第八周作业答案

罗曾宇

题目 1. 考虑两列振幅相同，偏振方向相同，频率分别为 $\omega + \mathrm{d}\omega$ 和 $\omega - \mathrm{d}\omega$ 的线偏振平面波，它们都沿 z 轴方向传播.

(1) 求合成波，证明波的振幅不是常数，而是一个波；

(2) 求合成波的相位传播速度和振幅传播速度.

解答.

(1) 设两列波的波数分别为 $k_1 = k + \mathrm{d}k, k_2 = k - \mathrm{d}k$，初始相位分别为 φ_1, φ_2，设它们都沿 x 方向偏振，振幅为 E_0，即

$$\boldsymbol{E_1} = E_0 \boldsymbol{e_x} e^{i[(k+\mathrm{d}k)z-(\omega+\mathrm{d}\omega)t+\varphi_1]}, \boldsymbol{E_2} = E_0 \boldsymbol{e_x} e^{i[(k-\mathrm{d}k)z-(\omega-\mathrm{d}\omega)t+\varphi_2]},$$

于是合成波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E_2} = 2E_0 \boldsymbol{e_x} \cos\left(\mathrm{d}kz - \mathrm{d}\omega z + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) e^{i(kz - wt + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2})},$$

仍是 x 方向的线偏振波，其实数形式为

$$\boldsymbol{E} = 2E_0 \cos\left(\mathrm{d}kz - \mathrm{d}\omega z + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(kz - wt + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \boldsymbol{e_x},$$

波的振幅为 $2E_0 \cos\left(\mathrm{d}kz - \mathrm{d}\omega z + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$，不是一个常数，而是一个波.

(2) 等相位面方程为 $\phi = kz - \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} =$ 常数，对它求时间的导数，得相速度

$$v_p = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k},$$

等振幅面方程为 $2E_0\cos(\mathrm{d}k-\mathrm{d}\omega t)=$ 常数，对此求时间的导数，得振幅传播速度

$$v_g=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k},$$

它是波包整体的速度，即群速度.

题目 2. 一平面电磁波以 $\theta=45^\circ$ 从真空入射到 $\epsilon_r=2$ 的介质，电场强度垂直于入射面. 求反射系数和折射系数.

解答. 设介质是非铁磁性且线性均匀的，即 $\mu_r=1$(这个假设没那么特殊，大部分介质的 μ_r 都接近于 1). 折射率 $n_{21}=\sqrt{\mu_r\epsilon_r}=\sqrt{2}$，因为入射角 $\theta=45^\circ$，由折射定律

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta_1}=n_{21},$$

得

$$\sin\theta_1=\frac{1}{2},\cos\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

即折射角 $\theta_1=30^\circ$，当 $\boldsymbol{E}$ 垂直于入射面时，由边值关系

$$E+E_R=E_T,H\cos\theta-H_R\cos\theta=H_T\cos\theta_1,$$

以及 $H=\sqrt{\dfrac{\epsilon_0}{\mu_0}}E,H_R=\sqrt{\dfrac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_R,H_T=\sqrt{\dfrac{\epsilon_r\epsilon_0}{\mu_0}}E_T$，可解出 E_R，反射系数为

$$R=|\frac{E_R}{E}|^2=7-4\sqrt{3}=0.072,$$

不考虑介质损耗时，折射系数为

$$T=1-R=\frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=0.928.$$

题目 3. 频率为 ω 的电磁波在各向异性介质中传播时，若 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{D},\boldsymbol{B},\boldsymbol{H}$ 仍按 $e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$ 变化，但 $\boldsymbol{D}$ 不再与 $\boldsymbol{E}$ 平行 (即 $\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$ 不成立).

(1) 证明 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}=0$，但一般 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}\neq 0$.

(2) 证明 $\boldsymbol{D}=\dfrac{1}{\omega^2\mu}[k^2\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{k}]$.

(3) 证明能流 $\boldsymbol{S}$ 与波矢 $\boldsymbol{k}$ 一般不在同一方向上.

解答.

(1) 设介质内 $\rho_f=0,\boldsymbol{J_f}=0$，即介质中的场方程为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0,\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B},\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},$$

设 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 成立,将 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E_0}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)},\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D_0}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B_0}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)},\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H_0}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$ 代入上述场方程，得

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D}=0,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=0,\boldsymbol{B}=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E},\boldsymbol{D}=-\frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=0,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}=0,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{k}\cdot\frac{\boldsymbol{D}}{\epsilon}=0,$$

其中 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}\neq 0$ 是由于 $\boldsymbol{D}\neq\epsilon\boldsymbol{E}$.

(2)$\boldsymbol{D}=-\dfrac{1}{\omega^2\mu}\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})=\dfrac{1}{\omega^2\mu}[k^2\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{k}]$.

(3) 因为 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}\neq 0$，故 $\boldsymbol{D}$ 与电场 $\boldsymbol{E}$ 不同向. 介质中的能流密度为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})=\frac{1}{\omega\mu}[E^2\boldsymbol{k}-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}],$$

显然，$\boldsymbol{S}$ 与波矢 $\boldsymbol{k}$ 不在同一方向.

题目 4. 有两个频率与振幅都相等的单色平面波沿 z 轴传播，一个波沿 x 方向偏振，另一个沿 y 方向偏振，但相位比前者超前 $\pi/2$，求合成波的偏振.

反之，一个圆偏振可以分解为怎样的两个线偏振？

解答. 两个波的波矢量均为 $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e_z}$，设振幅均为 E_0，有

$$\boldsymbol{E_1} = E_0\boldsymbol{e_x}e^{i(kz-\omega t)},$$

$$\boldsymbol{E_2} = E_0\boldsymbol{e_y}e^{i(kz-\omega t-\pi/2)} = iE_0\boldsymbol{e_y}e^{i(kz-\omega t)},$$

于是合成波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E_2} = E_0(\boldsymbol{e_x} + i\boldsymbol{e_y})e^{i(kz-\omega t)},$$

是振幅为 E_0 的圆偏振波，在迎着传播方向看来，电场 $\boldsymbol{E}$ 逆时针旋转，所以是右旋的圆偏振波. 若 $\boldsymbol{E_2}$ 的相位比 $\boldsymbol{E_1}$ 滞后 $\frac{\pi}{2}$，则合成波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E_2} = E_0(\boldsymbol{e_x} - i\boldsymbol{e_y})e^{i(kz-\omega t)},$$

是左旋的圆偏振波. 若 $\boldsymbol{E_1}$ 和 $\boldsymbol{E_2}$ 的振幅不等，则合成波是右旋或左旋的椭圆偏振波. 反之，一个圆 (或椭圆) 偏振波可以分解为两个互相独立，相位差为 $\pm\frac{\pi}{2}$ 的线偏振波.

题目 5. 思考题，不做要求，一般来说不会发布答案 (因为刘老师希望同学们独立思考). 但是这次错的比较多，属于例外.

电磁场具有动能，当电磁波入射到物体表面时，通过动量计算单色会对物体表面施加一定的压力，称之为辐射压。平面波入射到理想导体表面所产生的辐射压强。

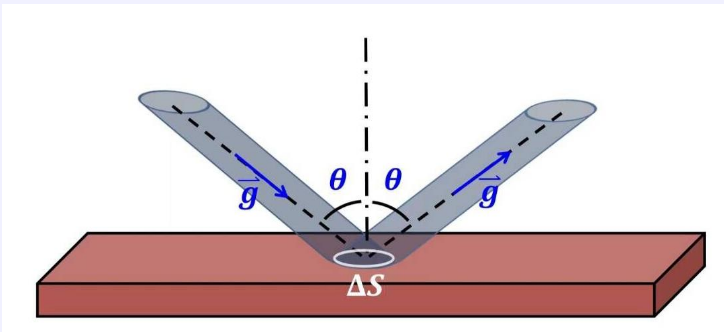

图 1: 思考题图

解答. 电磁场的动量密度

$$\boldsymbol{g} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B},$$

对于理想导体而言，电导率趋于无穷，因而电磁波的趋肤深度趋于零，也就是说，可以认为是“弹性碰撞”.

由动量定理

$$2g\cos\theta \mathrm{d}V = P\mathrm{d}S\mathrm{d}t,$$

其中 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}S\cos\theta c\mathrm{d}t$, 所以辐射压

$$P = 2gc\cos^2\theta.$$

(也叫光压)