

上节课主要内容

- ✦ 似稳条件 $l \ll c/f = \lambda$
- ✦ 一个电感线圈的磁能(自感磁能) $W_m = \frac{1}{2} LI^2$
- ✦ 两个电感线圈的磁能(自感磁能+互感磁能)

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \pm M I_1 I_2$$
- ✦ n 个电感线圈的磁能(自感磁能+互感磁能)

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n M_{ik} I_i I_k \quad \text{或} \quad W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Phi_i \quad L_{ii} = M_{ii}$$

1

- ✦ 线圈在外磁场中的磁能 $W_m = \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad \vec{\mu} = \sum_i \vec{\mu}_i$
- ✦ 磁能密度 $\omega_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$
- ✦ 磁能 $W_m = \iiint_V \omega_m dV = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV$ 通用表达式
- ✦ 求自感的几种方法

$$L = \frac{2W_m}{I^2} \quad L = \frac{\Phi}{I} \quad L = - \frac{\varepsilon}{di/dt}$$

2

第7章 交流电路与电力输送



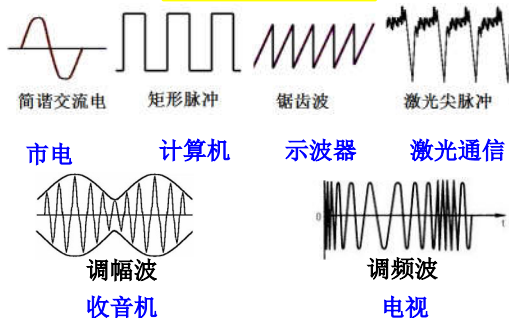
3

§ 7-1 交流电的产生和基本特性

- ✦ 交流电路：电路中电源的电动势 $\varepsilon(t)$ 、电流 $I(t)$ 和电压 $U(t)$ 随时间作周期性变化。
- ✦ 交流电的产生主要有两种方式：
 - 交流发电机：有火力、水力、风力、核能等发电机，是日常生活和工业用电的主要产生方式；
 - 电子振荡器：其中含有电子器件如电子管、半导体晶体管等，主要在仪器设备中做信号使用。

4

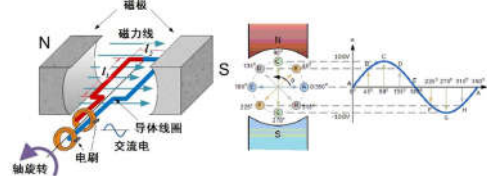
交流电的种类



5

简谐交流电

- ✦ 以时间按正弦或余弦规律变化的交流电



$$\phi_m = NBS \cos \theta, \theta = \omega t + \delta \quad \omega = 2\pi f \quad \text{频率 } f$$

$$\varepsilon = - \frac{d\phi_m}{dt} = NBS\omega \sin(\omega t + \delta) = \varepsilon_0 \sin(\omega t + \delta) \quad \varepsilon_0 = NBS\omega$$

任何交流电都可以分解成一系列不同频率的简谐交流电

以余弦形式描述简谐交流电

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t + \varphi_e) \\ u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \\ i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \end{cases} \quad \varepsilon_m, U_m, I_m$$

为极大值或峰值

或采用统一的表达式:

$$A = A_m \cos(\omega t + \varphi_A)$$

A_m : 峰值

ω : 频率

φ_A : 初始位相

频率 $\omega = 2\pi f, f = \frac{1}{T}$

位相 $(\omega t + \varphi)$

7

有效值: 交流电流在一个周期内在纯电阻元件中产生的焦耳热, 与直流电流在同一时间内通过该电阻所产生的焦耳热相同时的电流值, 即

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$Q_{\text{交}} = Q_{\text{直}} \Rightarrow \int_0^T i^2 R dt = I_e^2 R T \Rightarrow I_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad \text{方均根值}$$

$$I_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_i) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad I_e = 0.707 I_m$$

市电 220 V 指有效值, 其峰值为 311 V, 交流电表的读数为有效值 $U_e = 0.707 U_m$

实际应用大多采用有效值, 从而可以利用直流电的公式直接计算交流电的平均功率

8

交流电路中的元件

交流电路中的元件的特性必须用两个参数描述: 第一是**阻抗 Z**, 第二为**相位差 φ**

阻抗: $Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m}$

相位差: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ 为各元件上电压与电流之间的相位差

由于交流电电压和电流之间通常存在位相差, 所以电压、电流的瞬时值一般不满足简单的比例关系。

9

1. 交流电路中的电阻元件

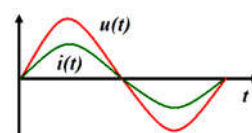
设纯电阻元件所加交流电压为: $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$

电流为: $i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \cos(\omega t + \varphi_u)$ $I_m = \frac{U_m}{R}$
 $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ $\varphi_i = \varphi_u$

阻抗

相位差

$$\begin{cases} Z_R = \frac{U_m}{I_m} = R \\ \varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0 \end{cases}$$



- 阻抗即电阻, 与频率无关;
- 位相差为 0, 电压与电流始终同步;
- 电流和电压关系仍满足欧姆定律。

10

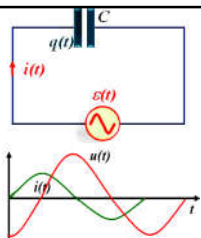
2. 交流电路中的电容元件

设电容的极板在某个时刻的电量为: $q(t) = Q_m \cos \omega t$

$$u(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{Q_m}{C} \cos(\omega t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -Q_m \omega \sin(\omega t) = \omega Q_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

所以有 $\begin{cases} I_m = \omega Q_m, U_m = \frac{Q_m}{C} \\ \varphi_i = \frac{\pi}{2}, \varphi_u = 0 \end{cases}$ 容抗 $Z_C = \frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{\omega C}$ 相位差 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$

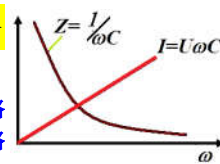


11

容抗与频率成反比: $Z_C = \frac{1}{\omega C}$

频率越高, 容抗越小;

特别地: $\omega \rightarrow 0, Z_C \rightarrow \infty$ 断路
 $\omega \rightarrow \infty, Z_C \rightarrow 0$ 短路

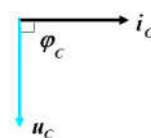


电容在交流电路中的特点:

- 通高频、阻低频
- 高频短路、直流开路

电压的位相落后于电流 $\pi/2$

这是由于电容充电时电荷要先积累(充电)、后释放(放电)的缘故

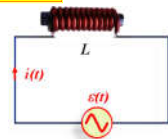


12

3. 交流电路中的电感元件

设电流为 $i(t) = I_m \cos \omega t$

电感上产生
自感电动势 $\varepsilon = -L \frac{di}{dt}$



将电感视为交流电源, 根据一段含源电路的欧姆定律, 当 $R=0$ 时, 电感两端的电压:

$$u(t) = -\varepsilon = L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin \omega t = \omega L I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{cases} U_m = \omega L I_m \\ \varphi_u = 0, \varphi_i = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} Z_L = \frac{U_m}{I_m} = \omega L \\ \varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

感抗
相位差

13

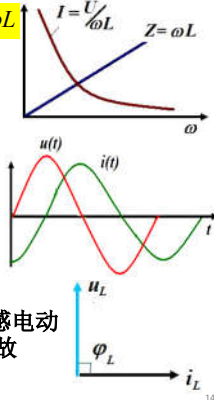
感抗与频率成正比: $Z_L = \omega L$
频率越高, 感抗越大

特别: $\omega \rightarrow 0, Z_L \rightarrow 0$ 短路
 $\omega \rightarrow \infty, Z_L \rightarrow \infty$ 断路

电感在交流电路中的特性:
通低频、阻高频

电压的位相超前于电流 $\pi/2$

这是由于电流要先产生自感电动势(充电)后释放(放电)的缘故



14

交流电路中纯元件的比较

元件	阻抗 $Z = \frac{U_m}{I_m}$	位相差 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$
电容C	容抗 $Z_C = \frac{1}{\omega C} \propto \frac{1}{f}$	$-\frac{\pi}{2}$
电阻R	电阻 $Z_R = R$	0
电感L	感抗 $Z_L = \omega L \propto f$	$\frac{\pi}{2}$

$$\omega = 2\pi f$$

4. 交流电路中的实际元件

实际每个元件均有三个成份, 即电阻、电感和电容。
一个线绕电阻, 各匝之间有一定的电容分布, 绕线又是一个电感。设 $L = 3mH, C = 2pF, R = 2\Omega$

$$Z_L = \omega L, Z_C = 1/\omega C, \omega = 2\pi f$$

$$f = 0, Z_L = 0, Z_C = \infty \quad \text{直流电}$$

$$f = 50 \text{ Hz}, Z_L = 0.942\Omega, Z_C = 1.59 \times 10^9 \Omega$$

相当于R和Z_L串联

$$f = 10^4 \text{ Hz}, Z_L = 188.4\Omega, Z_C = 7.9 \times 10^6 \Omega$$

$Z_L \gg R$, 相当于纯电感

$$f = 10^8 \text{ Hz}, Z_L = 1.88 \times 10^4 \Omega, Z_C = 7.9 \times 10^2 \Omega$$

$Z_L \gg Z_C$, 相当于纯电阻

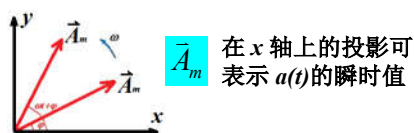


16

交流电的矢量图解法

可以用旋转的矢量来表示交流电

用 \vec{A}_m 表示 $a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$



矢量图解法的优点是直观, 但不便于分析复杂的交流电路。

17

三个元件的电压电流矢量图

A. 纯电阻元件

设 $i(t) = I_m \cos \omega t$

则 $u(t) = U_m \cos \omega t$ $U_m = I_m R$

若 $\varphi_i \neq 0$ 则

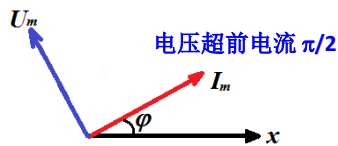
$\begin{cases} i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \\ u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_i) \end{cases}$

电压与电流同相位

18

B. 纯电感元件

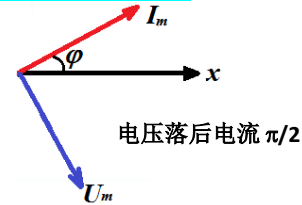
$$\begin{cases} i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \\ u(t) = U_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad U_m = \omega L I_m$$



19

C. 纯电容元件

$$\begin{cases} i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \\ u(t) = U_m \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad U_m = \frac{I_m}{\omega C}$$



20

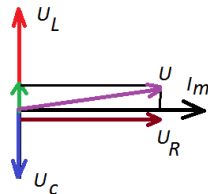
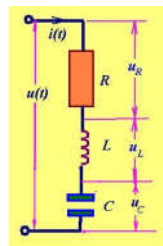
RCL串联

电容和电感的相位相差 π

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

$$= I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ \varphi = \text{tg}^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \end{cases}$$



21

若

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$$

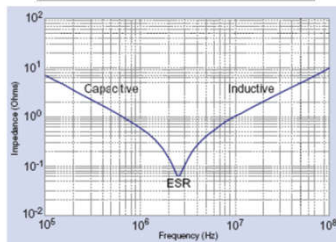
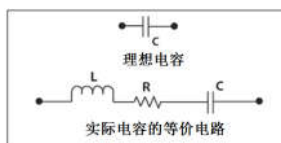
$$u(t) = U_m \cos \omega t = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos\left(\omega t - \text{tg}^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

若 $Z_C = Z_L$ 则 $\varphi = 0$ 电路出现**纯电阻性**
此时, Z 最小, 亦即 i_m 最大, 称为**共振**

$$Z_C = Z_L \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\text{共振的固有频率 } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

22



$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

共振频率

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

23

共振的特点

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \xrightarrow{\omega L = 1/\omega C} Z = R$$

- 阻抗最小, 电流最大;
- 共振时, 电感(或电容)两端的电压最大, 且等于电源电动势的 Q 倍;

$$U_{Lm} = Z_L I_m = \omega_0 L \frac{\varepsilon_m}{R} = \frac{1}{\sqrt{LC}} L \frac{\varepsilon_m}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \varepsilon_m$$

$$\text{令 } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad Q \text{ 为电路的品质因素}$$

$$\text{则 } U_{Lm} = Q \varepsilon_m \quad \text{同理 } U_{Cm} = Q \varepsilon_m \quad \text{电压放大}$$

24

- 共振时一个弱信号输入，在 L 和 C 两端得到一个放大的输出信号；

- 选择共振，改变 L 或 C ，改变 f ，选台。

Q -值的作用

- Q 值可表征电感和电容上的电压放大倍数；

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad U_{Lm} = U_{Cm} = Q \varepsilon_m$$

- Q 值还是电路中储存的能量和每个周期内消耗的能量之比的 2π 倍(下一页证明)；

$$Q = 2\pi \frac{W_S}{W_R}$$

25

【例41】 Q 值等于电路中储存的能量和每个周期内消耗的能量之比的 2π 倍

$$Q = 2\pi \frac{W_S}{W_R}$$

【证明】电路中通过电感和电容储存的能量为：

$$\begin{aligned} W_S &= \frac{1}{2} L I_m^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} C U_m^2 \sin^2 \omega t \\ &= \frac{1}{2} L I_m^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} C \frac{I_m^2}{\omega^2 C^2} \cos^2 \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} I_m^2 \left[L \cos^2 \omega t + \frac{1}{\omega^2 C} \sin^2 \omega t \right] \\ &= \frac{1}{2} I_m^2 \left[L \cos^2 \omega t + L \sin^2 \omega t \right] = \frac{1}{2} L I_m^2 = L I_e^2 \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$I_e = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m$$

$$I_e \text{ 电流有效值, } I_m \text{ 电流峰值} \quad W_S = \frac{1}{2} L I_m^2 = L I_e^2$$

26

一个周期电阻消耗的能量

$$W_R = I_e^2 R T \quad \text{其中} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}$$

$$\frac{W_S}{W_R} = \frac{L I_e^2}{I_e^2 R T} = \frac{L}{R T} = \frac{L}{R 2\pi \sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{Q}{2\pi}$$

或

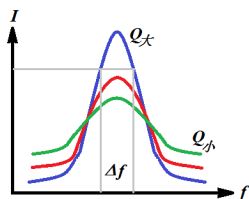
$$Q = 2\pi \frac{W_S}{W_R}$$

- Q 越大，选择性越好

可以证明：

Δf 通频带宽度

$$\Delta f = \frac{f}{Q}$$



27

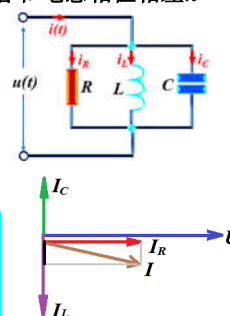
RCL并联

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t)$$

电容和电感相位相差 π

$$\begin{aligned} Z &= \frac{U}{I} = \frac{U}{\sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} \\ &= \frac{R \omega L}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2 (\omega^2 LC - 1)^2}} \end{aligned}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{\frac{1}{R}} = \tan^{-1} \frac{R(1 - \omega^2 LC)}{\omega L}$$



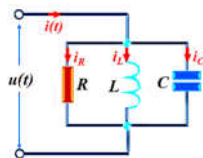
28

电流共振

$$\varphi = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

阻抗最大，且为纯电阻电路， $Z=R$ 。

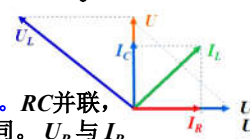
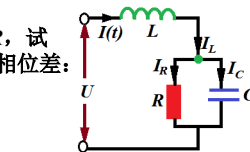


29

【例42】如图，已知 $Z_L = Z_C = R$ ，试用矢量图解法求下列各量的相位差：

- (1) U_C 与 I_R ；
- (2) I_C 与 I_R ；
- (3) U_L 与 U_R ；
- (4) U 与 I 。

【解】电阻和电容先并联，然后与电感串联



- (1) 以并联部分电压 U_C 为基。RC 并联， U_R 和 U_C 相等，位相相同。 U_R 与 I_R 的位相相同，则 U_C 与 I_R 的位相差为 0。
- (2) I_R 与 U_R 及 U_C 同位相； I_C 超前 U_C 相位 $\pi/2$ 。因此 I_C 与 I_R 的位相差为 $\pi/2$

30

对并联部分的电流 I_R 和 I_C 进行矢量求和

$$i(t) = i_L(t) = i_C(t) + i_R(t)$$

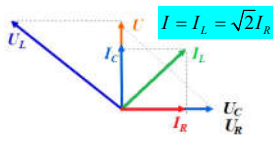
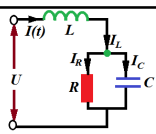
I_R 与 I_C 大小相等, 合成的 I_L 与 I_C 夹角为 $\pi/4$ 。 U_L 超前 I_L 位相 $\pi/2$, 则 U_L 与 I_C 夹角 $\pi/4$ 。

总电压 U 是 U_L 和 U_C 的矢量叠加, 方向在垂直方向

$$U_L = IZ_L = \sqrt{2}I_R R = \sqrt{2}U_R = \sqrt{2}U_C \quad U = \sqrt{U_L^2 + U_C^2} = U_C$$

则(3) U_L 与 U_R 的位相差为 $3\pi/4$ 。

(4) U 与 $I(=I_L)$ 的位相差为 $\pi/4$ 。



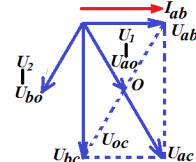
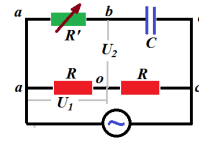
【例43】如图为相移电桥, 其中 ab 间的电阻 R' 可调, ao 和 oc 间的电阻 R 相等。用矢量图证明: 当 R' 的阻抗由 0 变到 ∞ 的过程中, ao 间的电压 U_1 和 bo 间的电压 U_2 总是相等的, 但它们的相位差由 0 变到 π 。

【解】设 ab 间的电流为 I_{ab} , 以它为基准(水平方向)作图

1. U_{ab} 与 I_{ab} 同相: 水平方向
2. U_{bc} 落后 I_{ab} 相位 $\pi/2$: 竖直向下

$$U_{ac} = U_{ab} + U_{bc}$$

矢量叠加
沿长方形对角线方向



3. 支路 aoc 上是两个相等的电阻

$$U_1 = U_{ao} = U_{oc} = U_{ac} / 2$$

4. 作一个回路 $U_{ab} + U_{bo} + U_{oa} = 0$

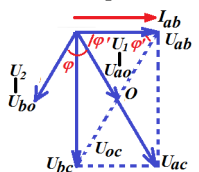
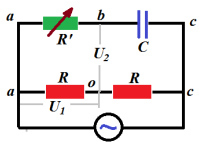
$$U_{bo} = -U_{oa} - U_{ab} = U_{ao} - U_{ab}$$

矢量叠加, 如图

大小上 $U_{bo} = U_{ao}$, 即 $U_2 = U_1$

$$\begin{aligned} 5. \quad \varphi &= \pi - 2\varphi' = \pi - 2\arctan \frac{U_{bc}}{U_{ab}} \\ &= \pi - 2\arctan \frac{Z_C}{R'} = \pi - 2\arctan \frac{1}{\omega CR'} \end{aligned}$$

可见: R' 从 0 变到 ∞ , U_1 和 U_2 的相位差由 0 变到 π



§ 7-2 交流电路的复数解法

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \rightarrow \tilde{U} = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} \quad \text{复电压}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \rightarrow \tilde{I} = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} \quad \text{复电流}$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t + \varphi_e) \rightarrow \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_m e^{j(\omega t + \varphi_e)} \quad \text{复电动势}$$

$$\frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \frac{U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z e^{j\varphi} = \tilde{Z} \quad \text{复阻抗}$$

复阻抗本身已经完全包含了电路两方面的基本性质:

$$\text{阻抗 } Z = \frac{U_m}{I_m} \quad \text{幅角 } \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

各种元件的复阻抗

1. 电阻: $Z_R = R, \varphi = 0 \quad \tilde{Z}_R = R$

2. 电容: $Z_C = \frac{1}{\omega C}, \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \tilde{Z}_C = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$

3. 电感: $Z_L = \omega L, \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \tilde{Z}_L = \omega L e^{j\pi/2} = j\omega L$
 $Z_M = \omega M, \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \tilde{Z}_M = \omega M e^{j\pi/2} = j\omega M$

交流电路的欧姆定律

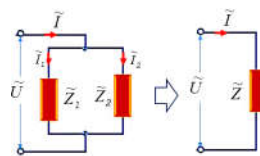
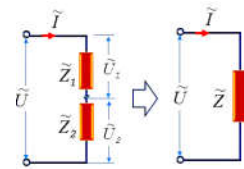
$$\frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \tilde{Z} \quad \text{或} \quad \tilde{U} = \tilde{I} \tilde{Z}$$

串联电路

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2$$

并联电路

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_1} + \frac{1}{\tilde{Z}_2}$$



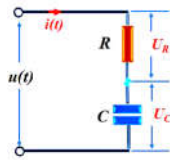
【例44】求解RC串联电路的阻抗。

【解】RC串联 $\tilde{Z}_R = R$ $\tilde{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C}$$

$$|Z| = |\tilde{Z}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$$

$$\varphi = \text{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{\omega CR}\right)$$



37

【例45】求RLC并联的复阻抗。

【解】 $\tilde{Z}_R = R$ $\tilde{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$ $\tilde{Z}_L = j\omega L$

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_1} + \frac{1}{\tilde{Z}_2} + \frac{1}{\tilde{Z}_3} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$$

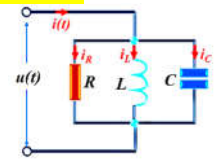
$$= \frac{j\omega L + R - \omega^2 RCL}{j\omega LR}$$

$$\tilde{Z} = \frac{j\omega LR}{(R - \omega^2 RCL) + j\omega L}$$

$$= \frac{\omega LR}{\omega L - j(R - \omega^2 RCL)}$$

$$\frac{1}{a - jb} = \frac{1}{a^2 + b^2}(a + jb), \text{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{(1 - \omega^2 LC)R}{\omega L}$$

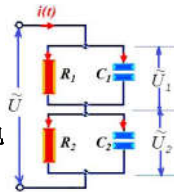


38

【例46】如图是为消除分布电容的影响而设计的一种脉冲分压器。当 C_1 、 C_2 、 R_1 、 R_2 满足一定条件时，此分压器就能和直流电路一样，使输入电压 U 与输出电压 U_2 之比等于电阻之比

$$\frac{\tilde{U}_2}{\tilde{U}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

而与频率无关。试求电阻和电容应满足的条件



39

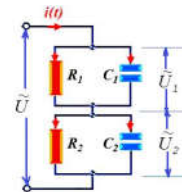
【解】设 Z_1 上的电压为 U_1 ，因串联电路的电压与阻抗成正比分配

$$\text{故 } \frac{\tilde{U}_1}{\tilde{U}_2} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_2}$$

而电路要求

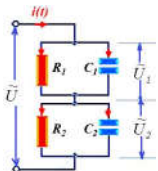
$$\frac{\tilde{U}_2}{\tilde{U}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\text{则 } \frac{\tilde{U}_1}{\tilde{U}_2} = \frac{R_1}{R_2}$$



40

再用复数法求复阻抗，RC并联 $\tilde{Z}_R = R$ $\tilde{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$



$$\tilde{Z}_1 = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1} \Rightarrow Z_1 = \frac{R_1}{\sqrt{1 + \omega^2 R_1^2 C_1^2}}$$

$$\tilde{Z}_2 = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2} \Rightarrow Z_2 = \frac{R_2}{\sqrt{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2}}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{\sqrt{1 + \omega^2 R_1^2 C_1^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2}}{R_2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

电阻和电容应满足的条件

$$R_1 C_1 = R_2 C_2$$

41

交流电路的基尔霍夫定律

在似稳条件($\omega \ll \omega_0$)下，在任一瞬间，对于交流电路有以下两条定律成立：

(1)对于任意节点，流入和流出节点的电流相等

$$\sum \tilde{I}_k = \sum \tilde{I}_{km} e^{j\omega t} = 0 \Rightarrow \sum \tilde{I}_{km} = 0$$

(2)环绕任一闭合回路各元件电压降之和，等于回路电动势之和

$$\sum \tilde{I}_n \tilde{Z}_n = \sum \tilde{\mathcal{E}}_k \quad \sum \tilde{I}_{nm} e^{j\omega t} \tilde{Z}_n = \sum \tilde{\mathcal{E}}_{km} e^{j\omega t}$$

形式与稳恒电路相同，复数运算代替实数运算

$$\sum \tilde{I}_{nm} \tilde{Z}_m = \sum \tilde{\mathcal{E}}_{km}$$

42

【例47】求电路中的电压之比 \tilde{U}'/\tilde{U}

【解】 $\tilde{U} = \tilde{I}_1 R + \tilde{I}_3 \tilde{Z}_C$

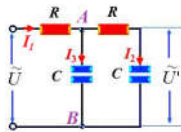
$\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3$ A点电流方程

$$\tilde{U} = (\tilde{I}_2 + \tilde{I}_3)R + \tilde{I}_3 \tilde{Z}_C$$

$$\tilde{U}_{AB} = \tilde{I}_2(R + \tilde{Z}_C) = \tilde{I}_3 \tilde{Z}_C$$

$$\tilde{I}_2 = \frac{\tilde{U}}{j\omega C} \frac{1}{R^2 - \frac{1}{(\omega C)^2} + \frac{3R}{j\omega C}}$$

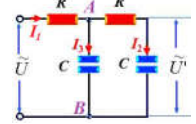
$$\tilde{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{Z}_C \\ R + \tilde{Z}_C & -\tilde{Z}_C \\ R & R + \tilde{Z}_C \end{bmatrix}$$



$$\tilde{U}' = \tilde{I}_2 \tilde{Z}_C = \frac{-\tilde{U}}{(\omega C)^2 \left[R^2 - \frac{1}{(\omega C)^2} - \frac{j3R}{\omega C} \right]}$$

$$\left| \frac{\tilde{U}'}{\tilde{U}} \right| = \left[\left[(\omega CR)^2 - 1 \right]^2 + (3\omega CR)^2 \right]^{-1/2}$$

$$\Delta\varphi = \tan^{-1} \frac{3\omega CR}{(\omega CR)^2 - 1}$$



【例48】求解RCL混联电路总阻抗.

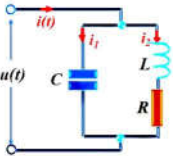
【解】等效阻抗为:

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_C} + \frac{1}{\tilde{Z}_R + \tilde{Z}_L} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$$

$$= j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right]$$

$$= A e^{j\varphi}$$



$$\frac{1}{\tilde{Z}} = A e^{j\varphi} \Rightarrow \tilde{Z} = \frac{1}{A} e^{-j\varphi}$$

$$A = \left\{ \left[\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} \right]^2 + \left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$\tan\varphi = \frac{\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}}{\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{\omega \left\{ C[R^2 + (\omega L)^2] - L \right\}}{R}$$

$$\therefore |\tilde{Z}| = Z_m = \frac{1}{A} \quad \text{当} \quad \omega C = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

即 $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}}$ 时 $\varphi = 0$

电路阻抗达到最大值, 实现并联共振。

并联共振的特点:

- (1) 回路总阻抗达到最大值;
- (2) 回路电流达到最小值;
- (3) 电路呈现纯电阻性;
- (4) 分支电流达到最大值, 为总电流的 Q 倍。

§ 7.3 交流电的功率

1. 瞬时功率

$$P(t) = i(t)u(t) \quad \begin{cases} u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \\ i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \end{cases}$$

$$P(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos\varphi] \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

2. 平均功率

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \quad \text{有实际意义的是平均功率}$$

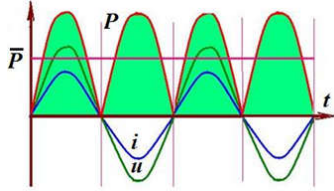
$$\bar{P} = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi = U_e I_e \cos\varphi \quad \text{有效值}$$

$$\begin{cases} I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \\ U_e = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

🌟 纯电阻 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$

瞬时功率 $P(t) = \frac{I_m U_m}{2} (1 + \cos 2\omega t)$

平均功率 $\bar{P}_R = \frac{I_m U_m}{2} \cos 0 = \frac{I_m U_m}{2} = I_e^2 R$



49

🌟 纯电感 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$

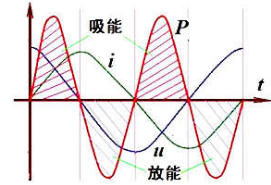
瞬时功率

$$P_L(t) = \frac{I_m U_m}{2} \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_e U_e \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

平均功率

$$\bar{P}_L = \frac{I_m U_m}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

电感的平均功率为零，一个周期内吸收功率等于放功率



50

🌟 纯电容 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$

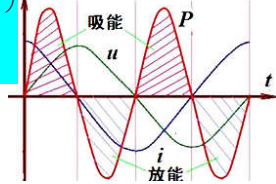
瞬时功率

$$P_C(t) = \frac{I_m U_m}{2} \cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_e U_e \cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

平均功率

$$\bar{P}_C = \frac{I_m U_m}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

电容的平均功率也为零



51

3. 功率因数

$$\bar{P} = U_e I_e \cos \varphi \quad \cos \varphi \text{ 称功率因数}$$

视在功率 $P = U_e I_e$

有功功率 $P_{\text{有功}} = P_{//} = P \cos \varphi$ 电器使用和消耗

无功功率 $P_{\text{无功}} = P_{\perp} = P \sin \varphi$ 在输电线路中来回循环

52

4. 有功电阻和无功电抗

交流电路的阻抗可写为 $\tilde{Z} = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi = r + jx$

有功电阻 $r = Z \cos \varphi$ 无功电抗 $x = Z \sin \varphi$

则 视在功率 \leftrightarrow 总阻抗 $P = UI = I^2 Z$

有功功率 \leftrightarrow 有功电阻 $P_{\text{有功}} = UI \cos \varphi = I^2 r$

无功功率 \leftrightarrow 无功电抗 $P_{\text{无功}} = UI \sin \varphi = I^2 x$

一般而言：

电抗 $x < 0$ 称容抗，电路为电容性电路；
电抗 $x > 0$ 称感抗，电路为电感性电路

53

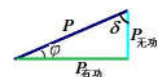
品质因数

🌟 品质因数 $Q = \frac{P_{\text{无功}}}{P_{\text{有功}}} = \frac{x}{r}$

显然， Q 值越高表示 $P_{\text{有功}}$ 越小，即各种损耗越小——能量会在线路里长时间循环。

🌟 损耗角 δ 和耗散因数 $\text{tg} \delta$

耗散因数 $\text{tg} \delta = \frac{P_{\text{有功}}}{P_{\text{无功}}} = \frac{r}{x} = \frac{1}{Q}$



其中损耗角 δ 是电压和电流之间相位差的余角

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

54

品质因素 Q 值的意义

(1) 储能 W_S 与耗能 W_R $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 2\pi \frac{W_S}{W_R}$

谐振时，电路会稳定地储存电磁能，不再与外界交换无功功率，只消耗有功功率。

(2) 电压或电流的放大倍数

RLC 串联 $U_{Lm} = U_{Cm} = Q\varepsilon_m$

LR 串联后与 C 并联 $I_{Lm} = I_{Cm} = QI_m$

共振时

(3) 频率的选择性 $\Delta f = f_0 / Q$

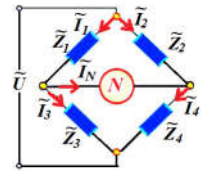
谐振电路的通频带宽度 Δf 反比于 Q 值， Q 值越大，即损耗越小，谐振电路的频率选择性越强。

55

交流电桥

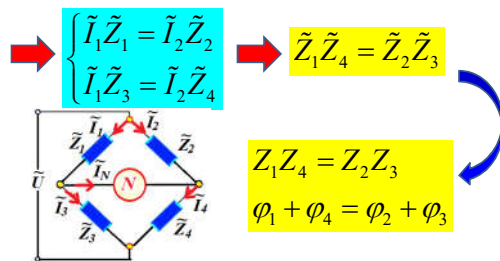
平衡条件为： $I_N = 0$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \tilde{I}_3 & \tilde{I}_2 &= \tilde{I}_4 \\ \tilde{U}_1 &= \tilde{U}_2 & \tilde{U}_3 &= \tilde{U}_4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= \tilde{I}_1 \tilde{Z}_1 & \tilde{U}_3 &= \tilde{I}_3 \tilde{Z}_3 = \tilde{I}_1 \tilde{Z}_3 \\ \tilde{U}_2 &= \tilde{I}_2 \tilde{Z}_2 & \tilde{U}_4 &= \tilde{I}_4 \tilde{Z}_4 = \tilde{I}_2 \tilde{Z}_4 \end{aligned}$$

56



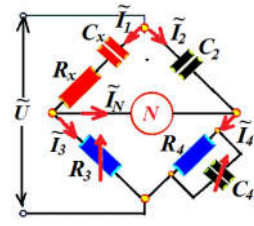
- 当 Z_2 和 Z_4 为纯电阻时，则 Z_1 和 Z_3 必须同为电感性或电容性，确保相位相同。
- 当 Z_2 和 Z_3 为纯电阻时，则 Z_1 和 Z_4 必须一个为电感性，而另一个为电容性。

57

1. 电容桥

电容桥主要用来测量电容或电容的损耗

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_1 &= R_x + \frac{1}{j\omega C_x}, \quad \tilde{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C_2} \\ \tilde{Z}_3 &= R_3, \quad \tilde{Z}_4 = \frac{1}{1/R_4 + j\omega C_4} \end{aligned}$$



第一臂是被测对象(电容和电阻)，代入电桥平衡公式：

$$\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_4 = \tilde{Z}_2 \tilde{Z}_3 \quad \tilde{Z}_1 = \frac{\tilde{Z}_2 \tilde{Z}_3}{\tilde{Z}_4}$$

58

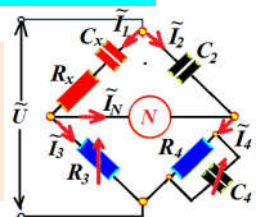
$$R_x + \frac{1}{j\omega C_x} = \frac{R_3}{j\omega C_2} \left(\frac{1}{R_4 + j\omega C_4} \right)$$

$$R_x - \frac{j}{\omega C_x} = \frac{R_3 C_4}{C_2} - j \frac{R_3}{\omega C_2 R_4}$$

虚部、实部各自相等

同时得到两个待测量

$$\begin{cases} R_x = \frac{C_4}{C_2} R_3 \\ C_x = \frac{R_4}{R_3} C_2 \end{cases}$$



59

2. 电感桥

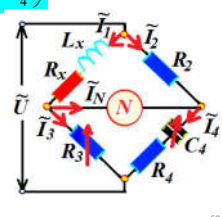
用来测量电感及其损耗的电桥，称电感桥
电桥平衡时，有

$$R_2 R_3 = (R_x + j\omega L_x) \left(R_4 + \frac{1}{j\omega C_4} \right)$$

可得

$$R_x = \frac{R_2 R_3 R_4 (\omega C_4)^2}{1 + (\omega R_4 C_4)^2}$$

$$L_x = \frac{R_2 R_3 C_4}{1 + (\omega R_4 C_4)^2}$$



60

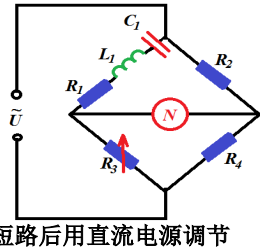
3. 频率电桥

第一臂是串联谐振，调到谐振状态，则呈电阻性，即四臂都呈电阻性。

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = 0$$

最后确定交流电的频率



可将 C_1 短路后用直流电源调节

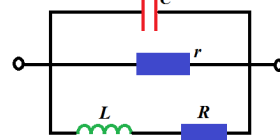
可通过调节 C_1 或 L_1 来达到

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

61

电路分析举例

【例49】求如图所示电路的谐振频率。



【解】先求该电路的总阻抗 Z

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{r} + j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$$

62

$$\text{其中: } j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}{R + j\omega L}$$

$$= \frac{R + j\omega [C(R^2 + \omega^2 L^2) - L]}{R^2 + \omega^2 L}$$

只要这个式子中的虚部为零，则总阻抗的虚部亦为零

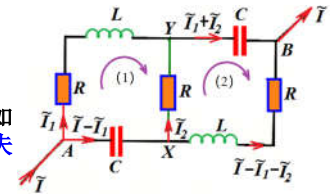
$$C(R^2 + \omega^2 L^2) - L = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \quad \text{所求的谐振频率}$$

63

【例50】由所示的交流网络， A 和 B 之间加上电压 $U = U_0 \cos(\omega t + \phi_0)$ ，且 $\omega L = 1/\omega C = R$ ，已知 U_0 和 R ，求 AB 之间的总阻抗和流过中间电阻的电流有效值。

【解】设电流方向如图所示，由基尔霍夫定律，有



$$\text{回路1} \quad \tilde{I}_1(\tilde{Z}_R + \tilde{Z}_L) - \tilde{I}_2 \tilde{Z}_R - (\tilde{I} - \tilde{I}_1) \tilde{Z}_C = 0$$

$$\text{回路2} \quad \tilde{I}_2 \tilde{Z}_R + (\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2) \tilde{Z}_C - (\tilde{I} - \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2)(\tilde{Z}_L + \tilde{Z}_R) = 0$$

64

$$\because \omega L = \frac{1}{\omega C} = R$$

$$\therefore \begin{cases} \tilde{Z}_R = R \\ \tilde{Z}_L = j\omega L = jR \\ \tilde{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -jR \end{cases}$$

$$\text{故 } \tilde{I}_1(1+j)R - \tilde{I}_2 R - (\tilde{I} - \tilde{I}_1)(-jR) = 0$$

$$\tilde{I}_2 R + (\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2)(-jR) - (\tilde{I} - \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2)(1+j)R = 0$$

65

$$\text{即 } \begin{cases} \tilde{I}_2 = \tilde{I}_1 + j\tilde{I} \\ 2\tilde{I}_2 = \tilde{I}(1+j) - \tilde{I}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{I}_1 = \frac{1}{3}(1-j)\tilde{I} \\ \tilde{I}_2 = \frac{1}{3}(1+2j)\tilde{I} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{AB} &= I \tilde{Z}_{AB} \\ &= \tilde{I}_1(\tilde{Z}_R + \tilde{Z}_L) + (\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2) \tilde{Z}_C \\ &= \tilde{I}_1(1+j)R + (\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2)(-jR) \\ &= \tilde{I}_1 R - \tilde{I}_2 jR \\ &= \frac{1}{3}(1-j)\tilde{I}R - \frac{1}{3}(1+2j)\tilde{I}jR \\ &= \frac{1}{3}(3-2j)R\tilde{I} \end{aligned}$$

$$\tilde{Z}_{AB} = \frac{1}{3}(3-2j)R$$

66

总电流 $\tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{Z}_{AB}} = \frac{U_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)}}{(3-2j)R/3} = \frac{3U_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)}}{(3-2j)R}$

通过中间电阻的电流：
$$\begin{aligned}\tilde{I}_2 &= \frac{1}{3}(1+2j)\tilde{I} \\ &= \frac{1}{3}(1+2j) \frac{3U_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)}}{(3-2j)R} \\ &= \frac{(-1+8j)U_0}{13R} e^{j(\omega t + \varphi_0)} \\ &= \left(\frac{\sqrt{65}}{13} e^{j\varphi_2} \right) \frac{U_0}{R} e^{j(\omega t + \varphi_0)}\end{aligned}$$

电流有效值为：

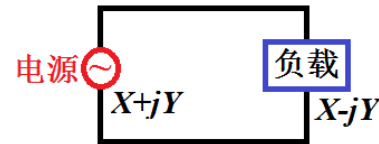
$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{65}}{13} \frac{U_0}{R} = \sqrt{\frac{5}{26}} \frac{U_0}{R} = 0.44 \frac{U_0}{R}$$

67

【例51】对于一个给定的交流电源来说，它的电动势和内阻都是一定的，设它的内阻为：

$$\tilde{Z}_i = X + jY$$

试证明：当负载的阻抗 $\tilde{Z} = \tilde{Z}_i^*$ (共轭复数) 时，电源送到负载上的功率为最大。



68

【解】设电源的电动势为 ε ，负载电阻为：

$$\tilde{Z} = a + jb$$

则电路总电阻为 $(X+a)+j(Y+b)$

负载消耗的功率为：

$$P = IU \cos \varphi = I^2 a = \frac{\varepsilon^2}{(X+a)^2 + (Y+b)^2} a$$

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{\varepsilon^2 [X^2 - a^2 + (Y+b)^2]}{[(X+a)^2 + (Y+b)^2]^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial b} = -\frac{2\varepsilon^2 a(Y+b)}{[(X+a)^2 + (Y+b)^2]^2}$$

69

$$\frac{\partial^2 P}{\partial a^2} = -\frac{2\varepsilon^2 [(X+a)^2(2X-a) + (Y+b)^2(2X+3a)]}{[(X+a)^2 + (Y+b)^2]^3}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial b^2} = -\frac{2\varepsilon a [3(Y+b)^2 - (X+a)^2]}{[(X+a)^2 + (Y+b)^2]^3}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial a \partial b} = -\frac{2\varepsilon^2 (Y+b) [(X+a)(3a-X) - (Y+b)^2]}{[(X+a)^2 + (Y+b)^2]^3}$$

70

由：
$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial b} = 0 \end{cases}$$
 确定 P 的极值
$$\begin{cases} a = X \\ b = -Y \end{cases}$$

代入二阶导数，由两阶导数判断极值的性质：

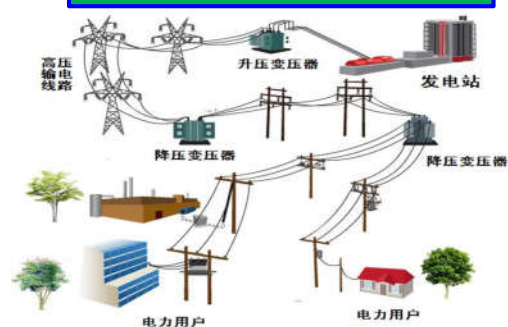
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial a^2} = -\frac{\varepsilon^2}{8X^3} < 0 \\ \frac{\partial^2 P}{\partial b^2} = -\frac{\varepsilon^2}{8X^3} < 0 \\ \frac{\partial^2 P}{\partial a \partial b} = 0 \end{cases}$$

故知这时 P 是极大值。
其值为：
$$P_{\max} = \frac{\varepsilon^2}{4X}$$

负载的阻抗等于电源的阻抗的共轭复数时，称为匹配，此时电源送到负载上的功率为最大。

71

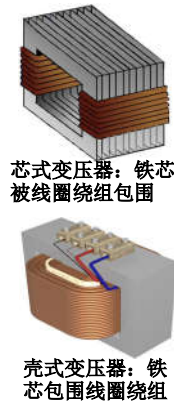
§ 7.4 变压器与电力输送



72

§ 7.4.1 变压器原理

- 变压器是利用**电磁感应原理**传输电能或电信号的器件。
- 它由绕在同一**铁芯**上的两个线圈构成，与电源相连的线圈为**初级线圈**，与负载相连的线圈为**次级线圈**。
- 能量依靠铁芯中的**互感磁能**来传递。



73

变压器的基本特性

(a) 变压器空载运行

初级线圈的空载电流 i_{l0} 就是励磁电流，磁通量 Φ 既穿过初级线圈，也穿过次级线圈

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -N_1 \frac{d\Phi}{dt} & \varepsilon_{e1} &= \frac{\varepsilon_{m1}}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi f N_1 \Phi_m}{\sqrt{2}} = 4.44 f N_1 \Phi_m \\ \varepsilon_2 &= -N_2 \frac{d\Phi}{dt} & \varepsilon_{e2} &= 4.44 f N_2 \Phi_m \end{aligned} \quad \text{有效值}$$

$$\frac{U_1}{U_{20}} \approx \frac{\varepsilon_{e1}}{\varepsilon_{e2}} = \frac{N_1}{N_2} = K$$

变压器空载运行时，初、次级线圈上电压的比值等于两者的匝数之比

$$U_{20} = \frac{1}{K} U_1$$

K 称为变压器的变比

74

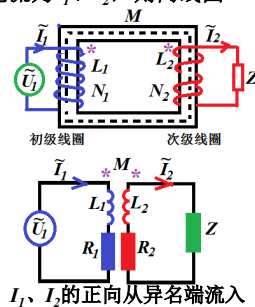
(b) 变压器负载运行

设匝数分别为 N_1 、 N_2 ，自感分别为 L_1 、 L_2 ，互感为 M ，两线圈的内阻为 R_1 、 R_2 ，电流为 I_1 、 I_2 ，则两线圈回路的电路方程为：

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= \tilde{I}_1 \tilde{Z}_1 - \tilde{I}_2 \tilde{Z}_M \\ -\tilde{I}_1 \tilde{Z}_M + \tilde{I}_2 \tilde{Z}_2 &= 0 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_1 &= R_1 + j\omega L_1 \\ \tilde{Z}_2 &= R_2 + j\omega L_2 + \tilde{Z} \\ \tilde{Z}_M &= j\omega M \end{aligned}$$



75

解得：

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \frac{\tilde{U}_1 \tilde{Z}_2}{\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2 - \tilde{Z}_M^2} \\ \tilde{I}_2 &= \frac{\tilde{U}_1 \tilde{Z}_M}{\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2 - \tilde{Z}_M^2} \end{aligned}$$

$$\tilde{U}_2 = \tilde{I}_2 \tilde{Z} \quad \text{电压比}$$

$$\begin{aligned} \text{电流比} \quad \frac{\tilde{I}_2}{\tilde{I}_1} &= \frac{\tilde{Z}_M}{\tilde{Z}_2} \\ \text{电压比} \quad \frac{\tilde{U}_2}{\tilde{U}_1} &= \frac{\tilde{Z} \tilde{Z}_M}{\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2 - \tilde{Z}_M^2} \end{aligned}$$

76

理想变压器

(1) 无磁漏

$$M^2 = L_1 L_2, \frac{L_1}{L_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

(2) 线圈无铜损，即

$$R_1 = R_2 = 0$$

(3) 无铁损 (忽略铁芯中的磁滞损耗和涡流损耗)

(4) 线圈的感抗远大于电源内阻和负载阻抗，即

$$Z_1, Z_2, Z_M \gg Z$$

77

在上述假定(理想变压器)下，电流比和电压比为

$$\frac{\tilde{I}_2}{\tilde{I}_1} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} \quad \frac{\tilde{U}_2}{\tilde{U}_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

变压器初、次级线圈上电压的比值等于两者匝数之比。

改变变压器的匝数，就能够将某一数值的交流电压变为同频率的另一数值的交流电压。

$N_1 < N_2$ 时称为升压变压器， $N_1 > N_2$ 时称为降压变压器。

78

从输入端看去，变压器初级线圈的等效阻抗为

$$\tilde{Z}_1 = \frac{\tilde{U}_1}{\tilde{I}_1} = \frac{\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2 - \tilde{Z}_M^2}{\tilde{Z}_2} \xrightarrow{\text{理想变压器下}} \tilde{Z}_1 = \frac{N_1^2}{N_2^2} \tilde{Z}$$

\tilde{Z}_1 又称为**反射阻抗**，它是负载阻抗的 $(N_1/N_2)^2$ 倍。

说明变压器不仅起着**变压、变流**的作用，还有**变换阻抗**的作用。

但就功率而言 $\frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2 I_2}{U_1 I_1} = 1$

对理想变压器而言，初级回路没有功率损耗， P_1 通过电磁感应完全耦合到次级回路中，并消耗在负载上。

79

变压器的损耗

实际的变压器存在损耗，变压器的损耗等于输入功率和输出功率之差

$$\Delta P = P_1 - P_2 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 - U_2 I_2 \cos \varphi_2$$

变压器功率损耗主要有**铜损**和**铁损**两种

1. 铜损(ΔP_{Cu}) 线圈电阻 R 上的功率损耗称铜损

$$\Delta P_{Cu} = I_e^2 R \quad R \text{ 是线圈的电阻; } I_e \text{ 是线圈中电流的有效值}$$

2. 铁损(ΔP_{Fe}) 处于交变磁通下的**铁芯内的功率损耗**，用 ΔP_{Fe} 表示。**铁损由磁滞和涡流产生。**

80

(a) 磁滞损耗(ΔP_h)

由磁滞所产生的能量损耗，称为磁滞损耗。

磁滞损耗的大小：单位体积内的磁滞损耗正比与磁滞回线的**面积**和磁场交变的频率 f 。

磁滞损耗转化为热能，引起铁芯发热。

减少磁滞损耗的措施：

选用磁滞回线狭小的磁性材料制作铁芯。变压器和电机中使用的硅钢等材料的磁滞损耗较低。

设计时应当选择值以减小铁芯饱和程度



81

(b) 涡流损耗(ΔP_e)

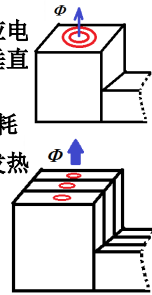
涡流：交变磁通在铁芯内产生感应电动势和电流，称为涡流。涡流在垂直于磁通的平面内环流。

涡流损耗：由涡流所产生的功率损耗

涡流损耗转化为热能，引起铁芯发热

减少涡流损耗措施

提高铁芯的电阻率。铁芯用彼此绝缘的钢片叠成，把涡流限制在较小的截面内。



82

变压器的效率：输出功率与输入功率的百分比

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \times 100\% = \frac{P_2}{P_2 + \Delta P_{Cu} + \Delta P_{Fe}} \times 100\%$$

大容量变压器的效率可达98%-99%，小型电源变压器效率一般为70%-80%

83

