中国科学技术大学期中试卷
2024-2025 学年第一学期

课程名称: 泛函分析 . 课程编号: MATH3004.02

考试时间2024年10月23日 9：45-11：45 考试形式: 闭卷

学生姓名: ____________ 学　　号: ____________

1.（每题5分）请从4个选项中选出唯一正确的选项。如果正确选项数个数不是1，请填写E。

(1) 设X, Y为度量空间，$f : X \to Y$为连续映射。那么下列命题一定成立的是

(A) 任给$\epsilon > 0$，存在$\delta > 0$, 使得对于任意的x_0，只要$d(x, x_0) < \delta$，就有$d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$;

(B) 任给$\epsilon > 0$，存在$\delta > 0$, 使得对于任意的x_0，只要$d(f(x), f(x_0)) < \delta$，就有$d(x, x_0) < \epsilon$;

(C) 任给$\epsilon > 0$，对于任意的x_0, 存在$\delta > 0$, 使得只要$d(x, x_0) < \delta$，就有$d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$;

(D) 任给$\epsilon > 0$，对于任意的x_0，存在$\delta > 0$, 使得只要$d(f(x), f(x_0)) < \delta$，就有$d(x, x_0) < \epsilon$.

(2) 以下正确的是

(A) Banach空间上的自列紧集都是有界闭集;

(B) Banach空间上的列紧集都是有界闭集;

(C) Banach空间上的有界闭集都是列紧集;

(D) Banach空间上的有界闭集都是自列紧集;

(3) 下列$\mathbb{R}^n$中的范数，哪个最强

(A) $||x||_{l^1} = \sum_{i=1}^n |x_i|$; (B) $||x||_{l^2} = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}$; (C) $||x||_{l^\infty} = \max_{i=1}^n |x_i|$; (D) 它们一样强。

(4) 假设C是Banach空间X中包含0的闭凸集，$P : X \to [0, \infty]$为相应的Minkowski泛函。以下**错误**的是

(A) P总是下半连续的；

(B) $C = \{x \in X | P(x) \leq 1\}$；

(C) 如果C是有界的，那么$P(x) = 0$当且仅当$x = 0$；

(D) 如果C是吸收的，那么$P(x)$是一致连续的。

(5) 以下说法**错误**的是

(A) 设C是 Banach空间X中的自列紧凸子集，$T : C \to C$连续，那么T在C上必有不动点。

(B) 设C是Banach空间X中的有界闭凸子集，$T : C \to C$连续且$T(C)$被一个有限维子空间包含，那么T在C上必有不动点。

(C) 设C是 Banach空间X中的闭凸子集，$T : C \to C$连续且$T(C)$列紧，那么T在C上必有唯一的不动点。

(D) 设C是 Banach空间X中的闭子集，$T : C \to C$为压缩映射，那么T在C上必有唯一的不动点。

(6) 以下哪个空间是内积空间

(A) $L^1[0,1]$; (B) $L^2[0,1]$; (C) $L^\infty[0,1]$; (D) 它们都是。

答案：CADDCB

2. 拿破轮曾经说过："不想拿诺贝尔物理学奖的学生不是机器学习方向的好学生"（不信的话，请去西虹市汽车修理厂寻找一位拿着破车轮的师傅求证）。机器学习需要使用权重函数来训练机器，调节参数以适应用户需求。现在我们假设在实值$L^2[0,1]$上，使用权重函数$w(x)=1+x$来定义内积：

$$(f,g)_w=\int_0^1(1+x)f(x)g(x)dx.$$

(1) (10分)证明它在$L^2[0,1]$上可以定义，并且是内积。

(2) (10分)假设我们使用1和x作为我们的数据模型，现在用户输入了函数$f(x)=x^{2024}$，请问如何找到实值参数λ_1,λ_2使得

$$||f(x)-\lambda_1\cdot 1-\lambda_2\cdot x||_w$$

达到最小值？

答案：(1)任给$f,g\in L^2[0,1]$, $(1+x)f(x)g(x)$显然是可测的。由Cauchy-Schwarz不等式知，$\int_0^1(1+x)f(x)g(x)dx\leq 2\int_0^1|f(x)||g(x)|dx\leq 2||f||_{L^2}||g||_{L^2}<\infty$，因此$(f,g)_w$是可定义的。（正确4分，若错误，酌情给0-2分）对于任意的$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}, f_1,f_2,g\in L^2[0,1]$，由积分的线性性质知$(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2,g)_w=\lambda_1(f_1,g)_w+\lambda_2(f_2,g)_w$(1分)，由对称性，内积关于第二个分量也是线性的(1分，也可以不使用对称性，直接用双线性条件拿到这里的1分和前面的1分)。由乘法可交换性知，$(f,g)_w=(g,f)_w$（1分）。因为$1+x\geq 0$,我们知道对于任意的$f\in L^2[0,]1,(f,f)_w=\int_0^1(1+x)f(x)^2\geq 0$（1分）。显然$f=0$时取到等号，反之，若$(f,f)_w=0$，那么$(1+x)f(x)^2=0,a.e.$，因此$f=0,a.e.$。由于$L^2$商掉了a.e.相等这个等价关系，可以看错$f=0\in L^2[0,1]$。（2分）

(2) 首先证明这样的λ_1,λ_2存在。（方法一）由于$\{1,x\}$是有限维空间，最佳逼近存在。（2分）(方法二)利用$f\to\sqrt{1+x}f$和$L^2[0,1]$的完备性知，$(L^2[0,1],||.||_w)$也是完备内积空间，即Hilbert空间，因此最佳逼近存在。（2分）

接下来求λ_1,λ_2。（方法一）由正交投影定理，只需证明$(f-\lambda_1-\lambda_2x,1)_w=(f-\lambda_1-\lambda_2x,x)_w=0$.（4分）这等价于线性方程组$\lambda_1\int_0^1(1+x)dx+\lambda_2\int_0^1(1+x)xdx=\int_0^1(1+x)x^{2024}dx$且$\lambda_1\int_0^1(1+x)xdx+\lambda_2\int_0^1(1+x)x^2dx=\int_0^1(1+x)x^{2025}dx$（2分）。由此，我们得到线性方程组

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{5}{6}\\ \frac{5}{6} & \frac{7}{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2015}+\frac{1}{2016}\\ \frac{1}{2016}+\frac{1}{2017}\end{pmatrix}$$

（1分），可以解出 $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=\frac{72}{13}\begin{pmatrix}\frac{7}{12} & -\frac{5}{6}\\ -\frac{5}{6} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2015}+\frac{1}{2016}\\ \frac{1}{2016}+\frac{1}{2017}\end{pmatrix}=\frac{72}{13}\begin{pmatrix}\frac{7}{12}(\frac{1}{2015}+\frac{1}{2016})-\frac{5}{6}(\frac{1}{2016}+\frac{1}{2017})\\ -\frac{5}{6}(\frac{1}{2015}+\frac{1}{2016})+\frac{3}{2}(\frac{1}{2016}+\frac{1}{2017})\end{pmatrix}$.（1分）

（方法二）用Gram-Schmidt正交化得到$span\{1,x\}$的标准正交基$\sqrt{\frac{2}{3}}$和$\sqrt{\frac{4}{39}}(9x-5)$(4分)，由书上定理得到最佳逼近$x^{2024}-\sqrt{\frac{2}{3}}\int_0^1\sqrt{\frac{2}{3}}(1+x)x^{2024}dx-\sqrt{\frac{4}{39}}(9x-5)\int_0^1\sqrt{\frac{4}{39}}(9x-5)(1+x)x^{2024}dx$(2分)，经化简，可以解出和方法一相同的$\lambda_1,\lambda_2$.（2分）（方法三）用Lagrange乘数法，将问题转换成Lagrange乘数法问题2分，具体写出λ_1,λ_2满足的方程4分，微积分1分，线性代数1分。答案应和方法一相同。

3.（温馨提示：出题老师很坏，他故意使用了大量本课程外的内容来干扰大家的注意力，请大家心中默念“猿神启动”的口号，用孙悟空的火眼金睛识别出其中和本课程相关的少数内容来答题）

(1) (10分)假设(M_i, g_i)是一簇相同维数的Ricci曲率有下界$-A$，直径有上界的流形。它们Gromov-Hausdorff收敛到完备度量空间X, 这个度量空间X的直径$D = diam(X) = \sup_{x,y\in X} d(x,y)$也是有限的。假设$g_i$是非塌缩的，它们对应的体积收敛到$X$上的测度$\mu$。由Bishop-Gromov体积比较定理知，对于任意的点列$x_i \in X$, $i = 1, 2, 3, ...n$, 对于任意的$r > 0$，只要x_i相互之间的距离大于等于r,那么

$$\sum_i \frac{Vol_{-A}(B(0, r/2))}{Vol_{-A}(B(0, D))}\mu(X) \leq \sum_i \mu(B(x_i, r/2)) \leq \mu(X),$$

从而n有不依赖于x_i选取的上界 $\frac{Vol_{-A}(B(0,D))}{Vol_{-A}(B(0,r/2))}$。请利用这些信息证明任意$X$中的点列有收敛子列。

(2) (10分)进一步假设我们有一簇(M_i, g_i)上的一致有界调和函数。由Cheng-Yau的梯度估计知道，它们一致Lipchitz。从而我们得到X上的一簇实值函数$f_i, i = 1, 2, ...$，它们一致有界，且一致Lipchitz，换句话说，存在L使得对于任意的i, 任意的$x, y \in X$,我们有$|f_i(x) - f_i(y)| \leq Ld(x, y)$。请利用这些信息证明$f_i$有一致收敛的子列。

答案：(1)需要证明X是列紧的（2分），这等价于它是完全有界的（1分），换句话说，任给$\epsilon > 0$,存在有穷ϵ网$x_1, ...x_N$使得$X = \cup_{i=1}^N B(x, \epsilon)$。（3分）现在假设不完全有界，那么我们可以取$\epsilon > 0$，使得有穷$\epsilon$网不存在，因此任取$x_1 \in X$,存在$x_2 \in X \setminus B(x_1, \epsilon)$,...存在$x_{n+1} \in X \setminus \cup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon)$,...。这个过程可以无限进行下去，但这些$x_i$相互之间的距离大于等于$\epsilon$，和题干中条件矛盾。（4分）（注：若未引用书上定理，但证明正确的，得10分，证明错误的，酌情给0-2分。）

(2) 任给$\epsilon > 0$，取$\delta = \epsilon/L$,那么当$d(x, y) < \delta$时,$|f(x) - f(y)| < \epsilon$。（2分）因此，f_i等度连续（3分），又知它们一致有界（1分）。由Arzela-Ascoli知，因为X列紧，f_i在$C(X)$中列紧（3分，若将X列紧写成完备，扣除这3分），因此它有收敛子列。而$C(X)$中收敛可以翻译成一致收敛。（1分）

4. 定义$\mathbb{R}[[t]] = \{\sum_{i=0}^\infty a_i t^i, a_i \in \mathbb{R}\}$为形式幂级数环。它的加法和数乘为

$$c\sum_{i=0}^\infty a_i t^i + d\sum_{i=0}^\infty b_i t^i = \sum_{i=0}^\infty (ca_i + db_i)t^i,$$

乘法为

$$(\sum_{i=0}^\infty a_i t^i)(\sum_{i=0}^\infty b_i t^i) = \sum_{i=0}^\infty (\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j})t^i.$$

容易验证（可以不加证明直接用），$fg = gf, (fg)h = f(gh), f(g + h) = fg + fh$等常见的性质都成立。现在我们定义$\mathbb{R}[[t]]$上的函数$v(0) = +\infty$, $v(\sum_{i=0}^\infty a_i t^i) = \min\{i : a_i \neq 0\}$。容易验证（可以不加证明直接用），对于任何$f, g \in \mathbb{R}[[t]]$, $v(f + g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$, $v(fg) = v(f) + v(g)$。

(1) (5分)在$\mathbb{R}[[t]]$上，定义度量为$d(f, g) = e^{-v(f-g)}$，证明它是度量。

(2) (5分)证明$\mathbb{R}[[t]]$在该度量下完备。

(3) (5分)定义多项式环$\mathbb{R}[t] = \{\sum_{i=0}^n a_i t^i, a_i \in \mathbb{R}\}$。证明形式幂级数环$(\mathbb{R}[[t]], d)$是多项式环$(\mathbb{R}[t], d|_{\mathbb{R}[t]})$作为度量空间的完备化，其中我们使用了$d$的限制。

(4) (5分)给定$a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1,2,...,m, j = 1,2,...,n$，定义$F(t,x(t)) = \sum_{i,j} a_{ij}t^i x(t)^j$，其中$x(t)$为形式幂级数。利用$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ... + b^{n-1})$来证明

$$d(F(t,x(t)), F(t,y(t))) \leq d(x(t),y(t)).$$

(5) (10分)定义形式幂级数的导数

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i t^{i-1},$$

仿照书上相关章节，利用压缩映射定理证明常微分方程

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(t,x(t)), x(0) = 0$$

存在唯一形式幂级数解，其中若$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$,那么我们定义$x(0) = a_0$。

答案：(1) $d(f,g) = e^{-v(f-g)} \geq 0$. (1分) $d(f,g) = e^{-v(f-g)} = 0$等价于$v(f-g) = +\infty$，等价于$f - g = 0$,等价于$f = g$.（1分,只写一边不得分）$d(f,g) = e^{-v(f-g)} = e^{-v(g-f)} = d(g,f)$.（1分，只写$d(f,g) = d(g,f)$,没写$e^{-v(f-g)} = e^{-v(g-f)}$不得分）$d(f,g) = e^{-v(f-g)} = e^{-v(f-h+h-g)}$。由题干中公式$v(f-h+h-g) \geq \min\{v(f-h), v(h-g)\}$,知道$e^{-v(f-h+h-g)} \leq \max\{e^{-v(f-h), e^{-h-g}}\} \leq e^{-v(f-h)} + e^{(h-g)}$，从而$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$.（2分，只写结论$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$不得分，过程不完整得1分，不使用题干中公式，但自行推导成功类似的公式不扣分）

(2) 取$\{f_n\}$为$\mathbb{R}[[t]]$中的Cauchy列。这意味着任给$\epsilon > 0$,存在$N(\epsilon) \in \mathbb{N}$，使得任给$n,m \geq N(\epsilon)$,我们有$d(f_n, f_m) \leq \epsilon$.（1分）这意味着$e^{-v(f_n - f_m)} \leq \epsilon$，等价于$v(f_n - f_m) \geq \lceil \ln(\frac{1}{\epsilon}) \rceil$,这意味着$f_m$和$f_n$的前$\lceil \ln(\frac{1}{\epsilon}) \rceil - 1$项相同（2分）现在对于任意的$k$,定义$\epsilon = e^{-(k+1)}$, 那么任给$n,m \geq N(e^{-(k+1)})$, f_m和f_n的前k项相同，把其中的第k项记作a_k。由此可以定义$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$。（1分）于是，当$m \geq \max\{N(e^{-(k+1)}), N(e^{-k}), ...\}$时，$v(f, f_m) \geq k+1$，由$k$的任意性知$\lim_{n\to\infty} d(f, f_n) = 0$。（1分）

(3)把$\mathbb{R}[t]$自然嵌入$\mathbb{R}[[t]]$，显然它是等价嵌入。由书上定理知，只需证明这个嵌入映射的像是稠密的。（2分）任给$f \in \mathbb{R}[[t]]$，假设$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$。任给$n \in \mathbb{N}$，定义$f_n = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$。（1分）那么$v(f_n - f) \geq n+1$,从而$d(f_n, f) \leq e^{-(n+1)}$，即$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$。由定义知，这意味这嵌入映射的像是稠密的。（2分）

(4) $F(t,x(t)) - F(t,y(t)) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}t^i(x(t)^j - y(t)^j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}t^i(x(t) - y(t))(\sum_{k=0}^{j-1} x(t)^k y(t)^{j-1-k}) = (x(t) - y(t))(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{j-1} a_{ij}t^i x(t)^k y(t)^{j-1-k})$. (2分)因此存在$z(t) \in \mathbb{R}[[t]]$使得$F(t,x(t)) - F(t,y(t)) = (x(t) - y(t))z(t)$。这意味这$d(F(t,x(t)), F(t,y(t))) = e^{-v(F(t,x(t)) - F(t,y(t)))} = e^{-v((x(t)-y(t))z(t))} = e^{-v(x(t)-y(t))}e^{-v(z(t))} = d(x(t),y(t))e^{-v(z(t))}$，由于$e^{-v(z(t))} \leq 1$,我们知道$d(F(t,x(t)), F(t,y(t))) \leq d(x(t),y(t))$. （3分）

(5)定义$\lambda : \mathbb{R}[[t]] \to \mathbb{R}[[t]]$为$\lambda(x(t)) = \int_0^t F(s,x(s))ds$，其中积分的定义为$\int_0^t (\sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i)ds = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{t^{i+1}}{i+1}$.(3分)那么我们有$d(\lambda(x(t)), \lambda(y(t))) = e^{-1}d(F(t,x(t)), F(t,y(t))) \leq e^{-1}d(x(t),y(t))$.(4分)从而$\lambda$为压缩映射。由$\mathbb{R}[[t]]$的完备性和压缩映射定理，$\lambda$由唯一的不动点，这意味着$\frac{d}{dt}x(t) = F(t,x(t)), x(0) = 0$存在唯一形式幂级数解。（3分，未指出完备性扣1分）