12.3.1 收敛性定理的证明

定理 1 (Dirichlet) 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期,

1° 如果函数在任何有限区间上是逐段光滑的, 则它的 Fourier 级数在整个数轴上都收敛, 且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2};$$

2° 如果函数处处连续, 且在任何有限区间上是逐段光滑的, 则其 Fourier 级数就在整个数轴上绝对一致收敛于 $f(x)$.

注, 这里所谓函数 $f(x)$ 在有限区间上逐段光滑是指函数除有限个点外, $f(x)$ 连续且有连续的微商 $f'(x)$, 而这有限个点只能是 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 的第一类间断点.

设 $f(x)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上可积或绝对可积函数, a_n, b_n 是 f 的 Fourier 系数, 即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

在 x_0 点, Fourier 级数的部分和为

$$T_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0\right).$$

将 Fourier 系数的表达式

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx,$$

代入部分和中, 可得

$$T_n(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\big(\cos kx\cos kx_0+\sin kx\sin kx_0\big)dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-x_0)\right)dx.$$

记 $K_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx$, 即,

$$K_n(x)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},\ x\neq 2m\pi,\ m\in\mathbb{Z}\tag{12.1}$$

称为 Dirichlet **核函数**, 是一个以 2π 为周期的偶函数.

引理 1 (Riemann-Lebesgue) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上可积或绝对可积函数(即, 若 f 有界, 则 f Riemann 可积; 若 f 无界, 则 $|f|$ 广义可积), 则有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0.$$

$$
\begin{aligned}
T_n(x_0) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(x-x_0)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(x)K_n(x-x_0)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+x_0)K_n(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+x_0)K_n(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+x_0)K_n(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+x_0)K_n(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(-x+x_0)K_n(x)\,dx,
\end{aligned}
$$

所以

$$
T_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2\sin\frac{x}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})x\,dx. \tag{12.2}
$$

|◄ ►| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

取充分小的正数 δ, 将 (11.2) 式右端的积分分为两个部分, 有

$$T_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} F(x,x_0)\sin(n+\frac{1}{2})x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} F(x,x_0)\sin(n+\frac{1}{2})x\,dx \tag{12.3}$$

其中

$$F(x,x_0) := \frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

在 $[\delta,\pi]$ 上可积或绝对可积. 由 Riemann-Lebesgue 引理(即, 引理 1)知 (11.3) 式右端第二个积分当 $n\to+\infty$ 时极限为 0. 因此 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 是否收敛, 以及收敛到什么值只与积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2\sin\frac{x}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})x\,dx \tag{12.4}$$

有关. 由于 (11.4) 式的积分只与 f 在 x_0 附近的值有关, 因此我们得到下面局部化定理.

定理 2 (局部化定理) 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积. 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 是否收敛以及收敛到什么值, 只与 $f(x)$ 在 x_0 的附近的值有关.

注意　根据定义, Fourier 系数与 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的值有关. 因此局部化定理体现了 Fourier 级数特别之处.

进一步有如下定理.

定理 3 (Dini 定理) 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积. 对于实数 s, 令

$$\varphi(t) = f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2s.$$

若存在 $\delta > 0$, 使得函数 $\frac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0,\delta]$ 上可积或绝对可积, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 s.

证明　常值函数 1 的 Fourier 级数仍是 1, 所以在 (12.2) 中令 $f = 1$, 可得

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx. \tag{12.5}$$

将 (11.2) 式减去 (11.5) 式的 s 倍, 得

$$\begin{aligned} T_n(x_0) - s &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)-2s}{2\sin\frac{x}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})x\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varphi(x)}{2\sin\frac{x}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})x\,dx. \end{aligned} \tag{12.6}$$

因为根据条件 $\frac{\varphi(x)}{x}$ 在 $[0,\delta]$ 上可积或绝对可积, 所以

$$\frac{\varphi(x)}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\varphi(x)}{x}\cdot\frac{x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

也在 $[0,\delta]$ 上可积或绝对可积, 因此此函数在 $[0,\pi]$ 上也可积或绝对可积. 由 Riemann-Lebesgue 引理知, (11.6) 式右端的积分当 $n\to+\infty$ 时趋于 0, 即

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x_0) = s.$$

定义 1 设 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义. 如果存在 $\delta > 0$, $L > 0$ 及 $\alpha > 0$ 使得

$$|f(x_0+t) - f(x_0+0)| \leqslant Lt^{\alpha};\ t \in (0,\delta]$$
$$|f(x_0-t) - f(x_0-0)| \leqslant Lt^{\alpha},\ t \in (0,\delta]$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 附近满足 α 阶 Lipschitz 条件.

由 Dini 定理, 可以得到如下定理

定理 4 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积. 若 $f(x)$ 在 x_0 附近满足 α 阶 Lipschitz 条件, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 收敛于

$$s = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

证明 当 $t \in (0, \delta]$ 时, 令

$$\begin{aligned}
\varphi(t) :&= \big(f(x_0+t)+f(x_0-t)\big)-2s \\
&= \big(f(x_0+t)+f(x_0-t)\big)-\big(f(x_0+0)+f(x_0-0)\big) \\
&= \big(f(x_0+t)-f(x_0+0)\big)+\big(f(x_0-t)-f(x_0-0)\big).
\end{aligned}$$

则有

$$|\varphi(x)| \leqslant 2Lt^{\alpha}.$$

所以

$$\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| \leqslant 2L \cdot \frac{1}{t^{1-\alpha}}, \quad 0 < t \leqslant \delta.$$

当 $\alpha \geqslant 1$ 时, $\frac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0, \delta]$ 上有界且可积. 当 $0 < \alpha < 1$ 时, $\frac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0, \delta]$ 上绝对可积. 根据定理 3 (Dini 定理) 知, $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 收敛于

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

定理 5 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积. 若 $f(x)$ 在 x_0 可导, 或在 x_0 有有限的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右 $f'_+(x_0)$, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 收敛于 $f(x_0)$. 若 $f(x)$ 在 x_0 仅有两个有限的广义左、右导数:

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t},\quad \lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t},$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 收敛于

$$s=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

证明 若 $f(x)$ 在 x_0 有两个有限的广义左导数和广义右导数, 则 $f(x)$ 在 x_0 附近满足 1 阶 Lipschitz 条件. 因此结论成立.

当 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期, 连续且光滑的函数时, $f'(x)$ 也是连续且以 2π 为周期的函数, 因而在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且平方可积. 设 a_n, b_n 和 a'_n, b'_n 分别是 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的 Fourier 系数, 则

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ &= f(x)\cdot\frac{\sin nx}{n\pi}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx. \end{aligned}$$

因而 $a_n = -\frac{b'_n}{n}$. 同理有 $b_n = \frac{a'_n}{n}$. 由关于 $f'(x)$ 的 Bessel 不等式, 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big((a'_n)^2+(b'_n)^2\Big)$ 收敛. 又因为

$$\begin{aligned} \big|a_n\cos nx + b_n\sin nx\big| &\leqslant |a_n| + |b_n| \leqslant |b'_n|\cdot\frac{1}{n} + |a'_n|\cdot\frac{1}{n} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\Big((a'_n)^2+(b'_n)^2\Big) + \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对一致收敛.

例 1　记三角多项式 $\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$ 的部分和为

$$S_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\,.$$

若有子列 $\{S_{n_k}(x)\}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 则 $\{\alpha_0,\alpha_n,\beta_n\}$ 是 $f(x)$ Fourier 系数.

证明　因为 $S_n(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 所以 $f(x)$ 也在 $[-\pi,\pi]$ 上连续. 记 $\{a_0,a_n,b_n\}$ 是 $f(x)$ Fourier 系数. 有

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{k\to\infty}S_{n_k}(x)\,dx\\&=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_{n_k}(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\langle 1,S_{n_k}(x)\rangle\\&=\alpha_0,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{k\to\infty} S_{n_k}(x)\cos nx\,dx \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{n_k}(x)\cos nx\,dx = \lim_{k\to\infty}\langle \cos nx, S_{n_k}(x)\rangle \\
&= \alpha_n,
\end{aligned}
$$

同理, 有

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{k\to\infty} S_{n_k}(x)\sin nx\,dx \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{n_k}(x)\sin nx\,dx = \lim_{k\to\infty}\langle \sin nx, S_{n_k}(x)\rangle \\
&= \beta_n.
\end{aligned}
$$

例 2 设 $f \in R([-\pi, \pi])$ 且以 2π 为周期, $|f(x)| \leqslant M$, $(x \in [-\pi, \pi])$. 求证: 存在常数 $A > 0$ 使得

$$|T_n(x)| \leqslant AM \ln n, \ \ (n \geqslant 2)$$

这里 $T_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和.

证明 根据 Fourier 级数部分和的积分表示 (12.2), 有

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[f(x+t) + f(x-t) \right] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} \, dt.$$

注意到当 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 有 $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x$. 根据条件, 我们有

$$\begin{aligned} |T_n(x)| &\leqslant \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right|}{2 \sin \frac{t}{2}} \, dt \leqslant \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right|}{2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{t}{2}} \, dt \\ &= M \int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right|}{t} \, dt \end{aligned}$$

取 $\delta=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$, 则有

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{t}\,dt&=\int_0^{\delta}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{t}\,dt+\int_{\delta}^{\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{t}\,dt\\&\leqslant\int_0^{\delta}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt+\int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{t}\,dt\\&=1+\ln\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]\\&<5\ln n,\ (n\geqslant 2).\end{aligned}$$

于是

$$|T_n(x)|\leqslant 5M\ln n,\ (n\geqslant 2).$$

问题 1　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln(n+1)}$$

是否是某个在 $[-\pi, \pi]$ 上可积且平方可积函数的 Fourier 的级数?

问题 2　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

是否是某个在 $[-\pi, \pi]$ 上可积且平方可积函数的 Fourier 的级数?