

### 上节课主要内容

**安培定律：** 电流元  $I_1 d\vec{l}_1$  对电流元  $I_2 d\vec{l}_2$  的作用力

$$d\vec{F}_{21} = k \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{e}_{r_{21}})}{r_{21}^2}$$

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$$

$$d\vec{F}_{21} = k \frac{i_2 d\vec{S}_2 \times (i_1 d\vec{S}_1 \times \vec{e}_r)}{r_{21}^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$$

面电流元之间

$$d\vec{F}_{21} = k \frac{\vec{j}_2 dV_2 \times (\vec{j}_1 dV_1 \times \vec{e}_r)}{r_{21}^2}$$

体电流元之间

**毕奥—萨伐尔定律：** 电流元  $I d\vec{l}$  在空间产生的磁感应强度  $d\vec{B}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{I d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

磁场的叠加原理

无限长直导线

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$B = \mu_0 n I$$

无限长载流螺线管内

电流元  $I_0 d\vec{l}_0$  在  $d\vec{B}$  的磁场中受到的力

$$d\vec{F} = I_0 d\vec{l}_0 \times d\vec{B}$$

**【例4】** 求下图所示的电流在O点的磁感应强度  $B$ 。

**【解】** 利用磁场的叠加原理

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{I d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

(水平部分贡献为0)

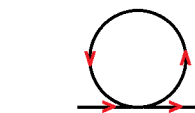
$$B = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

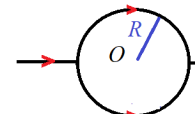
(竖直部分贡献为0)

$$B = \frac{\mu_0 I}{8} \left( \frac{3}{r} + \frac{1}{R} \right)$$

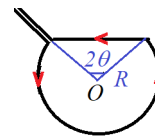
(水平、竖直部分贡献皆为0)



$$B = \frac{(1+\pi) \mu_0 I}{2\pi R}$$



$$B = 0$$



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\pi - \theta + \tan \theta)$$

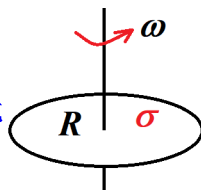
**【例5】** 一平面塑料圆盘，半径为  $R$ ，表面均匀带电，电荷面密度为  $\sigma$ 。圆盘绕其轴线以角速度  $\omega$  转动，求 (1) 在轴线上产生的磁场；(2) 圆盘的磁矩。

**【解】**

带电圆盘绕轴运动

形成一圈圈闭合环形电流

磁场



取半径为  $r$ ，宽为  $dr$  的圆环，它以角速度  $\omega$  转动时的环电流为

$$dI = \frac{dQ}{T} = \frac{\sigma(2\pi r dr)}{2\pi / \omega} = \sigma \omega r dr$$

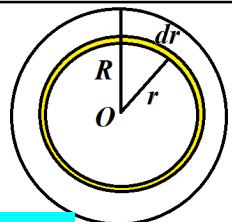
该环电流在轴线上的磁场(见例2)为

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{r^2 dI}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{r^3 \sigma \omega}{(r^2 + x^2)^{3/2}} dr$$

$x$  为离圆盘中心O的距离

$$B = \int dB = \int_0^R \frac{\mu_0}{2} \frac{r^3 \sigma \omega}{(r^2 + x^2)^{3/2}} dr = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[ \frac{R^2 + 2x^2}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 2x \right]$$

圆盘中心( $x=0$ )处磁场最大  $B_{\max}(x=0) = \mu_0 \sigma \omega R / 2$



(2) 磁矩

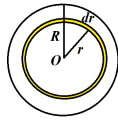
$$\vec{m} = I\vec{S}$$

半径为  $r$ , 宽为  $dr$  的圆环的磁矩为:

$$dI = \sigma \omega r dr$$

$$dm = dI \cdot S = \sigma \omega r dr \cdot \pi r^2 = \pi \sigma \omega r^3 dr$$

$$m = \int dm = \int_0^R \pi \sigma \omega r^3 dr = \frac{\pi \sigma \omega}{4} R^4$$



7

## 4.2.2 通电导线在磁场所受的力与力矩

### 1. 均匀磁场中的力与力矩

电流元  $I d\vec{l}$  在外磁场  $\vec{B}$  中的受到的安培力为:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

根据力的叠加原理, 一个闭合载流线圈在**均匀磁场**(常矢量)中的受力为**0**:

$$\vec{F} = \oint_L (I d\vec{l} \times \vec{B}) = \left( \oint_L I d\vec{l} \right) \times \vec{B} = I \left( \oint_L d\vec{l} \right) \times \vec{B} = 0$$

8

通电导线在外磁场中的力矩为:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \int_L \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B})$$

$$\vec{r} + d\vec{l} = \vec{r} + d\vec{r} \Rightarrow d\vec{l} = d\vec{r}$$

闭合载流线圈在**均匀外磁场**中的力矩为:

$$\vec{M} = \oint_L \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B}) = I \oint_L \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B})$$

利用矢量叉乘关系  $\vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r}) \times \vec{B} + \frac{1}{2}d[\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B})] - \vec{B}(\vec{r} \cdot d\vec{r})$ 

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_L \vec{r} \times d\vec{r} \quad \vec{m} = I\vec{S} \quad \oint_L \frac{1}{2} d[\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B})] = 0 \quad \oint_L \vec{B}(\vec{r} \cdot d\vec{r}) = 0$$

可得:

$$\vec{M} = I \left( \frac{1}{2} \oint_L \vec{r} \times d\vec{r} \right) \times \vec{B} = I\vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

9

### 2. 非均匀磁场中的力和力矩

若外磁场是**非均匀磁场**, 闭合载流线圈的受力**不再为零**, 其受力为:

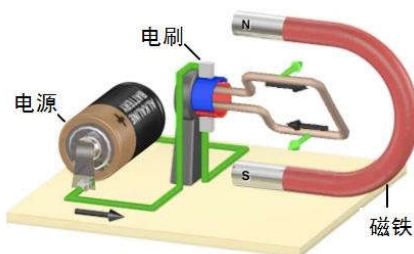
$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B}$$

该力也称为**梯度力**。若**线圈尺寸不大**, 在线圈的范围内**磁场变化不太大**, 则力矩仍为:

$$\vec{M} = \left( \frac{I}{2} \oint_L \vec{r} \times d\vec{r} \right) \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

精确的计算需要再加上梯度力的力矩

10



$$\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B} \quad \vec{m} = I\vec{S}$$

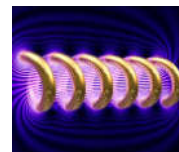
直流电动机就是利用**通电线圈在磁场中受到的力矩而发生转动**的原理来实现的

11

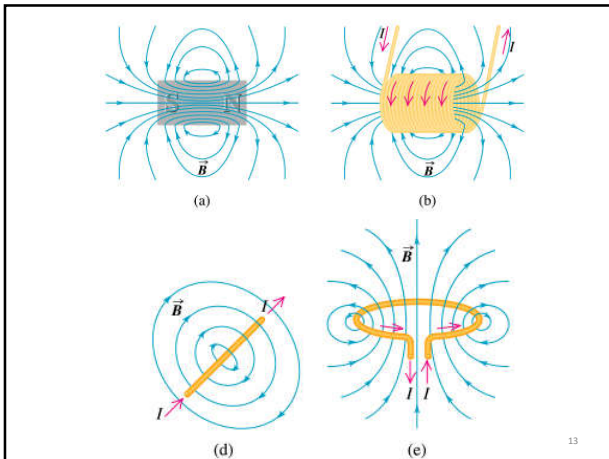
## § 4-3 静磁场的基本定理

### 4.3.1 磁感应线与磁通量

#### 1. 磁感应线

定义: 磁感应线即磁场空间中一些有方向的曲线, 其上**每点的切线方向与该点的磁感应强度(B)方向一致**。

12



## 2. 磁通量

电场强度通量(电通量)  $\Delta\Phi_E = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}$

磁感应强度通量(磁通量): 垂直通过面元 $\Delta S$ 的磁感应线的根数。

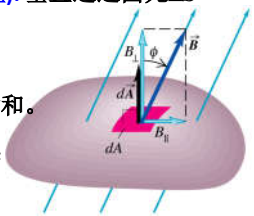
$$\Delta\Phi_B = \vec{B} \cdot \Delta\vec{S}$$

磁通量是标量, 可求代数和。

通过某曲面 $S$ 的磁通量:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

磁通量的单位为韦伯(Wb),  $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$



## 4.3.2 磁场高斯定理

磁场的高斯定理: 通过任意闭合曲面 $S$ 的磁通量等于零。

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

物理意义: 反映了磁场的“无源性”

这是由于迄今未发现孤立磁荷, 或自然界未发现磁单极子或磁荷。

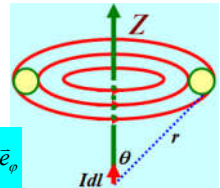
电场的高斯定理  $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$  电场是有源场 电荷是电场的源

## 高斯定理的证明

任意一磁场 $B$ 都是由许多电流元 $Idl$ 产生的磁场 $dB$ 叠加而成, 其磁通量也满足叠加原理, 所以只需证明电流元 $Idl$ 产生的磁场 $dB$ 遵守高斯定理。

取电流元 $Idl$ 为坐标原点,  $Z$ 轴沿电流元的方向, 空间任一点 $(r, \theta)$ 的磁场 $dB$ 为:

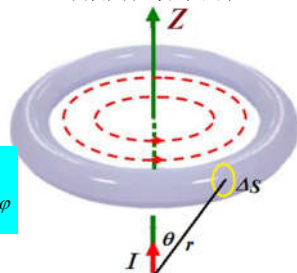
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Id\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2} \vec{e}_\phi$$



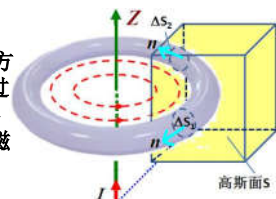
此式表明, 以 $Z$ 为轴的圆上,  $d\vec{B}$ 的大小相同, 方向与圆相切。

圆形的磁感应线构成了一个个闭合的磁感应线管。于是, 穿过以 $Z$ 为轴的、任一环形磁感应线管内、任意截面的磁通量为常量, 与截面在管中的位置以及取向无关。

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2} \vec{e}_\phi$$



对于任一封闭曲面(如立方体) $S$ , 上述环形管每穿过 $S$ 一次, 均会在 $S$ 上切出两个面元 $\Delta S_1$ 、 $\Delta S_2$ , 其磁通量



$$\vec{B}_1 \cdot \Delta\vec{S}_1 + \vec{B}_2 \cdot \Delta\vec{S}_2 = -B\Delta S + B\Delta S = 0$$

对曲面 $S$ 上的任一面元, 都可作一个环形管, 且可找到 $S$ 上的另一个面元与之对应。

同理, 这两个面元的磁通量之和为零。

故, 穿过 $S$ 的总磁通为0:  $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

证毕。

讨论:

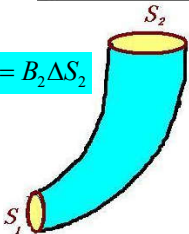
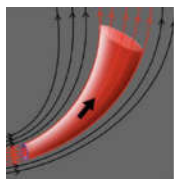
(1) 对任意的载流回路, **磁力线**管的截面一般是不均匀的。

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2 \Rightarrow B_1 \Delta S_1 = B_2 \Delta S_2$$

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}$$

截面大的地方, 磁感应强度小, 截面小的地方, 磁感应强度大



19

(2) 磁场的高斯定理对线电流、面电流和体电流产生的磁场均成立(因为磁场服从叠加原理)。

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S \left( \sum_i \vec{B}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_i \oint_S (\vec{B}_i \cdot d\vec{S}) = 0$$

(3) 高斯定理表明: 磁场是无源场, 或自然界不存在磁荷。

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

磁场处处无源

高斯定理的微分形式

20

### 磁场高斯定理微分形式的证明

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{Id\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \nabla \cdot \left( \frac{d\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3} \right)$$

$$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b}) \quad \vec{a} = d\vec{l}', \quad \vec{b} = \vec{R}$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{d\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3} \right) = \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot (\nabla \times d\vec{l}') - d\vec{l}' \cdot \left[ \nabla \times \left( \frac{\vec{R}}{R^3} \right) \right]$$

$\nabla$  仅对不带撇的量作用  $\nabla \times d\vec{l}' = 0$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \left( \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_R & R\vec{e}_\theta & R \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{R^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

### 4.3.3 安培环路定理

安培环路定理: 沿任何闭合曲线  $L$ , 磁感应强度的环流等于穿过  $L$  的电流强度的代数和的  $\mu_0$  倍。

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \pm \mu_0 \sum_i I_i$$



物理意义: 反映了磁场的“有旋性”。

$I$  的正负: 根据回路  $L$  的绕行方向按右手定则规定。即在设定了  $L$  绕行方向后, 采用右手定则, 四指沿  $L$  方向, 则电流方向与大拇指一致时取正, 反之取负。

22

### 安培环路定理的证明

【证明】任何磁场都是由一些稳恒闭合线电流产生的, 只要证明对其中任一稳恒线闭合电流  $I$  和任一闭合回路  $L$  满足

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} 0, & (I \text{ 不穿过 } L) \\ \mu_0 I, & (I \text{ 正向穿过 } L) \end{cases}$$

则按照叠加原理, 安培环路定理便成立。

23

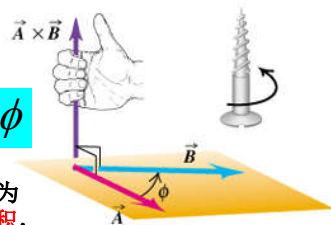
### 1. 矢量及立体角

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$C = AB \sin \phi$$

$C$  在数值上等于以  $A$  和  $B$  为邻边的平行四边形面积, 故可改写为:

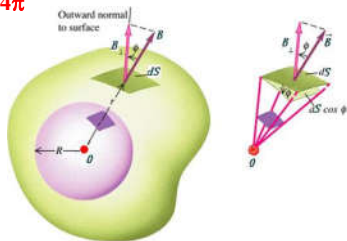
$$\vec{S} = \vec{A} \times \vec{B}$$



24

立体角:  $d\Omega = \frac{dS_0}{r^2} = \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}}{r^2}$

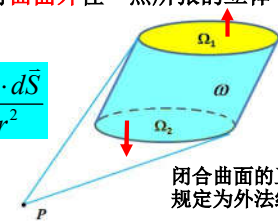
封闭曲面: 对曲面内任一点所张的立体角为  $4\pi$



25

封闭曲面: 对曲面外任一点所张的立体角为 0。

$$d\Omega = \frac{dS_0}{r^2} = \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}}{r^2}$$



闭合曲面的正方向被规定为外法线方向

考虑到立体角的正负, 有

$$\Omega_1 - \Omega_2 + \omega = 0$$

或

$$\omega = \Omega_2 - \Omega_1 = \Delta\Omega$$

26

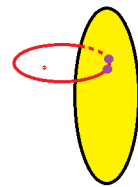
2. 当 P 点从曲面 S 的正面绕到反面时, 立体角的变化。

P 点无限接近正面时, 所张的立体角为  $-2\pi$ ;

当 P' 点从反面无限接近时, 所张的立体角为  $2\pi$

故当 P 点从正面绕 L 一周变到反面 P' 点时, 立体角变化为:

$$\Omega_2 - \Omega_1 = 2\pi - (-2\pi) = 4\pi$$



27

3. 证明安培环路定理

L 为积分环路, dl 为积分元, P 为场点

L' 为电流环路, Idl' 为电流元, P' 为源点

r 为源点 P' 到场点 P 的矢量, r' 为场点到源点的矢量

$$\vec{r} = -\vec{r}'$$

28

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L'} \frac{Id\vec{l}' \times \vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{l} \\ \vec{a} &= Id\vec{l}', \quad \vec{b} = \vec{r}, \quad \vec{c} = d\vec{l} \\ \therefore (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \\ \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L'} \frac{(d\vec{l} \times d\vec{l}') \cdot \vec{r}}{r^3} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L'} \frac{[d\vec{l}' \times (-d\vec{l})] \cdot \vec{r}'}{r'^3} \end{aligned}$$

电流环路 L'

积分环路 L

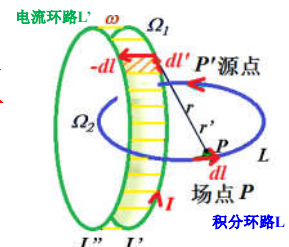
$d\vec{l} \times d\vec{l}' = -(d\vec{l}' \times d\vec{l})$

$\vec{r} = -\vec{r}'$

29

P 点做一个 dl 的平移, 与 P 不动而载流回路 L' 作一个 -dl 的平移是等价的。

$$\text{令 } d\vec{S} = d\vec{l} \times (-d\vec{l}')$$



$$\frac{[d\vec{l} \times (-d\vec{l}')] \cdot \vec{r}'}{r'^3} = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{r}'}{r'^3} = \frac{dS_0}{r'^2} = d\omega$$

$dS_0$  为 dS 在垂直于  $\vec{r}'$  平面上的投影

$$\therefore \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L'} d\omega = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \omega$$

ω 为带状面(圆柱侧面)对 P 点所张的立体角

30

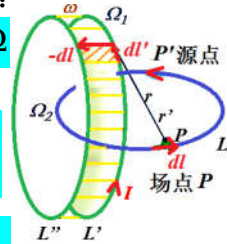
设  $\Omega_1, \Omega_2$  分别为  $P$  点平移前后,  $L'$  曲面对  $P$  点所张的立体角, 则:

$$\omega = \Omega_2 - \Omega_1 = d\Omega$$

代入上式, 有:

$$\therefore \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L d\Omega$$



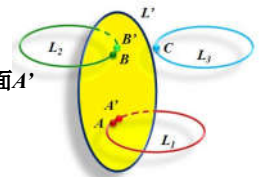
31

分三种情况讨论:

(1)  $P$  点由  $L'$  的正面  $A$  绕到  $L'$  的反面  $A'$

$$\oint_{L_1} d\Omega = 2\pi - (-2\pi) = 4\pi$$

$$\oint_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L_1} d\Omega = \mu_0 I$$



$$\oint_{L_2} d\Omega = (-2\pi) - 2\pi = -4\pi$$

(2)  $P$  点由  $L'$  的反面  $B'$  绕到  $L'$  的正面  $B$

$$\oint_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L_2} d\Omega = -\mu_0 I$$

(3)  $P$  点在  $L'$  面外绕一周

$$\oint_{L_3} d\Omega = 0 \Rightarrow \oint_{L_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L_3} d\Omega = 0$$

32

综上所述, 有:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} \mu_0 I, & (L \text{ 与 } I \text{ 同方向, 右手法则确定}) \\ -\mu_0 I, & (L \text{ 与 } I \text{ 反方向}) \\ 0, & (L \text{ 与 } L' \text{ 不套连}) \end{cases}$$

多个电流回路, 有磁感应强度的叠加原理

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L \left( \sum_i \vec{B}_i \right) \cdot d\vec{l} = \sum_i \oint_L \vec{B}_i \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

仅对被  $L$  套连的电流强度求和。

安培定理得证。

33

### 安培定理的积分形式

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\therefore \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

### 安培定理的微分形式

稳恒磁场: 无源、有旋

$$\therefore \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

静电场: 有源、无旋

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

34

### 稳恒电流磁场的基本方程式

积分形式

$$\begin{cases} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \end{cases}$$

微分形式

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \text{静电场}$$

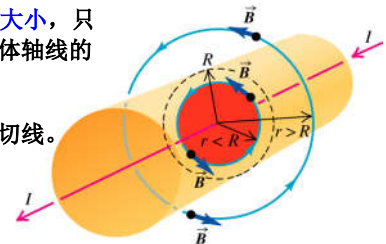
35

【例6】一圆形的直导线, 截面半径  $R$ , 电流  $I$  均匀地流过导体的截面, 求导线内、外的磁场分布。

【解】根据对称性, 可以判定:

磁感应强度  $B$  的大小, 只与观察点到圆柱体轴线的距离有关;

方向: 沿圆周的切线。



36



由安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

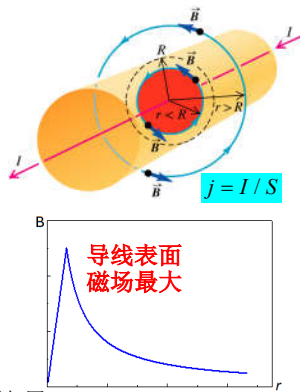
当  $r < R$  时, 有:

$$B 2\pi r = \mu_0 \left( \frac{I}{\pi R^2} \right) \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

当  $r > R$  时, 有:

$$B 2\pi r = \mu_0 I \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



与【例1】由叠加原理得到的结果相同

37

【例7】电流均匀通过无限大导体薄板, 面电流密度为  $i$ , 方向垂直纸面向里, 求导体两边的磁感应强度。

体电流密度

$$j = I/S$$

面电流密度

$$i = I/L$$

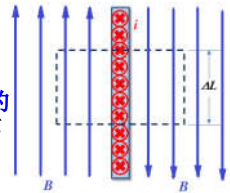
【解】由对称性, 两边等距离处的  $B$  大小相等、方向相反。作矩形回路, 由安培环路定理:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$2B\Delta l + 0 = \mu_0 i \Delta l$$

$$\therefore B = \frac{1}{2} \mu_0 i$$

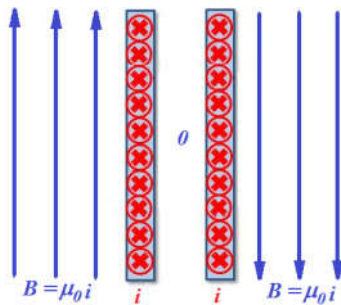
无限大载流平面在两侧的磁感应强度是均匀的, 但方向相反



38

中间区域两者相互抵消, 磁场为 0

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 i + \frac{1}{2} \mu_0 i = \mu_0 i$$



两边区域互相叠加,  $B = \mu_0 i$ , 两边都是均匀磁场

39

【例8】求无限长螺线管外内的磁感应强度。设电流强度为  $I$ , 单位长度的匝数为  $n$ 。

【解】螺线管无限长, 由对称性可得, 管外  $B=0$ , 作如图所示的矩形回路:

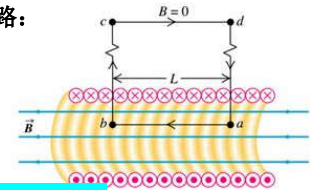
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$BL + 0 + 0 + 0 = \mu_0 nLI$$

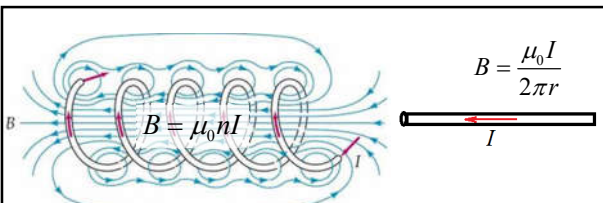
$$B = \mu_0 nI$$

与【例3】结果相同

管内为均匀磁场



40



实际上螺线管外部也是有磁场的, 其磁场有两个来源:

- (1) 螺线管的漏磁;
- (2) 把螺线管看成一根通电直导线而产生的磁场。

但通常情况下, 内部磁场比外部磁场大得多, 因此可以忽略外部磁场。

$$\mu_0 nI \gg \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

41

环形螺线管

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

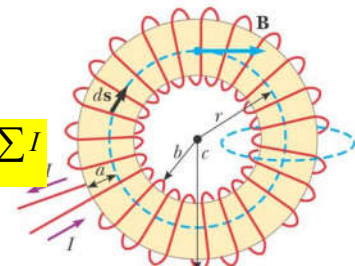
$$r < b \text{ or } r > c \quad B 2\pi r = 0$$

$$B = 0$$

$$b < r < c \quad B 2\pi r = \mu_0 NI$$

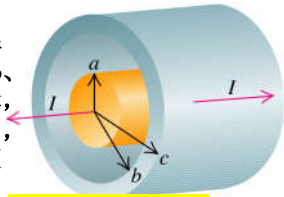
$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} = \mu_0 nI$$

与无限长螺线管一样



42

【例9】一同轴电缆，中心是半径为  $a$  的圆柱形导线，外部是内半径为  $b$ 、外半径为  $c$  的圆筒导体，内外导体电流相向流动，电流强度为  $I$ ，求各个区域的磁感应强度。



【解】磁场沿圆周方向，由安培环路定理，

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$r < a \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 \left( \frac{I}{\pi a^2} \right) \pi r^2 \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r$$

$$a < r < b \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 I \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

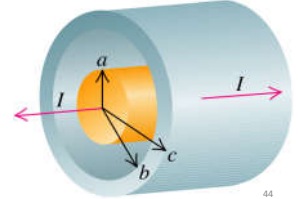
43

$b < r < c$  内、外电缆电流方向相反  $j = \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)}$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 \left[ I - \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} \pi(r^2 - b^2) \right]$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left[ 1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right]$$

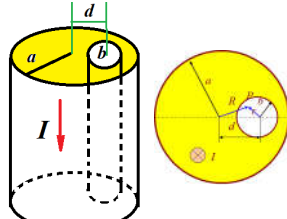
$$r > c \quad \sum I = 0, B = 0$$



44

【例10】在半径为  $a$  的圆柱形长直导线中，挖有一个半径为  $b$  的空管部分 ( $a > 2b$ )，两轴线平行，相距为  $d$ ，当电流仍均匀分布在管的截面上、且总电流为  $I$  时，求(1)两轴上的磁感应强度  $B$ ；(2)空管内的  $B$ 。

【解】空管的存在使电流分布失去对称性，采用“填补法”。将空管部分等效于同时存在电流密度为  $j$  和  $-j$  的电流。因而空间任一点的磁场由二个圆柱形长直导线的磁场叠加而成。



$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad j = \frac{I}{\pi(a^2 - b^2)}$$

45

(1)大圆柱的磁场

$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = 2\pi r B_1 = \mu_0 j \pi r^2 \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 j}{2} r$$

自身轴线上  $r = 0 \quad B_1 = 0$

小圆柱在大圆柱的轴线上的磁场：

$$2\pi d B_2 = \mu_0 j \pi b^2 \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 j b^2}{2d}$$

$$\text{大圆柱轴线上: } B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 j b^2}{2d} = \frac{\mu_0 I b^2}{2\pi d(a^2 - b^2)}$$

$$j = \frac{I}{\pi(a^2 - b^2)}$$

大圆柱在小圆柱轴线上  $B_1' = \frac{\mu_0 j}{2} r \quad r = d \Rightarrow B_1' = \frac{\mu_0 j}{2} d$

$$\text{小圆柱轴线上: } B' = B_1' + B_2' = \frac{\mu_0 j}{2} d = \frac{\mu_0 I d}{2\pi(a^2 - b^2)}$$

小圆柱在自身轴线上  $B_2' = 0$

46

(2)空管内任一点，由安培环路定理，有大圆柱产生的磁场：

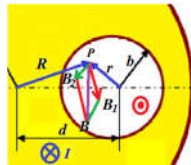
$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = B_1 2\pi R = \mu_0 I = \mu_0 j \pi R^2$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \mu_0 R j$$

同理，有小圆柱产生的磁场

$$B_2 = \frac{1}{2} \mu_0 r j$$

注意磁感应强度是矢量  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$



47

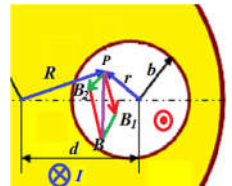
$$B^2 = B_1^2 + B_2^2 - 2B_1 B_2 \cos \alpha$$

$$= \frac{\mu_0^2 R^2 j^2}{4} + \frac{\mu_0^2 r^2 j^2}{4} - \frac{2\mu_0^2 R r j^2}{4} \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr}$$

$\alpha$  为  $B_1$ - $B_2$  间夹角，等于  $R$ - $r$  间夹角

$$B = \frac{\mu_0 d}{2} j = \frac{\mu_0 I d}{2\pi(a^2 - b^2)}$$

磁场方向与两轴线连线垂直，腔内磁场大小相等，是均匀磁场。



48



## 磁单极子问题

### 1. 什么是磁单极子

仅带有  $N$  极或  $S$  极的单一磁极的磁性物质。其磁感应线分布类似于点电荷的电场线分布。

狄拉克曾经预言过电子的存在，并已经为实验所证实。

他在1931年从理论上以极精美的数学物理公式预言，磁单极子是可以单独存在的。认为这些带有磁场的粒子能够存在于一些人们称之为“狄拉克弦(Dirac String)”的末端。



49

### 2. 为什么要有磁单极子存在?

#### 磁极与电荷的对称性

既然电有基本电荷—电子存在，那么磁也应该有基本磁荷—磁单极子存在。

#### 为什么电荷是量子化的?

狄拉克提出，如果存在磁单极子的话，基本电荷  $e$  和基本磁荷  $g$  间满足关系：

$$g \cdot e = n \frac{\hbar c}{2}, \quad g = n g_D, \quad g_D = \frac{\hbar c}{2e}$$

$n$  是整数， $g_D$  单位狄拉克磁荷

50

著名物理学家费米(E. Fermi)也曾从理论上探讨磁单极子，并认为它的存在是可能的。

其他一些科学家从不同方面、不同程度地对磁单极子理论做出了补充和完善。

近年来，统一规范理论，即电磁相互作用、弱相互作用、强相互作用大统一理论，以及宇宙大爆炸理论等均提出磁单极子。

51

### 3. 磁单极子的性质

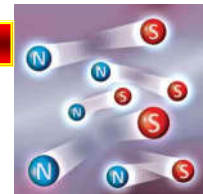
#### 电子间的相互作用力和能

$$F_{e-e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

$$W_{e-e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

#### 磁单极之间的相互作用能

$$W_{m-m} \approx 5000 W_{e-e}$$



$$F_{m-m} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{g^2}{r^2}$$

$$W_{m-m} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{g^2}{r}$$

52

#### 磁单极子的质量

$$m_e \approx \frac{W_e}{c^2}$$

同理  $m_g \approx \frac{W_g}{c^2}$

$$m_g \approx 5000 m_e = 2.55 m_p \approx 3 m_p \quad (3 \text{ GeV})$$

磁荷  $g$   $g = \frac{n\hbar c}{2e}$

$$g + \bar{g} \rightarrow 2\gamma$$

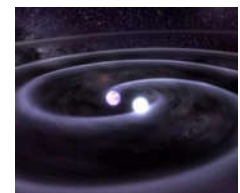
53

### 4. 磁单极子的证据

随着磁单极子的提出，磁单极子成为当今物理学的一个重大课题，科学界掀起了一场寻找磁单极子的热潮。

北极磁单极子与南极磁单极子相遇会湮灭成  $2\gamma$ 。

因此，宇宙大爆炸后，空间自由磁单极子已绝大部分消失，只可能存在于古岩石、海洋底部、陨石、月岩之中。

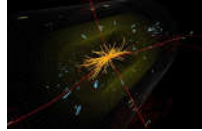


$$g + \bar{g} \rightarrow 2\gamma$$

54

### 几种探测磁单极子的方法

- 用**强电磁铁**吸古岩石或海洋底部沉积物中的磁单极子，再用核乳胶等核电子学技术探测。
- 利用**高能加速器**加速粒子(如质子)轰击靶(原子核)，希望这样能使理论中紧密结合的**正、负磁单极子分离**，再用磁场抽取，寻找磁单极子。
- 将探测器用气球或宇宙飞船带至太空中，带回分析。



55

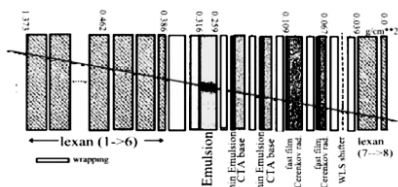
### The "Price Event"

1973年9月25日，加州大学伯克利分校的P. B. Price和他的合作者成功地在苏城发射了一个气球，用35组Lexan探测器和三组核乳胶等核电子学技术，探测宇宙射线重核成分。

发现了一个**穿过多重探测器的重粒子**，并对其进行了轨迹分析，称为Price Event。



56



- Price组宣称这可能是一个磁单极子，磁荷为 $g=137e$ ，速度为 $v=0.5c$  (Phys. Rev. Lett. 35, 0486, 1975)。
- 但后来他们又在数据中发现了一些不能自洽的地方
- 有人认为这条声称是磁单极子留下的轨迹同样可以由**铂核先分裂成钷核，然后再变成钷核得到**，所以这个磁单极子的实验探测**最终没有得到物理界的普遍承认**。
- 1978年他们撤回发现磁单极子的申明 (P. B. Price et al, Phys. Rev. D18, p1382, 1978)。

57

### 月球岩石

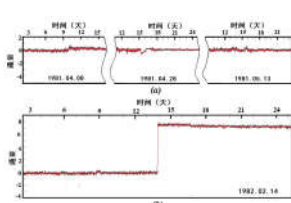


Alvarez用月球岩石搜寻磁单极子

1973年，科学家对“阿波罗”11号、12号、14号飞船运回的月岩石进行了检测，使用了极灵敏的仪器，但**没有测到任何磁单极子**。

58

### The "Cabrera Event"



情人节的不速之客

1982年2月14日，B. Cabrera利用超导环形探测器，由超导量子干涉式**磁强计**，在实验室中进行了151天的实验观察记录，得到一个信号。

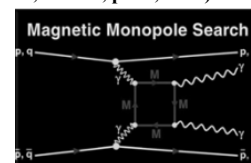
**该信号符合一个磁单极子穿越线圈的完美特征**，即线圈中的电流突然增加(它之所以被保留是因为线圈电阻非常小)。Blas Cabrera, Phys. Rev. Lett. 48, p1378, 1982)

1983年的情人节那天，物理学家S. Weinberg还为此写了一首诗，期待第二个“情人节磁单极子”。然而时至今日，这一实验仍然没有得到重复，不能证实磁单极子的存在。

59

### The "Caplin Event"

- 1986年Caplin等也发现可能的磁单极子，此发现与1985年8月11号观察到的信号类似。
- 且观察到的测量通量的跃变完全与磁单极子通过其中一个线圈引起的变化符合。
- 该报道发表在1986年的Nature杂志上 (A. D. Caplin et al, Nature, Vol321, p402, 1986)



60

## 问 题

- (1) 为什么说磁场是无源的，难道电流不是磁场的源吗？
- (2) 阅读相关文献，进行磁单极子问题的进一步讨论。
- (3) 对物质磁性的本质的探讨。

61

作 业 4.11, 4.18, 4.20, 4.21, 4.22



62