 在轴线上某点 Z_1 处产生的磁感应强度 dB 为

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{r_0^2 I ndz}{[r_0^2 + (z_1 - z)^2]^{3/2}}$$

49



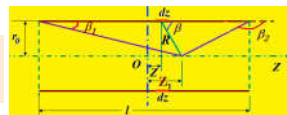
$$\sqrt{r_0^2 + (z_1 - z)^2} = R = \frac{r_0}{\sin \beta}, \quad z_1 - z = R \cos \beta$$

$$z_1 - z = r_0 \cot \beta, \quad \Rightarrow \quad dz = r_0 \frac{d\beta}{\sin^2 \beta}$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I n r_0^2 dz}{[r_0^2 + (z_1 - z)^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta d\beta$$

$$= \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2)$$

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2)$$



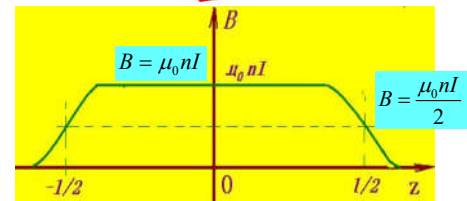
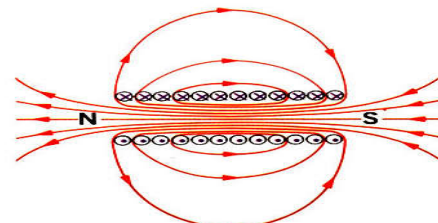
若 $l \gg r_0$, Z_1 在不靠近边缘的很大区域内均有:

$$\cos \beta_1 = 1, \cos \beta_2 = -1$$

$$\therefore B = \mu_0 n I \quad \text{无限长载流螺线管内部为均匀磁场}$$

在两个端点处, $\cos \beta_1 = 1$ (or 0), $\cos \beta_2 = 0$ (or 1)

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \quad \text{半无限长载流螺线管两端, 磁场减半}$$



三、SI制的电流单位安培的定义

1948年, 国际计量委员会在第9届国际计量大会上, 根据载流导线间的相互作用力定义电流强度的单位安培:

一恒定电流, 若保持在真空中、相距1米、两无限长、圆截面可以忽略的、平行直导线, 在此两导线之间产生的力, 在每米长度上等于 2×10^{-7} 牛顿(N), 则此恒定电流的电流强度定为1安培(A)。

53

安培定律 $d\vec{F}_{21} = k \frac{(I_2 d\vec{l}_2) \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{e}_r)}{r_{21}^2}$

所有 $I_1 d\vec{l}_1$ 对 $I_2 d\vec{l}_2$ 作用力的方向相同

若 $I_1 = I_2$

$$dF_2 = k I d l_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I d l_1 \sin \theta}{r_{21}^2} = k I^2 d l_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \theta}{r_{21}^2} d l_1$$

$$\because l_1 = d \cdot \tan(\pi - \theta), \quad d l_1 = d \cdot d\theta / \sin^2 \theta, \quad r_{12} = d / \sin \theta$$

$$\therefore dF_2 = k I^2 d l_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin \theta d\theta}{d} = k I^2 d l_2 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

当 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$ 时 $dF_2 = k \frac{2I^2}{d} d l_2$

无限长

54

因此，无限长直导线对 l 长导线的作用力为：

$$F_l = \int_l dF_2 = k \frac{2I^2}{d} \int_l dl_2 = k \frac{2I^2 l}{d}$$

规定：若 $d=1m, l=1m$ ，
在真空中，如果 $F_l=2 \times 10^{-7} N$ ，则 $I=1A$

系数 k 的量纲为： $[k] = \frac{[F]}{[I^2]} = MLT^{-2}I^{-2}$

$$k = 10^{-7} NA^{-2}$$

55

通常

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N \cdot A^{-2}$$

因此，安培定律重新写成

$$\text{电流元间} \quad d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I_2 d\vec{l}_2) \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{e}_r)}{r_{21}^2}$$

$$\text{或闭合回路间} \quad \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{21})}{r_{21}^3}$$

56

电流强度单位安培的最新定义

- 2018年11月16日，第26届国际计量大会通过“修订国际单位制”决议，将1安培定义为：

“1s内 $(1/1.602176634) \times 10^{19}$ 个电荷移动所产生的电流强度”。

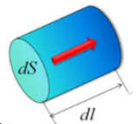
$$I = \frac{q}{t}$$

- 此定义于2019年5月20日世界计量日起正式生效。

57

电流密度 j 与电荷定向
漂移速度 u 间的关系为

$$\vec{j} = nq\vec{u}$$



某个体积元 ΔV 内有 $N=n\Delta V$ 个运动电荷

$$\begin{aligned} Id\vec{l} &= \left(\sum \vec{j} \cdot d\vec{S} \right) d\vec{l} = nq \sum (\vec{u} \cdot d\vec{S}) d\vec{l} \\ &= nq \sum u dS d\vec{l} = nq dV \vec{u} = Nq\vec{u} \end{aligned}$$

如果只有一个点电荷，则一个点电荷运动产生的效果与电流元产生的效果相同，即

$$id\vec{l} = q\vec{u}$$

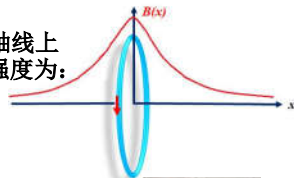
电流 \rightarrow 磁场 运动电荷 \rightarrow 磁场

58

四、亥姆霍兹线圈的磁场

- 一个载流圆线圈在轴线上某点 x 处的磁感应强度为：

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$



- 亥姆霍兹线圈：一对彼此平行且连通的共轴圆形线圈，每一线圈 N 匝，两线圈内的电流方向一致，大小相同，当线圈之间距离 d 正好等于圆形线圈的平均半径 R 时，两线圈中点的磁场是一个近似的均匀磁场。

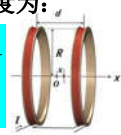


$$d = R$$

59

- 两个同轴线圈在轴线上一点的磁感应强度为：

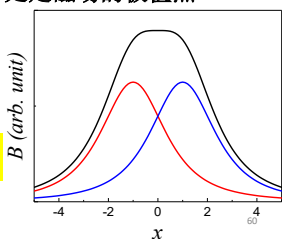
$$B(x) = \frac{\mu_0 NIR^2}{2 \left[R^2 + \left(\frac{d}{2} + x \right)^2 \right]^{3/2}} + \frac{\mu_0 NIR^2}{2 \left[R^2 + \left(\frac{d}{2} - x \right)^2 \right]^{3/2}}$$



由 $\frac{dB(x)}{dx} = 0 \Rightarrow x=0$ 处是磁场的极值点

- 若想在中心形成一个近似均匀的磁场区间，需使

$$\left. \frac{d^2 B(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow d = R$$



✦ $d=R$ 时, 中心近似均匀的磁场的磁感应强度为:

$$B_0 = 2 \times \frac{\mu_0 N I R^2}{2 \left[R^2 + (R/2)^2 \right]^{3/2}} = \left(\frac{4}{5} \right)^{3/2} \frac{\mu_0 N I}{R}$$

✦ 亥姆霍茨线圈内部任意一点 $P(x,y)$ 的磁场为:

$$\begin{cases} B_{px} = \left(\frac{4}{5} \right)^{3/2} \frac{\mu_0 N I}{R} \left[1 - 0.144 \frac{1}{R^4} (8x^4 - 24x^2y^2 + 3y^4) + \dots \right] \\ B_{py} = 0.0412148 \frac{\mu_0 N I y}{R^5} [x(4x^2 - 3y^2) + \dots] \end{cases}$$

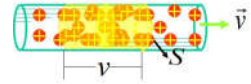
✦ 亥姆霍茨线圈可用来产生标准磁场; 作霍尔探头和各种磁强计的定标; 进行地磁场的补偿、空间辐射磁场的测量、物质磁特性的研究等。

61

五、运动电荷产生的磁场

导体截面为 S , 自由电荷密度为 n , 载流子电量为 q , 平均运动速度为 v 时, 导体中的电流为

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = nqvS$$



电流元 Idl 产生的磁场 $d\vec{B}$ 为

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

电流元的磁场相当于电流元 Idl 内 N 个运动电荷产生的磁场。电流元内电荷的数目为

$$N = ndV = nSdl$$

62

因此, 一个运动电荷产生的磁场为:

$$I = nqvS \quad N = nSdl$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{d\vec{B}}{N} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{Nr^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{nqvSd\vec{l} \times \vec{r}}{nSdlr^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dlq\vec{v} \times \vec{r}}{dlr^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

该式只在低速运动下成立

该式还可以表示为:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{r}}{r^3}$$

E : 静止电荷产生的电场

$$\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\vec{v} \times \vec{E} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

真空中的光速

63

对更普遍的情况, 上式中的电场需用运动电荷产生的 E 代入

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(1-\beta^2)}{r^2(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} \vec{e}_r$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qv(1-\beta^2)}{c^2r^2(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} \vec{e}_\phi$$

64



作业 4.1 4.2 4.3 4.5 4.6 4.8
Thank you!