

上节课主要内容

- 电介质的物态方程 $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ $\epsilon_r = 1 + \chi$
- 电位移矢量 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}$ $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$
- 有电介质时的高斯定理 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S^{\text{int}}} q_0, \nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$
- 有电介质时的环路定理 $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \nabla \times \vec{E} = 0$
- 介质中的边值关系 $D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0, E_{1t} = E_{2t}$
- 电场与电势的关系 $\vec{E} = -\nabla U$

1

- 上述求解问题仅限于电荷分布具有特定的对称性并且没有边界，或者是虽有边界，但边界也具有相似的对称性。

- 然而在工程实际问题中，所遇到的场可能要复杂得多，一般不能用直接积分或高斯定理求解，而需要寻找其他的求解方法。

- 但是，不论这些电场问题如何复杂，从数学上讲，它们都是在给定的边界条件下，求解泊松方程或拉普拉斯方程的问题，即所谓边值问题。

2

§ 8.1.1 静电场的泊松方程和拉普拉斯方程

- 描写静电场的两个方程是：

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

由环路定理可得到 E 和 U 的关系，即 $E = -\nabla U$ ，代入到高斯定理就有：

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{称泊松方程.}$$

3

在直角坐标系中，可写成：

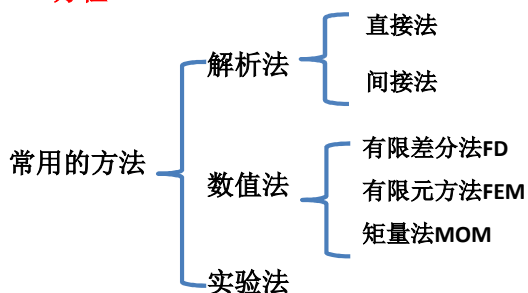
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

若空间无电荷分布，则方程变为拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

4

- 静电场的边值问题，可归结为：在给定边界条件下，求解拉普拉斯方程或泊松方程



5

§ 8.1.2 边值问题和静电场的唯一性定理

1. 边值问题

根据问题所给的边界条件不同，分为三类：

- 第一类边值问题：给定的边界条件为整个边界上的电势值 U ，又称为狄里赫利问题；
- 第二类边值问题：所给定的边界条件为整个边界上的电势的法向导数值 $\partial U / \partial n$ ，又称为纽曼问题；
- 第三类边值问题：所给定的边界条件部分为电势值 U ，部分为电势的法向导数值 $\partial U / \partial n$ ，又称为混合边值问题。

6

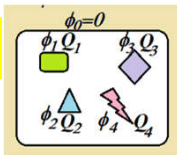
2. 唯一性定理

唯一性定理：满足泊松方程或拉普拉斯方程、及所给的全部边界条件的电场解是唯一的。

$$\nabla^2 U = -\rho / \varepsilon_0 \quad \text{or} \quad \nabla^2 U = 0$$

也就是说，若在保证 U 为问题的唯一正确解， U 必须满足两个条件：

- ① 要满足泊松方程或拉普拉斯方程，这是必要条件；
- ② 在整个边界上，满足所给定的边界条件。边界条件包含了边值问题给出的三种情况。



3. 唯一性定理的证明

【反证法】即假定在表面为 S 的空间 V 内有两组不同的解 U 和 U' ，即它们满足同一边界条件及方程，则

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla^2 U' = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

取两解之差， $U'' = U - U'$ ，则在 V 内 U'' 一定满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 U'' = \nabla^2 (U - U') = 0$$

格林定理的数学表达式：

$$\iiint_V [\varphi \nabla^2 \Psi + (\nabla \varphi \cdot \nabla \Psi)] dV = \oint_S (\varphi \nabla \Psi) \cdot d\vec{S}$$

令式中 $\varphi = \Psi = U''$

$$\iiint_V [U'' \nabla^2 U'' + (\nabla U'' \cdot \nabla U'')] dV = \oint_S U'' \frac{\partial U''}{\partial n} \vec{n} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla^2 U'' = 0 \quad \iiint_V [\nabla U'']^2 dV = \oint_S U'' \frac{\partial U''}{\partial n} \vec{n} \cdot d\vec{S}$$

对第一类边值问题(给定整个边界上的电势 U)：两个解 U 和 U' 满足相同的边界条件，故在边界 S 上有：

$$U|_S = U'|_S \quad U''|_S = U|_S - U'|_S = 0$$

代入前式 $\iiint_V (\nabla U'')^2 dV = \oint_S U'' \frac{\partial U''}{\partial n} \vec{n} \cdot d\vec{S} = 0$

$$\because (\nabla U'')^2 \geq 0 \Rightarrow \nabla U'' \equiv 0$$

$$U = U' + C \quad U'' = U - U' = C$$

电势的绝对值是无意义的， U 和 $U+C$ 代表同一场，所以 U 和 U' 实际上是一个解，亦即解是唯一的。

对第二类边值问题(给定整个边界上的 $\partial U / \partial n$)：两个解 U 和 U' 满足相同的边界条件，在边界 S 上有：

$$\frac{\partial U}{\partial n} \Big|_S = \frac{\partial U'}{\partial n} \Big|_S \Rightarrow \frac{\partial U''}{\partial n} \Big|_S = \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_S - \frac{\partial U'}{\partial n} \Big|_S = 0$$

代入格林公式 $\iiint_V [\nabla U'']^2 dV = \oint_S U'' \frac{\partial U''}{\partial n} \vec{n} \cdot d\vec{S} = 0$

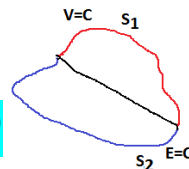
$$\nabla U'' \equiv 0 \quad \iiint_V (\nabla U'')^2 dV = 0$$

$$U'' = U - U' = C \Rightarrow U = U' + C$$

U 和 $U+C$ 代表同一场，是同一个解，即解是唯一的

对第三类边值问题(给定部分边界上的 U ，部分边界上的 $\partial U / \partial n$)：两个解 U 和 U' 在部分边界 S_1 上满足：

$$U''|_{S_1} = U|_{S_1} - U'|_{S_1} = 0$$



在另一部分边界 S_2 上满足： $\frac{\partial U''}{\partial n} \Big|_{S_2} = \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{S_2} - \frac{\partial U'}{\partial n} \Big|_{S_2} = 0$

代入格林公式，仍有 $\iiint_V (\nabla U'')^2 dV = 0 \quad U'' = U - U' = C$

$$U = U' + C \quad \text{亦即解是唯一的}$$

4. 唯一性定理的意义

- 解的唯一性定理在求解静电场问题中具有重要的理论意义和实用价值。
- 唯一性定理的成立意味着可以采用多种形式的求解方法, 包括某些特殊、简便的方法, 甚至是直接观察、猜测的方法。
- 只要能找到一个既满足泊松方程(或拉普拉斯方程), 又满足边界条件的解, 那么此解必定是该问题的唯一正确解! 无须再做进一步的验证。
- 如果得到了不同形式的解, 那么也只是形式上的不同而已, 电场是唯一的。

13

【例46】若所有导体都不带电, 则各导体的电势都相等

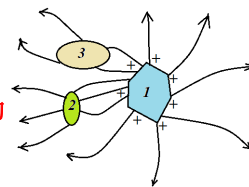
【证明】(反证法) 设各导体电势不相等, 最高的为 U_1

$$U_1 > U_2, \quad U_1 > U_3$$

则导体1是电场线的起点, 导体1表面有正电荷, 导体1上的总电量不为0。

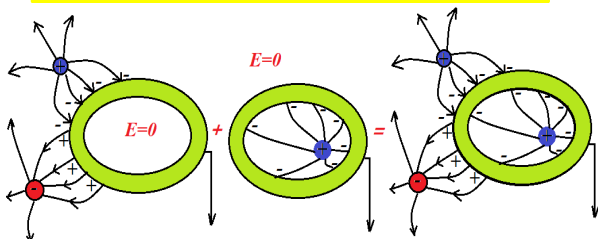
与前提“所有导体都不带电”

矛盾, 故各导体电势必须相等



14

唯一性定理表明: 一旦找到某种电荷分布, 既不违背导体平衡特性, 又是物理实在, 则这种电荷分布就是唯一可能的分布。

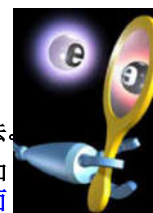


图中是根据导体内场强处处为0判断存在两种实在的电荷分布的叠加就是唯一的分布

15

§ 8.1.3 电像法

- 电像法是求解静电场的一种特殊方法。
- 电像法特别适用于对称性的边界, 如平面(或球面、圆柱面), 导体前存在点电荷或线电荷情况下的静电场计算问题。



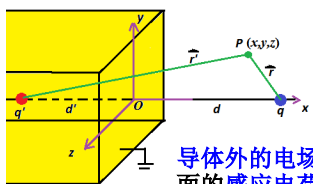
像电荷位置选择原则

- 像电荷必须位于求解区域以外的空间。
- 像电荷的引入不能改变原问题的边界条件。

16

1. 点电荷对无限大接地导体的电像

【例47】一点电荷 q , 位于无限大接地导体旁, 距离导体表面为 d 。求(1)空间电势分布, (2)电场分布, (3)导体表面感应电荷密度, (4)电荷所受的力。



【解】导体外点电荷 q 的存在, 导致导体表面有感应电荷, 感应电荷的分布比较复杂。

导体外的电场: 由点电荷和导体表面的感应电荷共同产生

边界条件: 导体表面 $U=0$ (导体接地)

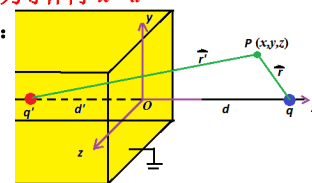
17

将感应电荷的贡献用一虚拟(像)电荷来代替

为了保证满足边界条件($U=0$), 只要选择像电荷的值 $q'=-q$, 像电荷的位置为导体内 $x=-d$

(1) $x>0$ 区域 P 点的电势为:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right) \\ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$$



$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right\}$$

该式满足边界条件: $U_{x=0}=0$

根据唯一性定理, U 是正确的!

18

(2) $x>0$ 区域的电场强度为: $\vec{E} = -\nabla U$

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(x-d)}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{(x+d)}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right\} \\ E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{qy}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right\} \\ E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right\} \end{cases}$$

19

导体外表面($x=0$)的电场强度为: $E_y = E_z = 0$

$$\vec{E}_n = \vec{E}_x(0, y, z) = \frac{-qd}{2\pi\epsilon_0(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \hat{x} \quad \begin{matrix} E \text{ 垂直于} \\ \text{导体表面} \end{matrix}$$

(3) 导体表面的感应电荷面密度为:

$$\sigma_s(0, y, z) = \epsilon_0 E_n(0, y, z) = \frac{-qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

导体表面的总感应电荷为:

$$q_s = \iint_S \sigma_s dS = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dy dz = -q$$

20

(4) 点电荷 q 所受的力

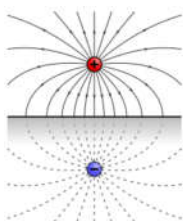
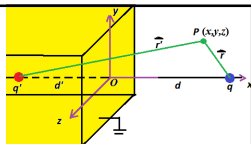
需计算 q 所在处(由感应电荷所产生的)电场强度。

感应电荷在 $x>0$ 区间的作用等效于像电荷 $(-q)$ 在 $x>0$ 区间的作用

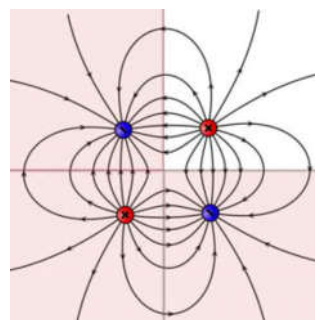
$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{(2d)^2} \hat{x} = -\frac{q}{16\pi\epsilon_0 d^2} \hat{x}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}' = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \hat{x}$$

负号表示作用力为吸引力



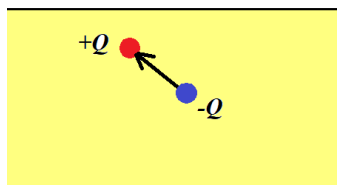
21



三个像电荷，
确保直角表面 $U=0$

接地直角导体平面，点电荷的电像

22

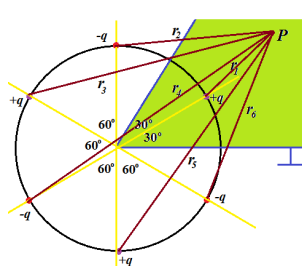
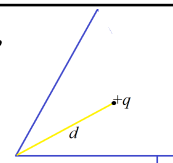


电像≠镜像

电像法得到的电偶极子，其取向与原来的电偶极子并非镜像对称!

23

【例48】两个接地导体板夹角为 60° ，在中间对称轴上有一点电荷 q ，质量为 m ，距离顶点为 d ，求：(1)该区域的电场分布；(2)把该点电荷 q 从 d 处移动到无限远处需要做的功。



【解】两导体板上有感应电荷，根据唯一性定理，可以设置5个像电荷来代替感应电荷对电场的贡献。点电荷和像电荷都处在 $r=d$ 为半径的圆周上，正、负电荷间隔排列，共同保证两导体边界的电势为零(边界条件)。

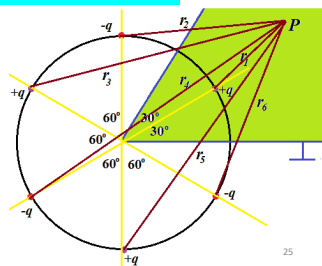
24

(1) 两个导体板之间任一点 $P(r)$ 的电势为点电荷和5个像电荷的共同贡献:

$$U(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} - \frac{1}{r_6} \right)$$

$$\vec{E}(r) = -\nabla U(r)$$

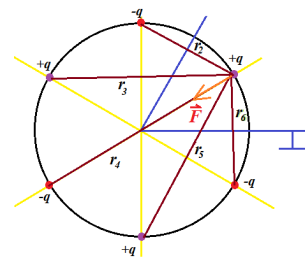
.....



25

(2) 点电荷 q 受导体板表面感应电荷的力=其他5个像电荷对点电荷 q 的作用力为:

$$\vec{F}(r) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \frac{\vec{r}_3}{r_3^3} + \frac{\vec{r}_4}{r_4^3} - \frac{\vec{r}_5}{r_5^3} + \frac{\vec{r}_6}{r_6^3} \right)$$



26

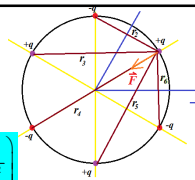
根据对称性, 合力指向圆心, 合力大小为:

$$F(r)_{r=d} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{d} \cos 60^\circ - \frac{2}{\sqrt{3}d} \cos 30^\circ + \frac{1}{(2d)^2} \right)$$

$$= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{15 - 4\sqrt{3}}{12d^2}$$

将电荷移到无穷远处, 需要做的功为

$$A = \int_d^\infty F(r) dl = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{15 - 4\sqrt{3}}{12d}$$

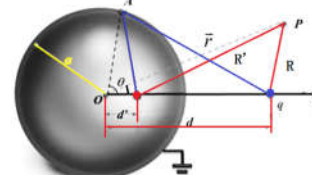


27

2. 点电荷对导体球面的电像

【例49】半径为 a 的导体球壳接地, 球外有一电量为 q 的点电荷, q 与球心的距离为 d , 求(1)球外空间的电势分布, (2)电场分布, (3)球表面的感应电荷分布, (4)感应电荷对点电荷的作用力。

【解】导体球表面是等势面, 球接地, 因此该题的边界条件是球表面电势为零。

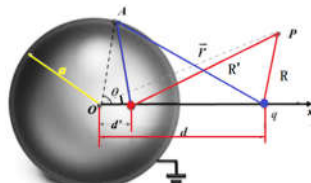


28

用电像法求解, 根据对称性, 像电荷一定在球心 O 与 q 的连线上, 设像电荷 q' 位于球内距离球心 d' 处。球表面感应电荷的贡献等效于像电荷 q' 的贡献。

(1) 球外任一点 P 的电势为:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} + \frac{q'}{R'} \right)$$



$$R = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}, \quad R' = \sqrt{r^2 + d'^2 - 2rd' \cos \theta'}$$

29

导体球接地, 因此边界条件为球面上的 $U_s = 0$

$$\text{故} \quad \frac{q}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{1/2}} + \frac{q'}{(a^2 + d'^2 - 2ad' \cos \theta)^{1/2}} = 0$$

$$q^2 (a^2 + d'^2 - 2ad' \cos \theta) = q'^2 (a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)$$

球面是等势的, 上式对球面上任一点(任意的 θ) 都成立, 可比较等式两边 $\cos \theta$ 项前的系数和常数项, 有:

$$\begin{cases} q^2 (a^2 + d'^2) = q'^2 (a^2 + d^2) \\ q^2 d' = q'^2 d \end{cases}$$

30

由上面两式可得到两个解:

$$d' = \frac{a^2}{d}, \quad q' = -\frac{a}{d}q \quad (1)$$

$$d' = d, \quad q' = q \quad (2)$$

- 解(2)表示像电荷就在球外真实电荷处, 与真实电荷电量大小相等、符号相反。
- 设置像电荷时, 其中一个原则是: **像电荷必须位于求解区域以外的空间**, 这里意味着不能在球外, 因此**应舍去解(2)**。
- 由于 $a < d$, 解(1)表示像电荷在球内, 电量与球外真实电荷的符号相反。

31

由镜像电荷和真实电荷可以求出 $r > a$ 区域的电势:

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}} - \frac{a/d}{\left[r^2 + \left(\frac{a^2}{d}\right)^2 - 2r\left(\frac{a^2}{d}\right) \cos \theta \right]^{1/2}} \right\}$$

(2) $r > a$ 区域的电场强度: $\vec{E} = -\nabla U$

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r - d \cos \theta}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{3/2}} - \frac{ad(rd - a^2 \cos \theta)}{(r^2 d^2 + a^4 - 2rda^2 \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

32

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{qd \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{3/2}} - \frac{a^3}{(r^2 d^2 + a^4 - 2rda^2 \cos \theta)^{3/2}} \right]$$



$$\text{球面} \quad E_\theta|_{r=a} = 0$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$$

导体壳表面电场切向分量为零, 场强与表面垂直

33

(3) 导体表面的(感应)电荷密度 σ : σ 与 θ 有关

$$\sigma = \epsilon_0 E_n = \epsilon_0 E(a, \theta) = -\frac{q(d^2 - a^2)}{4\pi a(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}}$$

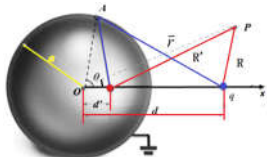
电荷 q 在接地导体球面产生的总感应电荷的电量为:

$$q_i = \oint_S \sigma dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma a^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -\frac{a}{d} q$$

即导体壳上感应电荷总量等于像电荷电量。
球半径 a 越大, 或 d 越小时, q_i 的绝对值越大

34

(4) 点电荷 q 受到的力



负号表示该力为引力

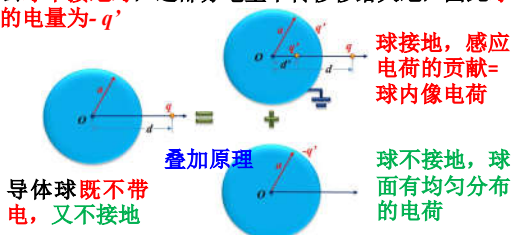
$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(d-d')^2} \hat{x} \\ &= \frac{q\left(-\frac{a}{d}q\right)}{4\pi\epsilon_0 \left(d - \frac{a^2}{d}\right)^2} \hat{x} \\ &= -\frac{adq^2}{4\pi\epsilon_0 (d^2 - a^2)^2} \hat{x} \end{aligned}$$

35

【例50】 半径为 a 的导体球壳不接地, 球壳本身不带电, 球外有一电量为 q 的点电荷, q 与球心的距离为 d , 求(球外空间的)电势分布

【解】 导体球接地时, 由上例可知球表面的感应电荷电量为 $q_i = q'$, 即球转移电荷给大地, 电量为 $-q'$ (电荷守恒)

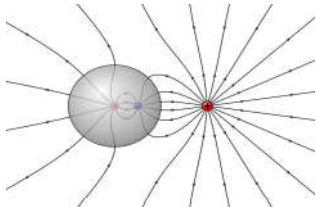
那么球不接地时, 这部分电量不转移给大地, 因此球上的电量为 $-q'$



36

根据唯一性定理，球外的电势由三个电荷叠加而成

- (i) 球外点电荷 q
- (ii) 球内镜像电荷 q'
- (iii) 球表面均匀分布的电荷 $-q'$ (=球心有电量为 $-q'$ 的点电荷)



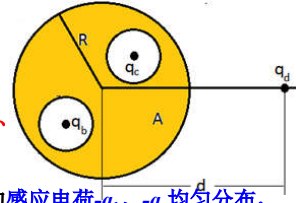
37

【例51】 如图所示，半径为 R 的导体球 A 上的总电荷为零。 A 内有两个空腔，空腔中心分别放有点电荷 q_b 和 q_c ，在距 A 球球心不太远的 d 处放置点电荷 q_d ，求：(1) q_b 和 q_c 受到的作用力；(2) q_d 受到的作用力

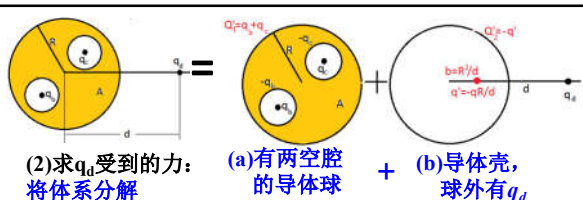
【解】 (1) 静电平衡下，导体内电场为0，腔外电场对腔内无影响， q_d 对 q_b 、 q_c 无作用力；

q_b 、 q_c 在空心球内表面的感应电荷 $-q_b$ 、 $-q_c$ 均匀分布，它们有球对称性，对 q_b 、 q_c 的合力为0，故

$$\vec{F}_{q_b} = \vec{F}_{q_c} = 0$$



38



(2) 求 q_d 受到的力：将体系分解

(a) 有两空腔的导体球 + (b) 导体壳，球外有 q_d

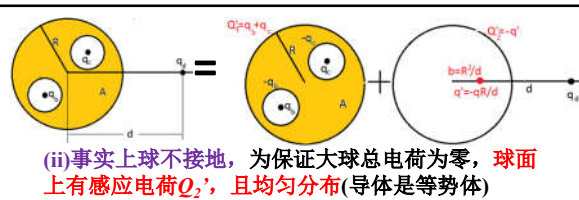
(a) 球外无 q_d 的空腔导体球： q_b 、 q_c 在空心球内表面的感应电荷为 $-q_b$ 、 $-q_c$ ，在球外表面的感应电荷 $Q_1' = q_b + q_c$ ，均匀分布

$$Q_1' = q_b + q_c$$

(b) 球内无 q_b 、 q_c ，球外有 q_d ，等同于【例50】(i) 先假设球接地，则球外 q_d 在球面上的感应电荷是不均匀分布，其贡献可由球内镜像电荷代替

$$q' = -q_d R / d, \quad b = R^2 / d$$

39



(ii) 事实上球不接地，为保证大球总电荷为零，球面上有感应电荷 Q_2' ，且均匀分布(导体是等势体)

$$Q_2' = -Q_1' = -q_d R / d$$

q_d 处的电场由球面感应电荷 Q 和球内像电荷 q' 贡献

$$Q = Q_1' + Q_2' = q_b + q_c + q_d R / d$$

q_b 、 q_c 与空心球内表面均匀分布的感应电荷 $-q_b$ 、 $-q_c$ 对球外电场的贡献为0。

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_b + q_c + q_d R / d}{d^2} + \frac{-q_d R / d}{(d - R^2 / d)^2} \right), \quad F = q_d E$$

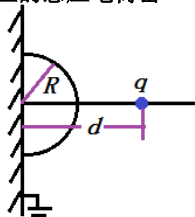
40

点电荷对无限大接地导体平面+半球的电像

【例52】 无限大接地导体平面上有一个半径为 R 的半球，在半球正前方放置一个点电荷，求(1) 导体对该电荷的作用力，(2) 球面的感应电荷密度和感应电荷量，(3) 导体平面上的感应电荷密度和感应电荷量。

【解】 该题的边界条件：导体平面及半球面上的电势都为零。

像电荷的设置要保证边界的电势为零。

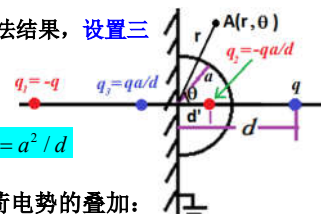


41

结合平面和球面的电像法结果，设置三个像电荷

$$\begin{aligned} q_1 &= -q \\ q_2 &= -\frac{a}{d} q \\ q_3 &= -q_2 \end{aligned}$$

$$d' = a^2 / d$$



空间电势这四个点电荷电势的叠加：

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} + \frac{-q}{\sqrt{r^2 + d^2 + 2rd \cos \theta}} + \frac{(-a/d)q}{\sqrt{r^2 + d'^2 - 2rd' \cos \theta}} + \frac{(a/d)q}{\sqrt{r^2 + d'^2 + 2rd' \cos \theta}} \right]$$

$U|_{\theta=\pi/2, 3/2\pi} = 0, \quad U|_{r=a} = 0$ 满足边界条件

42

(1) 点电荷 q 受到感应电荷对它的作用力等于三个镜像电荷对它的作用力:

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{(2d)^2} + \frac{q_2}{(d-d')^2} + \frac{q_3}{(d+d')^2} \right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-q}{4d^2} - \frac{qad}{(d^2-a^2)^2} + \frac{qad}{(d^2+a^2)^2} \right]$$

$$= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{4d^2} + \frac{4d^3a^3}{(d^4-a^4)^2} \right]$$

$F < 0$, 该力为吸引力

(2) 求球面上的感应电荷面密度和感应电荷量:

导体表面电场与表面垂直 $E = E_n$

$$\sigma_1 = \epsilon_0 E_n = -\epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

$$= \frac{(d^2-a^2)q}{4\pi a} \left[\frac{1}{(a^2+d^2+2ad\cos\theta)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{3/2}} \right]$$

$$q_{11} = 2 \int_0^{\pi/2} \sigma_1 2\pi a^2 \sin\theta d\theta = -q \left(1 - \frac{d^2-a^2}{d\sqrt{a^2+d^2}} \right)$$

(3) 导体平面上的感应电荷面密度和感应电荷量:

$$\sigma_2 = \epsilon_0 E_n = -\epsilon_0 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pm\pi/2}$$

$$= \frac{dq}{2\pi} \left[\frac{1}{(r^2+d^2)^{3/2}} - \frac{1}{((d/R)^2 r^2 + R^2)^{3/2}} \right]$$

$$q_{12} = \int_a^\infty \sigma_2 2\pi r dr = -q \left(\frac{d^2-a^2}{d\sqrt{a^2+d^2}} \right)$$

总感应电荷量: $q_i = q_{11} + q_{12} = -q$

【例53】 图示是 STM 模型, STM 探针可近似为一半径为 a 的导体球, 待测样品可认为是无限大导体平面, 设探针中心与样品的距离为 z , 设 $z > a$. (1) 求球和平面之间的电容的一阶修正项; (2) 当球带电为 Q 时, 将球与导体平面完全分离需要提供多少能量?

【解】 (1) 球与导体平面相距无穷远时, 即为孤立导体球, 其电容为

$$C_0 = 4\pi\epsilon_0 a$$

$$C = \frac{Q}{U} \Leftarrow U \Leftarrow E$$

为求一阶修正项, 设导体球带电为 Q , 则导体板上另一侧的像电荷为 $-Q$. 两电荷连线方向上任一点的电场为:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(z-h)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{(z+h)^2}$$

探针和样品之间的电势差为

$$U = \int_0^{z-a} E dh = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(z-h)} \Big|_0^{z-a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{(z+h)} \Big|_0^{z-a}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{a}{2z-a} \right) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{a}{2z} \right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 a \left(\frac{1}{1 - \frac{a}{2z}} \right) = 4\pi\epsilon_0 a \left(1 + \frac{a}{2z} \right) \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 4\pi\epsilon_0 a \\ C_1 = 2\pi\epsilon_0 a^2 / z \end{cases}$$

电容的一阶修正项

(2) 探针(导体球)受到的力等于两个相距为 $2z$ 的点电荷之间的作用力

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(2z)^2}$$

将导体球移到无穷远处所做的功为

$$A = \int_z^\infty F dz = \int_z^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(2z)^2} dz = \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{z}$$

3. 线电荷对接地导体圆柱面的电像

【例54】无限长接地圆柱，半径为 a ，柱外有一无限长电荷 λ ，距圆柱轴距离为 d ，求像电荷电量及位置

【解】由高斯定理得无限长线电荷电场

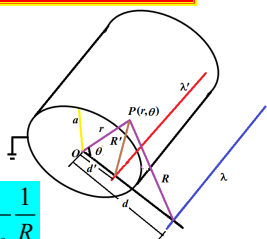
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

在柱外任一点 P 的电势为

$$U = \int_R^{d-a} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a}{R}$$

R 为柱外任一点 P 离线电荷 λ 的垂直距离

$d-a$ 是接地圆柱表面离线电荷的垂直距离

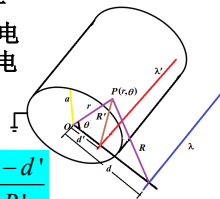


设柱内有镜像线电荷 λ' ， λ' 位于柱轴线和线电荷之间， P 离像线电荷 λ' 的垂直距离为 R' ，则 P 点电势为

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a}{R} + \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a-d'}{R'}$$

$$R = (r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}$$

$$R' = (r^2 + d'^2 - 2rd' \cos \theta)^{1/2}$$



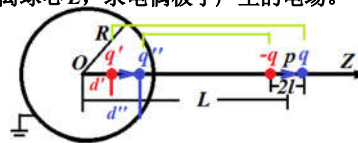
圆柱接地，导体柱表面的电势为零(边界条件)，即：

$$U|_{r=a} = 0 \Rightarrow \lambda \ln \left[\frac{d-a}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{1/2}} \right] = -\lambda' \ln \left[\frac{a-d'}{(a^2 + d'^2 - 2ad' \cos \theta)^{1/2}} \right]$$

满足任意 θ 的解为：

$$d' = \frac{a^2}{d}, \quad \lambda' = -\lambda$$

【例55】半径为 R 的接地导体球，球外有一电偶极子 $p=2ql$ ，设电偶极子的轴线通过球心，电偶极子中心距离球心 L ，求电偶极子产生的电场。



【解】电偶极子看作两个点电荷 $q, -q$ ，它们各自在球内有像电荷 q' 和 q''

$$q \Rightarrow q' = -\frac{R}{L+l} q, \quad d' = \frac{R^2}{L+l}$$

$$-q \Rightarrow q'' = +\frac{R}{L-l} q, \quad d'' = \frac{R^2}{L-l}$$

球外任一点 A 的电场

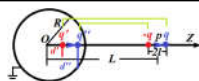
$$\vec{E}_A = \vec{E}_q + \vec{E}_{-q} + \vec{E}_{q'} + \vec{E}_{q''}$$

也可进一步用电偶极子做简化，两像电荷之间距离为

$$\Delta d = d'' - d' = \frac{2l}{L^2 + l^2} R^2 \approx \frac{2l}{L^2} R^2$$

由 q' 和 $-q''$ 组成一个像电偶极子：

$$p' = q' \Delta d = \frac{R}{L+l} q \frac{2l}{L^2} R^2 \approx \frac{R^3}{L^3} p$$



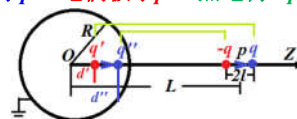
由于 $q'' \neq -q'$ ，多余的电荷作为点电荷

$$\Delta q' = q'' - |q'| = \frac{R}{L-l} q - \frac{R}{L+l} q \approx \frac{2lR}{L^2} q$$

球外任一点 A 的电场

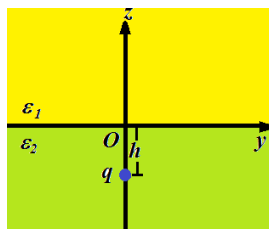
$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

电偶极子 p 电偶极子 p' 点电荷 $\Delta q'$



4. 点电荷对无限大介质平面的电像

【例56】如图，介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 半无限介质的界面为一无限平面，在介质2中放入点电荷 q ，它与界面的垂直距离为 h ，求界面极化电荷的分布



像电荷位置选择原则之一是：
像电荷必须位于求解区域以外的空间，因此：

- 求 ϵ_1 区间的电势、电场分布时，镜像电荷在 ϵ_2 区间；
- 求 ϵ_2 区间的电势、电场分布时，镜像电荷在 ϵ_1 区间。

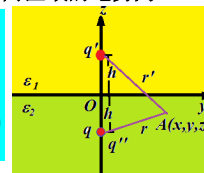
55

用像电荷来代表界面上极化电荷对电场的贡献

【解】设对 ϵ_1 区域，这一贡献可用位于 ϵ_1 区域像电荷 q' 来代表，对 ϵ_2 区域，这一贡献可用位于 ϵ_2 区域像电荷 q'' 来代表，设 q'' 与 q 位置重合，则两区域的电势为：

$$U_1 = \frac{1}{4\pi r} \left(\frac{q}{\epsilon_2} + \frac{q''}{\epsilon_0} \right) \quad (z \geq 0)$$

$$U_2 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{q}{\epsilon_2 r} + \frac{q'}{\epsilon_0 r'} \right) \quad (z \leq 0)$$



q' 不对自身所在 ϵ_1 区域有贡献，
 q'' 不对自身所在 ϵ_2 区域有贡献

源电荷 q 的贡献应被所在介质中的介电常数 ϵ_2 除，像电荷的贡献则可采用真空的电势计算公式

56

电势应满足边界条件1 $U_1|_{z=0} = U_2|_{z=0}$

介质界面无自由电荷，因此有

$$D_{1n} = D_{2n}$$

电势应满足边界条件2

$$\epsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \epsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

$$D_n = \epsilon E_n = -\epsilon \frac{\partial U}{\partial n}$$

根据以上两个边界条件，解出两个像电荷值为：

$$q' = q'' = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_2 (\epsilon_2 + \epsilon_1)} q$$

57

界面上极化电荷面密度为

$$\begin{aligned} \sigma' &= (P_{2z} - P_{1z})_{z=0} = [(\epsilon_2 - \epsilon_0) E_{2z} - (\epsilon_1 - \epsilon_0) E_{1z}]_{z=0} \\ &= \epsilon_0 (E_{2z} - E_{1z})_{z=0} = \frac{\epsilon_0 - \epsilon_2 - \epsilon_1}{2\pi\epsilon_2 \epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{dq}{r^3} \end{aligned}$$

当取 $\epsilon_1 \rightarrow \infty$ ， $\epsilon_2 = \epsilon_0$ 时，得到

$$q' = q'' = -q$$

$$U_1 = 0, \quad U_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$$

点电荷对无限大接地导体电像

在静电学范围内，导体可当作介电常数趋于无穷($\epsilon \rightarrow \infty$)的电介质极限(导体内 $E=0=E_0/\epsilon$ ，不能引起分子极化)

58

问题

- 设计一些复杂的平面导体或介质分界面，用电像法求解空间电势和电场的分布。
- 旋转对称椭球面导体壳，外部在长轴的延长线上有一点电荷，试求椭球外的电势和电场分布。

59

作业 8.5, 8.6, 8.8

Thank you!

60