

上节课主要内容

互感

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} \quad M = \frac{\varepsilon_{21}}{dI_1/dt} = \frac{\varepsilon_{12}}{dI_2/dt}$$

互感电动势

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

自感

$$L = \frac{\Phi}{I} \quad L = -\frac{\varepsilon}{dI/dt}$$

自感电动势

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

1

电感串联

$$L_{\text{顺}} = L_1 + L_2 + 2M$$

$$L_{\text{反}} = L_1 + L_2 - 2M$$

电感并联

$$L_{\text{同}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

$$L_{\text{异}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

2

§ 6.4 似稳电路和暂态过程

稳恒电路

由稳恒电源($\varepsilon = \text{Const}$)和电阻 R , 经导线连接而成电流是稳恒的 $I = \text{Const}$

非稳恒电路

由非稳恒电源 $\varepsilon(t)$ 、电阻、电容 C 、电感 L 和互感 M 元件以及晶体管、电子管等组成电流随时间缓慢变化 $I(t)$

似稳条件下 电路的基本方程与处理方法与稳恒电路类似

似稳电路

3

§ 6.4.1 似稳过程与似稳电路

一、似稳条件和似稳电流

非稳恒的电流 $I(t) \rightarrow E(t), B(t) \dots$

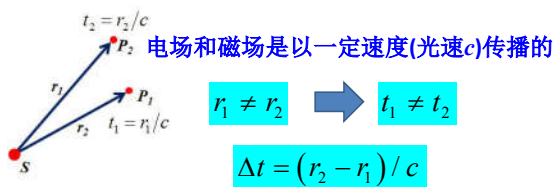
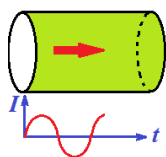
欧姆定律的微分形式对非稳恒电流仍然成立, 即

$$\vec{j}(t) = \sigma \vec{E}(t)$$

$$E \text{ 是总电场} \quad \vec{E} = \vec{E}_{\text{静}} + \vec{E}_{\text{旋}} + \vec{K} \quad K: \text{电源内部的非静电力}$$

但基尔霍夫第一、第二定律不再适用, 电压概念有时也不再适用。

4

同一时刻电路上各点的场 E , 并非由同一时刻场源的电荷分布 $\rho(r)$ 和电流分布 $j(r)$ 确定。

5

若 $\Delta t \ll T$ 电路对电源变化的响应时间可忽略

$$\Delta t = \frac{l}{c} \quad T = \frac{1}{f}$$

$$l \ll \frac{c}{f} = \lambda$$

似稳条件

 T : 电场随时间变化周期, l : 电路尺寸
 $f=50\text{Hz}, \lambda=6 \times 10^6(\text{m})$ 远大于一般电路的尺寸

- 电流 $I(t)$ 随电源电动势 $\varepsilon(t)$ 同步变化
 - $E(t), B(t)$ 变化缓慢 \rightarrow 似稳场
 - $I(t)$: 似稳电流
- 处理方法: 类比稳恒电流、稳恒电磁场

6

电路

- 电阻 R $I(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R}$
- 电感 L $\varepsilon_L = -L \frac{dI(t)}{dt}$ 把感应电动势视为另一类电源电动势，似稳条件仍成立
- 电容 C $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \frac{dU(t)}{dt}$

电容器一端流入的电流等于从另一端流出的电流，外部电流连续。似稳条件也是成立的。

二、似稳电流与稳恒电流比较

- 对于似稳电流的瞬时值，有关直流电路的基本概念、电路定律都有效。
- 似稳电流与稳恒电流一样，任何时刻无分支的线路上各个截面的电流相等，电流线连续地通过导体内部，不会在导体的表面上终止。
- 它们以同样的方式激发磁场，可以用毕奥—萨伐尔定律计算磁场，服从安培环路定理。

- $I \ll c/f$ 时， $E(t)$ 看做随时间缓慢变化的“静态场”，在任何时刻，这种电场的旋度为零，因而仍然是一种有势场，不过是随时间变化的有势场。
- 但是，由于趋肤效应的存在，电流密度在导体截面上的分布并不均匀，导线表面的电流密度较大，导线中心处的电流密度则较小，这一点与稳恒电流是不同的。
- 但当似稳电流随时间变化比较缓慢、导线又比较细时，趋肤效应可以忽略。

§ 6.4.2 暂态过程

1. RL 暂态过程

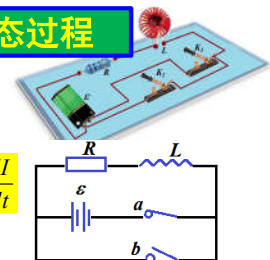
合上 a 点开关

$$IR = \varepsilon_L + \varepsilon \quad \varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

设线圈内阻为零，电感为 L

$$IR = -L \frac{dI}{dt} + \varepsilon \quad \text{初始条件: } I|_{t=0} = 0$$

解为: $I = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$



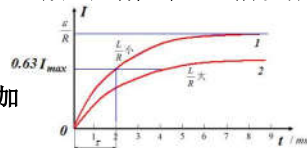
$$\text{令 } \frac{\varepsilon}{R} = I_0, \quad \frac{L}{R} = \tau \quad \rightarrow \quad I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

当 $t \rightarrow \infty, I \rightarrow I_0$ 电感成了一根导线，稳恒电流

$$\text{当 } t = \tau, I = I_0(1 - e^{-1}) = 0.63I_0$$

τ 称回路的时间常数或弛豫时间。由回路的本身因数确定。一般 τ 只有几个 ms，所以称暂态过程。

电流随时间增加



合上 b 点开关

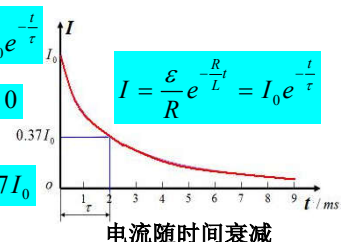
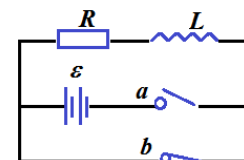
$$IR = \varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

方程解为: $I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

当 $t \rightarrow \infty, I \rightarrow 0$

当

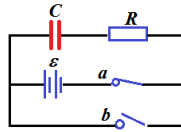
$$t = \tau, I = I_0 e^{-1} = 0.37I_0$$



电流随时间衰减

2. RC暂态过程

合上a点开关 电容器充电



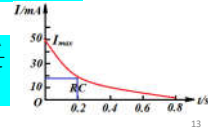
$$\frac{q}{C} + IR = \varepsilon \Rightarrow \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} = \varepsilon$$

初始条件 $q|_{t=0} = 0$

其中 $q_0 = C\varepsilon$
 $\tau = RC$
 $I_0 = \varepsilon / R$

$$q = q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \tau \text{ 为 RC 电路的时间常数}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



电容得到多少能量?

$$U_R = IR = \varepsilon e^{-\frac{t}{\tau}} \quad U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad q_0 = C\varepsilon$$

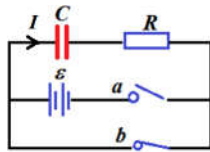
电源做功: $W_i = \int_0^\infty I(t) \varepsilon dt = \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{\varepsilon^2 \tau}{R} = C\varepsilon^2$ 与C有关 与R无关

对电阻做功: $W_R = \int_0^\infty I^2(t) R dt = \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{\varepsilon^2 \tau}{2R} = \frac{C\varepsilon^2}{2}$ 与R无关

电容充电能量 $W_C = \int_0^\infty I(t) U_C(t) dt = \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{C\varepsilon^2}{2}$

$$\tau = RC \quad R \text{ 与充电快慢 } \tau \text{ 有关}$$

合上b点开关 电容器放电

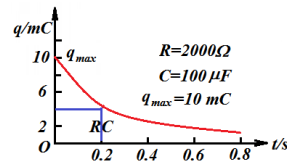


$$\frac{q}{C} + IR = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} = 0$$

初始条件 $q|_{t=0} = q_0 \Rightarrow q = q_0 e^{-t/\tau}$

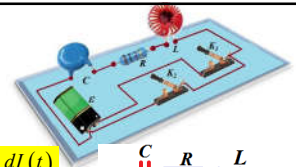
$$I = \frac{dq}{dt} = -I_0 e^{-t/\tau}$$

负值的意义是电流与图标定的方向相反



3. RCL暂态过程

合上a点开关



$$IR + \frac{q}{C} = \varepsilon_L + \varepsilon \quad \varepsilon_L = -L \frac{dI(t)}{dt}$$

$$I = dq / dt, \quad dI / dt = d^2 q / dt^2$$

令 $\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad q_0 = C\varepsilon$
β 阻尼因子, ω₀ 固有频率

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 q_0 \quad \text{初始条件} \begin{cases} q|_{t=0} = 0 \\ \frac{dq}{dt}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

上面微分方程的解分三种情况:

欠阻尼 ($\beta < \omega_0$) $\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$q = q_0 - q_0 e^{-\beta t} \left(\cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \right)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad q \text{ 随时间振荡变化, 称阻尼振荡解}$$

过阻尼 ($\beta > \omega_0$)

$$q = q_0 - \frac{1}{2\gamma} q_0 e^{-\beta t} \left[(\beta + \gamma) e^{\gamma t} - (\beta - \gamma) e^{-\gamma t} \right]$$

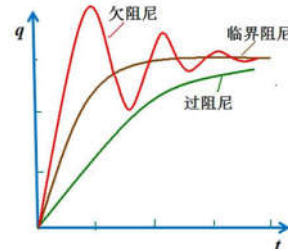
q 随时间单调上升, 且 β 越大, 上升越慢。当 $\beta \rightarrow \infty$ ($L \rightarrow 0$) 时, 回到 RC 电路的结果。

$$\gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

临界阻尼 ($\beta = \omega_0$)

$$q = q_0 - q_0 (1 + \beta t) e^{-\beta t}$$

q 也随时间单调上升, 但比过阻尼上升要快些



合上b点开关

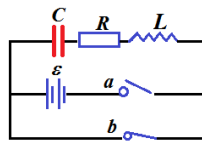
$$L \frac{d^2 q'}{dt^2} + R \frac{dq'}{dt} + \frac{q'}{C} = 0$$

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad q_0 = C\varepsilon$$

$$\frac{d^2 q'}{dt^2} + 2\beta \frac{dq'}{dt} + \omega_0^2 q' = 0$$

初始条件

$$\begin{cases} q'|_{t=0} = q_0 \\ \frac{dq'}{dt}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$



19

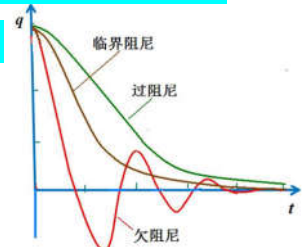
$$q = q_0 e^{-\beta t} \left(\cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \right) \quad \text{欠阻尼}$$

$$q = \frac{1}{2\gamma} q_0 e^{-\beta t} \left[(\beta + \gamma) e^{\gamma t} - (\beta - \gamma) e^{-\gamma t} \right] \quad \text{过阻尼}$$

$$q = q_0 (1 + \beta t) e^{-\beta t} \quad \text{临界阻尼}$$

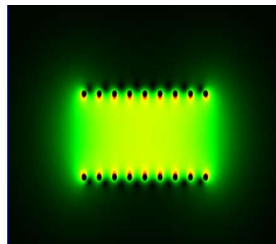
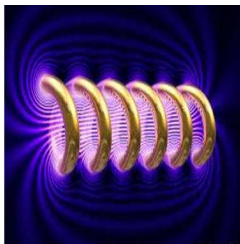
临界阻尼

电容器极板电荷随时间衰减



20

§ 6.5 磁场的能量



磁场的能量存储在磁场所处的空间，而不是线圈上

21

§ 6.5.1 载流线圈系统的磁能

一、单个载流线圈的磁能

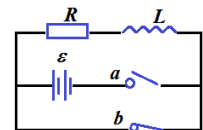
1. 暂态过程的能量

RL暂态过程，撤去电源，则：

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

在电阻中的焦耳热为：

$$dQ = I^2 R dt = I_0^2 R e^{-\frac{2t}{\tau}} dt \quad \text{电源已断开，这个能量从何而来？}$$



22

积分得电阻上的总焦耳热：

$$Q = I_0^2 R \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = I_0^2 R \left[-\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^{\infty} = \frac{\tau R}{2} I_0^2 = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad \text{与线圈自感 } L \text{ 有关}$$

$$\text{其中 } \tau = \frac{L}{R}, I_0 = \frac{\varepsilon}{R} \quad \text{也与 } R \text{ 有关}$$

电阻上产生的焦耳热，来源于电感线圈中的磁能，电感线圈是一个储能元件。

23

接通电源时

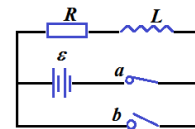
$$\varepsilon + \varepsilon_L = IR \quad \varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

电源提供的能量为 $I\varepsilon$ 转化为焦耳热

$$I\varepsilon = I^2 R + LI \frac{dI}{dt} = I^2 R + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L I^2 \right)$$

克服自感线圈电动势所做的功，储存在电感线圈中。线圈中储存的总能量为：

$$W_m = \int_0^{I_0} d \left(\frac{1}{2} L I^2 \right) = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad \text{撤去电源后，电感中储存的能量转给电阻，电阻上产生焦耳热}$$

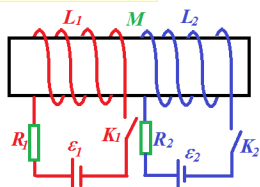


24

2. 互感线圈的磁能

当 L_1 和 L_2 单独存在时, 磁能为:

$$\begin{cases} W_{m1} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2, & I_1 = \frac{\varepsilon_1}{R_1} \\ W_{m2} = \frac{1}{2} L_2 I_2^2, & I_2 = \frac{\varepsilon_2}{R_2} \end{cases}$$



由于 L_2 的存在, 在 L_1 回路中产生的互感电动势为:

$$\varepsilon_{12}' = M \frac{di_2}{dt} \quad \xrightarrow{\text{两边乘以 } I_1 dt} \quad I_1 \varepsilon_{12}' dt = I_1 M di_2$$

当 i_2 从 $0 \rightarrow I_2$ 时, L_1 回路中由于 ε_{12}' 的存在具有的磁能

$$W_{m3} = \int_0^{I_2} I_1 M di_2 = M I_1 I_2$$

25

注意 L_1 和 L_2 之间的互感只有一个, 不必另外计算 I_1 在 L_2 回路中的磁能(可证明上式是两部分互感能之和)。

总磁能为:

$$\begin{cases} W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2, & \text{顺接} \\ W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - M I_1 I_2, & \text{反接} \end{cases}$$

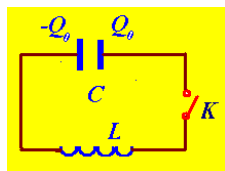
也可以写成对称形式:

$$\begin{cases} W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \frac{1}{2} M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} M_{21} I_2 I_1, & \text{顺接} \\ W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - \frac{1}{2} M_{12} I_1 I_2 - \frac{1}{2} M_{21} I_2 I_1, & \text{反接} \end{cases}$$

26

【例37】一电容 C 蓄有电量 Q_0 , 在 $t=0$ 时刻接通 K , 经自感为 L 的线圈放电, 求:

- (1) L 内磁场能量第一次等于 C 内电场能量的时刻 t_1 ;
- (2) L 内磁场能量第二次达到极大值的时刻 t_2 。



【解】

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} = \frac{Q}{C}$$

两边对 t 求导, 利用

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{C} = 0$$

27

$$I|_{t=0} = 0, \quad Q|_{t=0} = Q_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} I(t) = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \\ Q(t) = Q_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \end{cases}$$

(1) 求 L 内磁能第一次等于 C 内电能的时刻:

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \cos^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

$$t_1 = \frac{\pi}{4} \sqrt{LC} \quad \leftarrow \quad \sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) = \cos^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

28

(2) 求 L 内磁场能量第二次达到极大值的时间:

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

$$I(t) = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

$$\frac{t_2}{\sqrt{LC}} = \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{3\pi}{2} \sqrt{LC}$$

29

二、载流线圈系统的磁能

对每一个线圈来说, 总感应电动势是它本身自感电动势和其他 $n-1$ 个线圈间的互感电动势之和

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -L_{11} \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt} - M_{13} \frac{dI_3}{dt} - \dots - M_{1n} \frac{dI_n}{dt} \\ \varepsilon_2 &= -M_{21} \frac{dI_1}{dt} - L_{22} \frac{dI_2}{dt} - M_{23} \frac{dI_3}{dt} - \dots - M_{2n} \frac{dI_n}{dt} \\ &\vdots \\ \varepsilon_n &= -M_{n1} \frac{dI_1}{dt} - M_{n2} \frac{dI_2}{dt} - M_{n3} \frac{dI_3}{dt} - \dots - L_{nn} \frac{dI_n}{dt} \end{aligned}$$

30

写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{E}_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & L_{22} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dI_1}{dt} \\ \frac{dI_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dI_n}{dt} \end{pmatrix}$$

可以推出

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq k}^n M_{ik} I_i I_k$$

多个线圈的磁能

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n M_{ik} I_i I_k$$

$M_{ii} = L_i$

第 k 个线圈中的电流产生的磁场, 穿过第 i 个线圈, 在第 i 个线圈中产生的磁通量为:

$$\Phi_{ik} = M_{ki} I_k = M_{ik} I_k$$

所有线圈在第 i 个线圈中产生的总磁通量为:

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^N \Phi_{ik} = \sum_{k=1}^N M_{ik} I_k$$

则由:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n M_{ik} I_i I_k \quad \rightarrow \quad W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Phi_i$$

这是多个线圈磁能的另一种表达式

§ 6.5.2 载流线圈在外磁场中的磁能

一、互感磁能

两个线圈系统的磁能为

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

自感磁能

互感磁能

互感磁能即为两个线圈之间的相互作用能

$$W_{\text{互}} = W_{12} = M_{21} I_1 I_2 = \Phi_{21} I_2 = I_2 \iint_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{S}$$

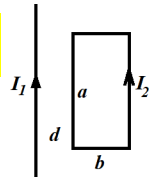
【例38】一无限长直导线和一长为 a 、宽为 b 的矩形线圈在同一平面内, 分别通电流 I_1 和 I_2 , 求它们的互感磁能。

【解】

$$W = M I_1 I_2 = \Phi_{21} I_2 = I_2 \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_1$$

$$dS = adr$$



$$W = I_2 \iint_{S_2} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \cdot dS = I_2 \int_d^{d+b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{d+b}{d}$$

二、均匀外场(或非均匀外场中的小线圈)

单个线圈在外磁场 B 中的磁能:

$$W_m = I \iint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = I \vec{B} \cdot \vec{S} = I \vec{S} \cdot \vec{B} \quad \rightarrow \quad W_m = \vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

N 个线圈在外磁场中的磁能:

$$W_m = \sum_{i=1}^N I_i \iint_{S_i} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

若外磁场均匀, 则

$$W_m = \vec{B} \cdot \left(\sum_{i=1}^N I_i \vec{S}_i \right) = \sum_i \vec{\mu}_i \cdot \vec{B} = \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad \vec{\mu} = \sum_i \vec{\mu}_i$$

所以线圈在均匀外磁场中的磁能为 $W_m = \vec{\mu} \cdot \vec{B}$ $\vec{\mu}$ 为所有线圈磁矩的矢量和, 即总磁矩

§ 6.5.3 磁场的能量和磁能密度

以螺线管为例, 设螺线管长 l , 面积 S , 体积 V , 介质相对磁导率 μ_r

$$H = nI, \quad B = \mu_0 \mu_r nI \quad N = nl$$

螺线管的自感系数为

$$L = \Phi_m / I = NBS / I = \mu_0 \mu_r n^2 V$$

磁能

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} V \mu_0 \mu_r n^2 I^2 \quad \rightarrow \quad W_m = \frac{1}{2} VBH$$

磁能密度: 单位体积的磁能

$$\omega_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

磁场的能量是存储在磁场所处的空间的, 而不是在螺线管的线圈上

上式是普遍适用的，证明如下：

$$\begin{aligned}
 W_m &= \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi_m}{I} I^2 = \frac{1}{2} I \Phi_m = \frac{1}{2} I \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\
 &= \frac{1}{2} I \oint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} I \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \oint_L \vec{A} \cdot I d\vec{l} = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A} \cdot \vec{j} dV \\
 &\quad \because \vec{j} = \nabla \times \vec{H}, \therefore \vec{A} \cdot \vec{j} = \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) \\
 W_m &= \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) dV \\
 &\quad \text{又} \because \nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b}) \\
 \therefore \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) &= \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) + \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A})
 \end{aligned}$$

37

$$\begin{aligned}
 W_m &= \frac{1}{2} \iiint_V \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) dV + \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) dV \\
 &= \frac{1}{2} \oint_{S \rightarrow \infty} (\vec{H} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV \\
 &= \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV \\
 &\quad \vec{A} \sim \frac{1}{R}, \vec{H} \sim \frac{1}{R^2}, \Rightarrow \vec{H} \times \vec{A} \sim \frac{1}{R^3} \\
 &\quad \therefore R \rightarrow \infty, \oint_{S \rightarrow \infty} (\vec{H} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \sim \frac{1}{R^3} R^2 \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

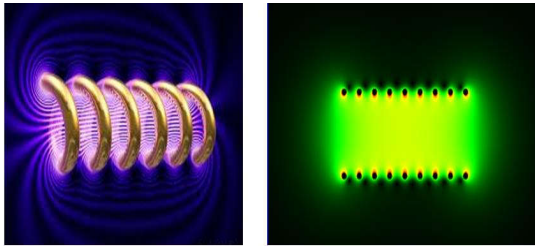
令 $\omega_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$ 为磁能密度

磁场存储在空间的总能量为：

$$W_m = \iiint_V \omega_m dV = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

该式普遍适用

38



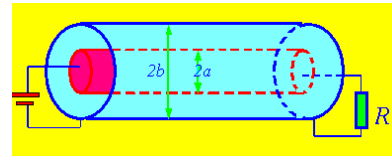
通电螺线管中的磁场和能量分布模拟示意图
螺线管中间很亮，表示能量密度大

39

【例39】一同轴电缆，由半径为 a 的长直导线和半径为 b 的薄圆筒构成，两者间充满介电常数为 ϵ ，磁导率为 μ 的介质，两者之间加一负载 R 和电源时，证明当

$$R = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a}$$

则导线与圆筒之间的电场能量等于磁场能量。

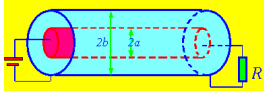


40

【解】先求电场能量，设单位长直导线的电荷密度为 λ ，用有介质时的高斯定理，作柱形高斯面（电场垂直于导线）：

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S \cap V} q_0 \quad 0 + 0 + D \cdot 2\pi r l = \lambda l \quad E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}$$

$$U = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a} \quad \lambda = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} U \quad E = \frac{1}{r} \frac{U}{\ln(b/a)}$$

$$\omega_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{\epsilon}{2} \frac{U^2}{r^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2}$$


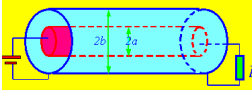
41

再求磁场能量 $H = \frac{I}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi r} \frac{U}{R} \quad B = \mu H$

$$\omega_m = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{\mu}{2} \frac{U^2}{(2\pi R r)^2}$$

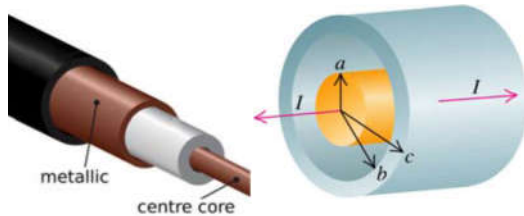
电场能量 = 磁场能量

$$\omega_e V = \omega_m V$$

$$\mu \frac{U^2}{(2\pi R r)^2} = \epsilon \frac{U^2}{r^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2} \Rightarrow R = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a}$$


42

【例40】一个同轴电缆，中心是半径为 a 的实心导线，外部是内半径为 b 、外半径为 c 的导体圆筒，内外导体之间充满相对磁导率为 μ_r 的介质，电流在内外筒中等大、反向且均匀分布，求该电缆单位长度上的自感。



43

【解】由 $W_m = LI^2/2$ 求自感，分4个区分别计算磁能

(1) 实心导线内 $0 \leq r \leq a$ ，无磁介质， $\mu_r = 1$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0 \quad H_1 = \frac{1}{2\pi r} \left(\frac{I}{\pi a^2} \right) \pi r^2 = \frac{Ir}{2\pi a^2} \quad B_1 = \mu_0 H_1$$

磁能密度 $\omega_{m1} = \frac{1}{2} \vec{B}_1 \cdot \vec{H}_1 = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4}$

此区域内的磁能：

$$W_{m1} = \iiint_{V_1} \omega_{m1} dV = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a \omega_{m1} r dr d\phi dz = \frac{\mu_0 l}{16\pi} I^2$$

44

(2) 两圆筒间 $a \leq r \leq b$ ，有磁介质 μ_r

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r} \quad B_2 = \mu_0 \mu_r H_2 = \mu_0 \mu_r \frac{I}{2\pi r}$$

磁能密度

$$\omega_{m2} = \frac{1}{2} \vec{B}_2 \cdot \vec{H}_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{8\pi^2 r^2}$$

此区域内的磁能：

$$W_{m2} = \iiint_{V_2} \omega_{m2} dV = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_a^b \omega_{m2} r dr d\phi dz = \frac{\mu_0 \mu_r l I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

45

(3) 外圆筒 $b \leq r \leq c$ ，无磁介质， $\mu_r = 1$

穿过半径为 r 的环路的总电流为： $\sum I = I - \frac{\pi(r^2 - b^2)}{\pi(c^2 - b^2)} I = \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} I$

$$H_3 = \frac{1}{2\pi r} \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right) I \quad B_3 = \mu_0 H_3$$

$$\omega_{m3} = \frac{1}{2} \vec{B}_3 \cdot \vec{H}_3 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 (c^2 - b^2)^2} (c^4 - 2c^2 r^2 + r^4)$$

$$W_{m3} = \iiint_{V_3} \omega_{m3} r dr d\phi dz = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_b^c \omega_{m3} r dr d\phi dz = \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi (c^2 - b^2)^2} \left(c^4 \ln\left(\frac{c}{b}\right) - \frac{1}{4} (c^2 - b^2)(3c^2 - b^2) \right)$$

46

(4) 圆筒外 $r > c$ ，真空区域， $\mu_r = 1$

总电流 $\sum I = I - I = 0 \quad H_4 = 0 \quad W_{m4} = 0$

同轴电缆的总磁能为：

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} + W_{m4} = \frac{1}{2} LI^2 \quad L = \frac{2W_m}{I^2}$$

单位长度的自感为：

$$L_0 = \frac{L}{l} = \frac{2W_m}{lI^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \mu_r \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{(c^2 - b^2)^2} \left(c^4 \ln\left(\frac{c}{b}\right) - \frac{1}{4} (c^2 - b^2)(3c^2 - b^2) \right) \right]$$

若 $a = R_1$
 $b = c = R_2$
 $\mu_r = 1$



$$L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \right) \text{ 与例35一致}$$

47

自感系数的计算

方法4: 当载有电流 I 的导体(或回路)产生的磁感强度 B 是对称性分布时，磁场能密度 ω 这时也呈对称性，通过积分可以简便地求得整个磁场所具有的总磁能，由总磁能再推算自感系数。

$$L = \frac{2W_m}{I^2}$$

不会出错的解法

48

方法B: 电流 I 通过线圈(回路), 能准确分析线圈回路所包围的范围内, 由此电流形成的磁场的空间分布, 计算磁场穿过自身回路的总磁通或磁通链数。这种方法只适合有规则的、简单的线圈回路。

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

可能会出错的解法

□ “回路”, 要求这一回路还是单一的, 没有与其他回路发生交链。

□ “电流” I , 通常是指线圈之间彼此串接、并且无漏磁的前提条件下线圈中的电流。

49

方法C: 当在回路中通以已知变化率的电流 (di/dt) , 能准确测出回路中的感应电动势 ε_L 时, 可采用测量方法计算 L , 所以这一方法一般适用于工程中。

$$L = -\frac{\varepsilon}{di/dt}$$

50

§ 6.6 非线性介质及磁滞损耗

1. 磁介质存在时的自感和感应电动势

✚ 同一载流线圈, 在真空中与在介质中产生的磁场是不同的, 因而磁能与磁介质有关。

✚ 存在磁介质时, 自感与互感电动势仍定义为:

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt}, \quad \varepsilon_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

介质的存在对磁场的影响反映在自感和互感系数中

无限长螺线管中充满磁介质时:

$$\omega_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r n^2 I^2$$

$$L = 2W_m / I^2 \Rightarrow L = \mu_0 \mu_r n^2 V \quad \text{是无介质存在时的} \mu_r \text{倍}$$

51

2. 线性介质的磁能密度和磁化功

N 匝线圈总磁通的变化

$$d\Psi = Nd\Phi = NSdB$$

电源克服感应电动势所做的功:

$$dA' = -\varepsilon Idt = \frac{d\Psi}{dt} Idt = Id\Psi = NSIdB$$

$$\text{由 } \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = HI = NI \Rightarrow I = \frac{Hl}{N}$$

$$\therefore dA' = VHdB$$

52

单位体积内电源做的元功

$$da' = \frac{dA'}{V} = HdB = \vec{H} \cdot d\vec{B}$$

$$\therefore \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

$$\therefore da' = d\left(\frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) + \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M}$$

宏观磁能密度

磁化功

电源所做的功一部分用来增加宏观磁能, 另一部分为对介质做的磁化功。

53

3. 线性无损耗介质

$$M_j = \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} H_j \quad \chi_{ij} = \chi_{ji}$$

$$d(\vec{M} \cdot \vec{H}) = \vec{M} \cdot d\vec{H} + \vec{H} \cdot d\vec{M}$$

对各向同性介质可证明:

$$\vec{H} \cdot d\vec{M} = \vec{M} \cdot d\vec{H} \quad \text{则} \quad \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M} = d\left(\frac{\mu_0}{2} \vec{M} \cdot \vec{H}\right)$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

磁化能密度

$$\therefore da' = d\left(\frac{\mu_0}{2} H^2 + \frac{\mu_0}{2} \vec{H} \cdot \vec{M}\right) = d\left(\frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}\right) = d\omega_m$$

电源做功全部转化为螺线管的磁能

$$\omega_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{M}$$

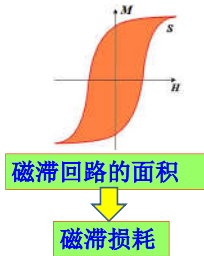
54

4. 非线性磁介质的磁滞损耗

非线性磁介质的磁滞回路显示 H 与 M 的非线性关系

一个周期内所做的功为：

$$A' = \oint_L dA' = \oint_L \mu_0 H dM =$$



这部分功不改变磁场强度 H 和介质的磁化状态 (磁化强度) M ，它所传递的能量将转化为热量

55

