线性代数的应用

黄瑞川 PB22000282

2023 年 12 月 12 日

摘要

本文主要总结了利用线性代数知识，对欧式空间中具有一定距离约束的点的数目进行估计。给出了对 $m(n,s)$[1]的估计，以及其在一些限制下的估计。

关键词： 线性相关　欧氏空间　距离

[1]m(s,n) 为 n 维空间中最大的点数，满足它们之间距离不超过 s 种

目录

1 Introduction

问题：对于 n 维欧氏空间中，至多存在多少个点，满足任意两点间的距离相等?

我第一次看见这个问题是在一本线性代数的书中 [1] 所看到，但当时是用归纳的方法来解决这个问题。

分析：对于一维欧式空间，答案很显然是 1；对于二维欧式空间，自然想到是等边三角形，答案是 3；对于三维欧式空间，自然会想到正四面体，答案是 4。从而我们自然会想到归纳，对于 n 维欧式空间，至多存在 n+1 个点，满足任意两点间的距离相等。

引理 1.1. *若 k 维空间中存在 $k+1$ 个点彼此距离均等，那么这些点当中任意 $m(m \leq k+1)$ 个必不在同一个 $m-2$ 维空间中。也就是说这其中任意 m 个点线性独立，他们确定一个 $m-1$ 维子空间。*

证明. 由归纳假设，$m-2$ 维空间中最多 $m-1$ 个点，满足它们之间两两距离相等，从而引理得证。 □

有了这个引理，我们来归纳证明我们的问题。

证明. (数学归纳法) 假设对于所有 k<n，k 维空间中都至多有 k+1 个点距离两两相等。尝试证明 n (n≥3) 维空间中也最多有 n+1 个。

若存在 $n+2$ 个点满足条件，则取其中三个点，它们确定一个二维空间，记为 X。另取两个点 P_1, P_2，则直线 P_1P_2 垂直于空间 X。一个平面和一条垂直于这个平面的直线确定了一个 3 维空间 (1.1)，而这个三维空间中有 ABC 和 P_1、P_2，这五个点之间距离两两相等了，与归纳假设矛盾。故 n 维欧氏空间中，至多存在 $n-1$ 个点，满足任意两点间的距离相等。

□

在这个证明中用到了一些线性代数的知识，但对于距离的刻画并不是很清晰，下面我们给出一个对距离刻画更加清晰的线性代数做法。

引理 1.2.

$$rank(\mathbf{AA^T}) = rank(\mathbf{A^TA}) = rank(\mathbf{A})$$

证明. 方程 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 与 $\mathbf{A^TAx} = \mathbf{0}$ 同解，方程 $\mathbf{A^Tx} = \mathbf{0}$ 与 $\mathbf{AA^Tx} = \mathbf{0}$ 同解，通过解空间的维数公式可知引理成立。 □

引理 1.3. $\frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{11^T})$ 的逆可写成 $2(\mathbf{I} + \mathbf{k11^T})$ 的形式。

证明. 通过待定系数法，可以得出 k 的值。 □

有了上面两个引理，我们进而来证明我们的问题。

证明. 若 n 维空间中存在 $n+2$ 个点满足它们之间任意两点距离相等，不妨选定一点 x_{n+2} 作为坐标原点且距离均为 1，则条件变为

$$|\mathbf{x_1}| = |\mathbf{x_2}| == ... = |\mathbf{x_{n+1}}| = \mathbf{1}, \text{且} |\mathbf{x_i} - \mathbf{x_j}| = \mathbf{1}, \forall \mathbf{i} \neq \mathbf{j}$$

那么容易得到 $\mathbf{x_i} \cdot \mathbf{x_j} = \mathbf{\frac{1}{2}}, \forall \mathbf{i} \neq \mathbf{j}$

定义矩阵 $\mathbf{A}$ 满足

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1^T} \\ \mathbf{x_2^T} \\ ... \\ \mathbf{x_{n+1}^T} \end{bmatrix}$$

$$\text{则} \mathbf{AA^T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & ... & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & ... & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & ... & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & ... & 1 \end{bmatrix}$$

即 $\mathbf{AA^T} = \mathbf{\frac{1}{2}}(\mathbf{I} + \mathbf{11^T})$

由1.2, $rank(\mathbf{AA^T}) = rank(\mathbf{A}) \leq n$。又由1.3知, $\mathbf{AA^T}$ 可逆, 即 $rank(\mathbf{AA^T}) = \mathbf{n+1}$。矛盾!

故 n 维空间中，至多 n+1 个点满足两两间距离相等。 □

注 1.1. *事实上，可以证明 n 维空间中，n+1 个两两距离相等的点，在一个 n-1 维球面上。*

2 two-distance set in $\mathbb{R}^n$

定义 2.1. *我们称一个集合为 two-distance set，如果集合中的任意两点距离不超过两种。我们用 $m(n)$ 来表示 $\mathbb{R}^n$ 中 two-distance set 中点的最大数量。*

定理 2.2.

$$\frac{n(n+1)}{2} \leq m(n) \leq \frac{(n+1)(n+4)}{2}.$$

证明. 证明分为两步，我们先给出对下界的估计。

下界的估计通过一个构造来完成，$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2, x_i \in \{0,1,2\}$，满足这样的点在 $\mathbb{R}^n$ 中有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个，它们之间的距离为 2 或 $\sqrt{2}$，从而是一个 two-distance set。所以 $m(n) \geq \frac{n(n+1)}{2}$，得到了对下界的估计。

接着我们来进行对上界的估计。记满足条件的集合为 $\{\mathbf{a_i}|1 \leq i \leq m\}$ 构造函数

$$F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 - \delta_1^2)(|\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2 - \delta_2^2), \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

这个函数将我们的条件进行了较好的刻画：

$$F(\mathbf{a_i},\mathbf{a_j}) = \begin{cases} (\delta_1\delta_2)^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

我们定义 $f_i(x) := F(\mathbf{x},\mathbf{a_i})$。断言 $f_1, f_2, ..., f_m$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关。

假设有

$$\lambda_1 f_1(\mathbf{x}) + ... + \lambda_m f_m(\mathbf{x}) = 0 \tag{2}$$

代入 $\mathbf{x} = \mathbf{a_j}$，即得 $\lambda_j f_j(\mathbf{a_j}) = 0$，从而系数 $\lambda_j = 0$，这样我们就有系数全为 0，故线性无关得证。

又所有的 f_i 可以被如下多项式线性表示 ($\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ 由定义可知)

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)^2, \quad (\sum_{k=1}^{n} x_k^2) \cdot x_j, \quad x_i x_j, \quad 1. (\text{i,j 从 1 到 n}) \tag{3}$$

上面的多项式共有 $1 + n + n(n+1)/2 + n + 1 = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$ 个。因此所以 f_i 属于一个维数小于等于 $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ 的线性空间，又它们之间线性无关，从而 $m \leq \frac{(n+1)(n+4)}{2}$。 □

这个定理来源于 [2]，D. G. 由 Larman, C. A. Rogers 和 J. J. Seidel 在 1977 年提出。

事实上通过同样的方法，我们可以研究 s-distance set in $\mathbb{R}^n$ 的最大数量点集，这里我们不加证明得给出结果。

定理 2.3. 令 *m(s,n)* 为 *n* 维空间中最大的点数，满足它们之间距离不超过 *s* 种，则有如下估计：

$$\binom{n+1}{s} \leq m(n, s) \leq \binom{n+s+1}{s}$$

联系之前的 1-distance set in $\mathbb{R}^n$，我们很容易提出这样一个问题，如果将点限制在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 即 n-1 维球面上时，对于点数的最大值会有什么样的估计。

定理 2.4. $\mathbb{S}^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | |\mathbf{x}| = 1\}$。一个球面 *2-distance set* 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的一个 *2-distance set*。令 $m_s(n)$ 为球面 *2-distance set* 的最大点数，则有

$$\frac{n(n+1)}{2} \leq m_s(n) \leq \frac{n(n+3)}{2}$$

证明. 同样按照 2-distance set 的做法，只需注意到在 9 中，$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$，x_n^2 可被 $\sum_{k=1}^{n-1}$ 表示。则 f_i 被如下多项式表示：

$$x_i x_j (1 \leq i < j \leq n), \quad x_i^2 (1 \leq i \leq n-1), \quad x_i (1 \leq i \leq n), \quad 1$$

从而 $m_s(n) \leq \frac{n(n+3)}{2}$.

而对于下界的估计,我们考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位向量 $\mathbf{e_i}$,令 $A=\{\mathbf{e_i}+\mathbf{e_j}|\mathbf{1}\leq \mathbf{i}<\mathbf{j}\leq \mathbf{n+1}\}$ 共有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个，它们之间的距离为 2 或 $\sqrt{2}$，A 可以看作一个 n 维球面与子空间 $\sum_{k=1}^{n+1}x_k=2$ 的交集，从而得到一个 n-1 维球面 (虽然半径不为 1，但显然半径并不影响我们的问题), 我们就得到了 $\mathbb{S}^{n-1}$ 中 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个满足条件的点。所以 $m_s(n)\geq\frac{n(n+1)}{2}$ □

3 对 m(n) 更精细的估计

一个比较直接的思路就是，在9中去掉一些项，使得它们仍然能够线性表示 f_i，从而得到对上界更加精细的估计。

定理 3.1. *(Blokhuis, 1981)[3]*

$$m(n)\leq\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

证明. 令 $\mathbf{a_i}=(\alpha_{i1},...,\alpha_{in})$，$1\leq i\leq m$

考虑线性组合

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i+\mu_0+\sum_{j=1}^{n}\mu_j x_j=0 \tag{4}$$

我们想要证明系数均为 0。为了简便，我们对原来的 F 乘上一个 $\frac{1}{(\delta_1\delta_2)^2}$

将 $\mathbf{a_s}$ 代入4，即得

$$\lambda_s+\sum_{t=1}^{n}\mu_t\alpha_{st}+\mu_0=0 \tag{5}$$

将 $k\mathbf{e_i}$ 代入4，我们得到

$$\frac{1}{(\delta_1\delta_2)^2}\sum_{t=1}^{m}\lambda_t(k^2-2k\alpha_{ti}+|\mathbf{a_t}|-\delta_1^2)(k^2-2k\alpha_{ti}+|\mathbf{a_t}|-\delta_2^2)+k\mu_i+\mu_0=0 \tag{6}$$

两边对比 k^4 和 k^2 的系数，就得到

$$\sum_{s=1}^{m}\lambda_s=0 \quad 和 \quad \sum_{s=1}^{m}\lambda_s\alpha_{si}=0 \tag{7}$$

对于 i=1,2,...,n 成立

将5与 λ_s 相乘，s 从 1 到 m 求和，得到

$$\sum_{s=1}^{m}\lambda_s^2+\sum_{t=1}^{n}\mu_i\sum_{s=1}^{m}\lambda_s\alpha_{si}+\mu_0\sum_{s=1}^{m}\lambda_s=0 \tag{8}$$

7和8推出 $\lambda_s=0$，对任意 $1\le s\le m$ 成立，继而有 $\mu_0=\mu_i=0,1\le i\le n$。即系数均为 0。

从而 $f_i(1\le i\le m),x_i(1\le i\le n),1$ 线性无关，且可被可以被如下多项式线性表示 ($\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$)

$$(\sum_{k=1}^{n}x_k^2)^2,\quad (\sum_{k=1}^{n}x_k^2)\cdot x_j,\quad x_ix_j,\quad 1.(\text{i,j 从 1 到 n}) \tag{9}$$

从而有 $m+n+1\le\frac{(n+1)(n+4)}{2}$，化简后即为我们要证的结论。

□

参考文献

[1] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley, 2016.

[2] D. G. Larman, C. A. Rogers, and J. J. Seidel. On Two-Distance Sets in Euclidean Space. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 9(3):261–267, 11 1977.

[3] A. Blokhuis. A new upper bound for the cardinality of 2-distance sets in euclidean space. In M. Rosenfeld and J. Zaks, editors, *Annals of Discrete Mathematics (20): Convexity and Graph Theory*, volume 87 of *North-Holland Mathematics Studies*, pages 65–66. North-Holland, 1984.