

2022 秋几何学基础期中小测

BY 王作勤

2022 年 11 月 13 日

题目 1. 判断题：(无需写理由)

- 只要假设希尔伯特公理体系中的关联公理成立，就可以证明：过任意直线 l 以及直线 l 外的一点 A ，存在唯一一个平面包含他们。
- 空间任何两个旋转变换可交换。
- 对于空间点 O 处的任意两个单位正交向量 u, v ，一定存在单位向量 w 使得 (u, v, w) 构成 O 点处的右手系。
- 任意二次曲面跟任意平面都不合同。

题目 2. 考虑空间中的三个点 $A(2, 0, 2), B(2, 0, 1), C(1, 1, 3)$ 。

- (a) 计算 $\angle A$ 。
- (b) 计算 $\triangle ABC$ 的面积。
- (c) 计算 A, B, C 三点所在平面的一般方程。
- (d) 从点 $D(7, 3, 0)$ 向平面 ABC 做垂线，计算垂足坐标。
- (e) 计算直线 AB 到直线 CD 之间的距离。

题目 3. 考虑空间两个点 $P(1, 0, 3), Q(3, 0, -1)$ 。

- (a) 若 ϕ 是把 P 映射到 Q 的平移变换，求 ϕ 的表达式。
- (b) 若 ϕ 是把 P 映射到 Q 的反射变换，求 ϕ 的表达式。
- (c) 若 ϕ 是把 P 映射到 Q 的旋转变换 (旋转变换过原点)，求 ϕ 的表达式 (不唯一，求出一个即可)。

题目 4. 下属方程均表示 \mathbb{R}^3 中的曲面。作它们在坐标系里的简图【要求在图上标示一两个特殊点的坐标】。

- (a) $x^2 + z^2 = 9$ 。
- (b) $x^2 + y^2 + z = 1$ 。
- (c) $-x^2 - y^2 + z^2 = 0$ 。
- (d) $x + y + z = 3, x, y, z \geq 0$ 。

题目 5. 设空间中三个向量 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ 满足

$$\vec{OA} \times \vec{OB} + \vec{OB} \times \vec{OC} + \vec{OC} \times \vec{OA} = 0$$

- (a) 求证： $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ 三个向量共面。
- (b) 求证： A, B, C 三个点共线。