勘误 (共三处)

1. 习题1.1 第1问，$D=\{|z|<1, |z-\frac{1}{2}|>\frac{1}{2}\}$.

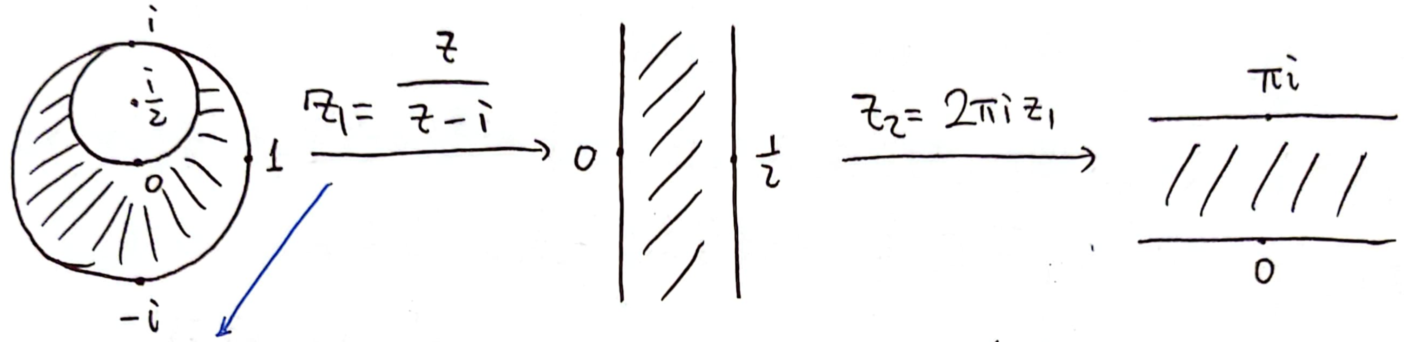
2. 习题1.3：f要附加有界条件.

3 习题3.4. 这个是照抄书上的原题. 但计算发现应该算积分 $\int_0^{\pi}\log|1-e^{i\theta}|\,d\theta$. 而且书上给的答案也不对

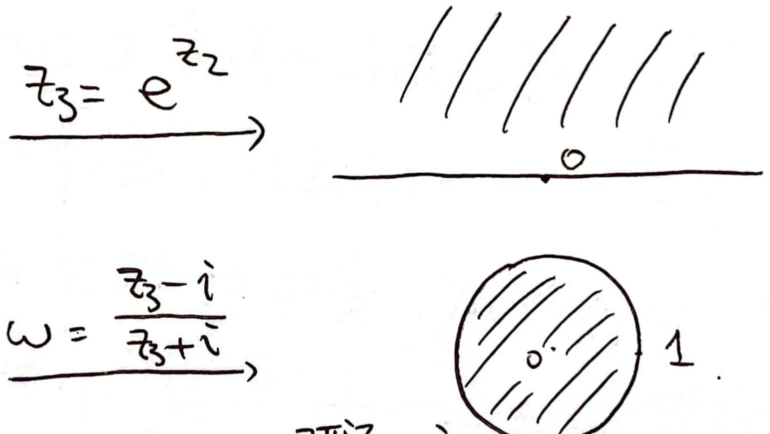
- 期中前的补充题

习题1.1　1.（区域应改为 $D=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1,\ |z-\frac{i}{2}|>\frac{1}{2}\}$）.

对于这种两个圆周相切的情况，只要把切点映为 ∞，则两个圆周必然被映成两条平行直线，区域对应地被映为带状域

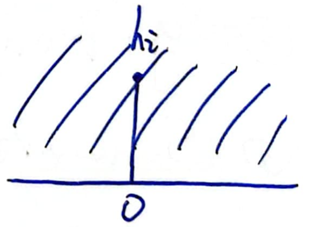


（这个怎么来？分母是因为一开始的讨论，分子是希望把 $0\mapsto 0$，并且验算可得 $\partial B(0,1)$ 被映成直线 $\mathrm{Re}\,w=\frac{1}{2}$，已经足以继续了，不用再乘常数）

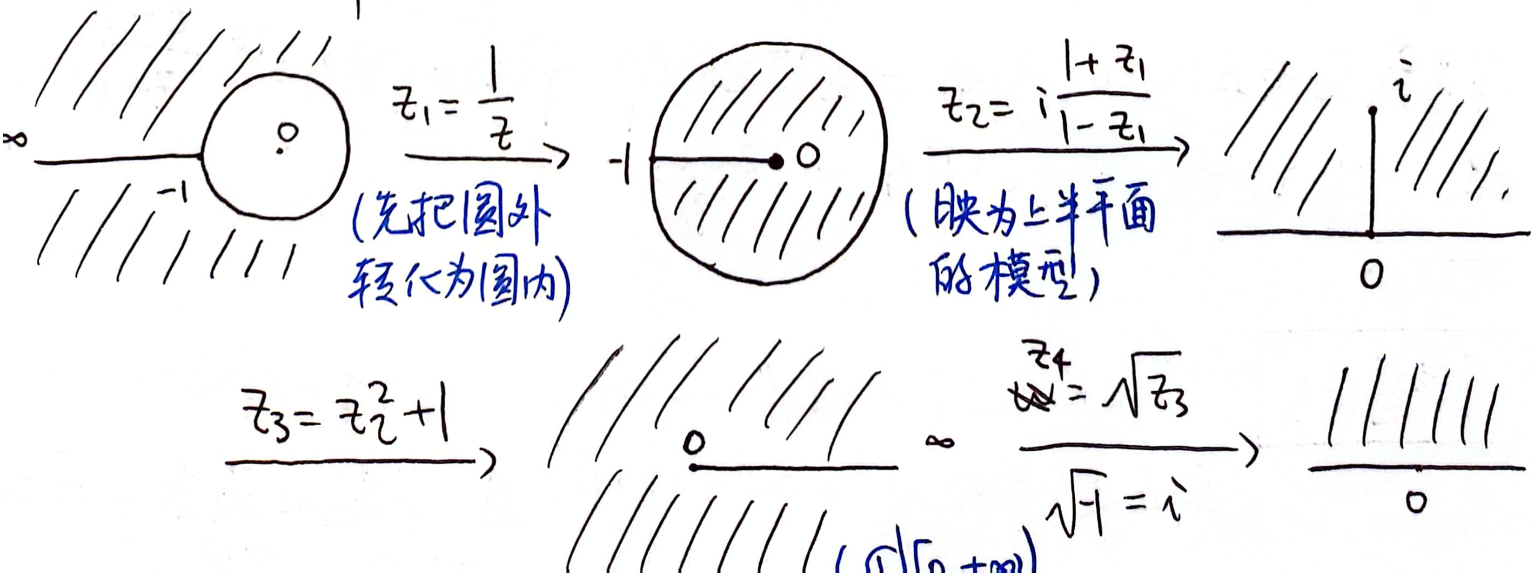


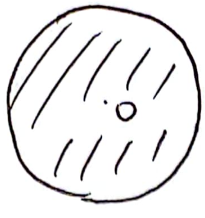
复合可得一个待求变换为 $w=\dfrac{e^{\frac{2\pi i z}{z-i}}-i}{e^{\frac{2\pi i z}{z-i}}+i}$.

2. 这种带割线的区域统一要化归为右边的模型：



这个模型课上讲过，也是书本2.4节的例题.



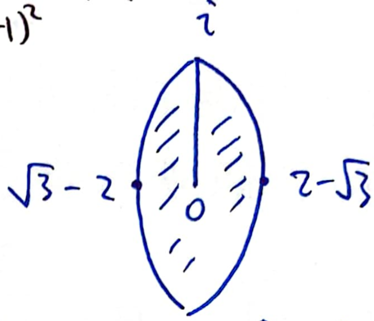
$w=\frac{z^4-i}{z^4+i}\longrightarrow$ 

复合可得一个待求的变换为

$$w=\frac{\sqrt{-\frac{4z}{(z-1)^2}}-i}{\sqrt{-\frac{4z}{(z-1)^2}}+i}.$$

Rmk. 想办法处理

$$D=\left(B(\sqrt{3},2)\cap B(-\sqrt{3},2)\right)\setminus[0,i]$$



的情形. 两段圆弧相交围成的区域作业题处理过, 割线的处理同第2问. 解答见第四次习题课补充题2.1.

习题1.2 想办法化为能应用Schwarz引理的情形.

任给 $f\in\mathcal{F}$. 对于值域, 要作一次伸缩把 $B(0,2021)$ 化为 $B(0,1)$. 对于定义域, 要把 $\mathbb{H}$ 映为 $B(0,1)$, 且保证 $i\mapsto 0$. 故考虑函数 $g(z)\triangleq\frac{1}{2021}f\left(i\frac{1+z}{1-z}\right)$, 则:

①. $g: B(0,1)\to B(0,1)$ ②. $g\in H(B(0,1))$, ③. $g(0)=0$.

由Schwarz引理, $|g(z)|\le|z|$. 故

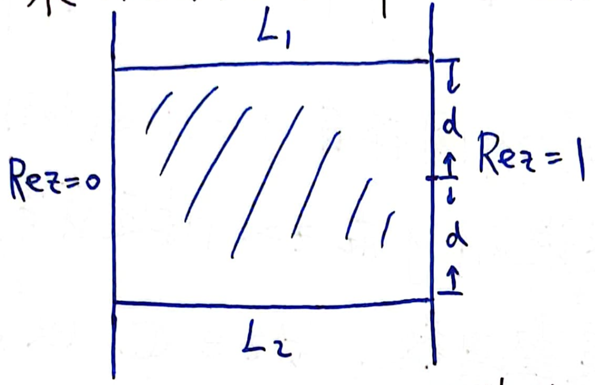
$$|f(2i)|=2021\left|g\left(\tfrac{1}{3}\right)\right|\le\frac{2021}{3}.$$

等号成立当且仅当 $g(z)\equiv e^{i\theta}z$ 即 $f(z)=2021e^{i\theta}\frac{z-i}{z+i}$.

故 $\sup\{|f(2i)|: f\in\mathcal{F}\}=\frac{2021}{3}$.

习题1.3 Rmk. 这个定理在证明 L^p 理论中的 Riesz-Thorin 插值定理时有很大的作用. ☆ 本题的函数 f 要求在 Ω 上有界.

我们可以取定 M_0^{1-z} 和 M_1^{-z} 在 $\mathbb{C}$ 上自然的单值分支. 初始的想法是证明 $f(z)M_0^{z-1}M_1^{-z}$ 的模长不超过 1. 而注意到该函数在 $\mathrm{Re}\,z=0$, $\mathrm{Re}\,z=1$ 两条直线上的模长确实不超过 1. 所以想用最大模. 但现在是个无界域, 我们只能在如下的矩形区域上用. 不过如果 d 充分大的, 可以让函数在 L_1, L_2 上的模长很小就行. 为此, 我们考虑



$$g_\epsilon(z) = f(z)M_0^{z-1}M_1^{-z}e^{-\epsilon z(1-z)}, \quad \forall \epsilon>0.$$

当 $\mathrm{Re}\,z=0$ 时, 恒有 $|g_\epsilon(z)| \le |f(z)|M_0^{-1} \le 1$. 当 $\mathrm{Re}\,z=1$ 时, 恒有 $|g_\epsilon(z)| \le |f(z)|M_1^{-1} \le 1$. 因为 f 有界, 故

$$|g_\epsilon(z)| \le \sup_{\Omega}|f| \cdot \left|e^{-\epsilon(x+iy)(1-x-iy)}\right| \le e^{-\epsilon y^2}\sup_{\Omega}|f|.$$

所以当任取 $z\in\Omega$, 当 $d>|\mathrm{Im}\,z|$ 充分大时, 总有

$$|g_\epsilon(x\pm id)| \le 1, \quad \forall x\in[0,1].$$

应用最大模可得 $|g_\epsilon(z)| \le 1$, 故

$$|f(z)| \le M_0^{1-\mathrm{Re}\,z}M_1^{\mathrm{Re}\,z}\left|e^{\epsilon z(1-z)}\right|.$$

令 $\epsilon\to0^+$ 即证.

这个证明还是比较难的. 不过有本题的经验, 可以证下面的题, 应该就不算难了.

Exercise (21H) 设 $\mathbb{H}$ 为上半平面, $f\in H(\mathbb{H})\cap C(\overline{\mathbb{H}})$ 为有界函数. 如果 $\sup_{\partial\mathbb{H}}|f| \le 1$, 证明 $\sup_{\mathbb{H}}|f| \le 1$.

· 期中后的补充题

习题 2.1 本题是Riemann可去奇点定理的很好例题. 后面也有几个相关的题目.

我们现有的证常值函数的手段都需要整函数条件的加持. 所以先往整函数方面凑.

考虑函数 $g(z) = zf(z)$. 则同样有 $g \in H(\mathbb{C}\setminus\{0\})$. 且 $\forall z \neq 0$ 有 $|g(z)| \leq \sqrt{|z|^3} + \sqrt{|z|}$. 这说明 g 在 $z=0$ 附近有界. 所以 $z=0$ 是 g 的可去奇点. 从而 g 是整函数. $\forall z \in \mathbb{C}$. 以及 $R > |z|$. 由 Cauchy 导数估计可得

$$|g''(z)| \leq \frac{2! \cdot (\sqrt{R^3} + \sqrt{R})}{R^2} \to 0, \quad \text{as } R \to +\infty.$$

故 $g(z) = \alpha + \beta z$ 为线性函数. 从而 $f(z) = \frac{\alpha}{z} + \beta$. 又由估计式可得 $\sqrt{|z|}\,|f(z)| \geq \cancel{\frac{|\alpha|}{\sqrt{|z|}} + \beta}\ \frac{|\alpha|}{\sqrt{|z|}} - |\beta|\sqrt{|z|}$ 有界 (在0附近). 故只能有 $\alpha = 0$. 从而 f 为常数.

习题 2.2 2023 丘赛题. 但不难.

设 $g(z) = \frac{f(z)}{\cos z}$, 则 $\{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ 是 g 的孤立奇点集. 在任一 $k\pi + \frac{\pi}{2}$ 附近. 由 $|g(z)| \leq C\sqrt{|z|}$ 可得有界. 故均为可去奇点. 所以 g 为整函数. 且满足 $|g(z)| \leq C\sqrt{|z|}$. 类似由导数估计可得 g 为常数 A. 所以 $f(z) = A\cos z$. 但由估计式可得 $|A| = |f(0)| \leq 0$. 所以 f 恒为 0.

习题2.3 类似第四章作业题, 我们把 f 进行 Laurent 展开后再积分

设 f 在 $B(0,1)\setminus\{0\}$ 上的 Laurent 展开为 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. 则

$$|f(z)|^2 = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} a_n \overline{a_m} z^n \bar{z}^m.$$

对任意 $\epsilon>0$, 在圆环 $A_\epsilon=\{z\in\mathbb{C}: \epsilon<|z|<\frac{1}{2}\}$ 上积分可得

$$\int_{A_\epsilon}|f|^2dxdy = \int_\epsilon^{\frac{1}{2}} r^{n+m+1}\left(\int_0^{2\pi}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} a_n\overline{a_m}e^{i(n-m)\theta}d\theta\right)dr$$

$$\overline{\overline{\text{一致收敛}}}\ \int_\epsilon^{\frac{1}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi|a_n|^2 r^{2n+1}dr$$

$$\overline{\overline{\text{MCT}}}\ \underbrace{\sum_{n\neq-1}\frac{\pi|a_n|^2}{n+1}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}-\epsilon^{2n+2}\right)+2\pi|a_{-1}|^2\log\frac{1}{2\epsilon}}_{(*)}.$$

由 $\int_{A_\epsilon}|f|^2\le\int_{B(0,1)}|f|^2<+\infty$ 可得 (*) 是一致有界的. 这是正项级数, 但

$$\log\frac{1}{2\epsilon}\to+\infty,\ \frac{1}{n+1}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}-\epsilon^{2n+2}\right)\to+\infty\quad(\forall n\le-2)$$

as $\epsilon\to0^+$

故只能有 $a_n=0,\ \forall n\le-1$. 这说明 $z=0$ 是可去奇点.

当 $p=\infty$ 时. 立得 f 在 $z=0$ 附近有界. 所以 $z=0$ 为可去奇点.

如果 $p>2$. 则由 Hölder 可得

$$\int_{B(0,1)}|f|^2\le\left(\int_{B(0,1)}|f|^p\right)^{\frac{2}{p}}\cdot(4\pi)^{\frac{p}{p-2}}<+\infty$$

从而也是可去奇点. 但 $p<2$ 时则不然. 例如考虑 $f(z)=\frac{1}{z}$. $z=0$ 是一阶极点. 但

$$\int_{B(0,1)}\frac{1}{|z|^p}=2\pi\int_0^1\frac{dr}{r^{p-1}}=\frac{2\pi}{2-p}<\infty.$$

习题2.4 为了处理第1题，需要回忆课上讲过的：

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 为整函数，则 $\forall r>0$，有

$$a_nr^n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta.\quad (*)\ n=1,2,\cdots$$

回忆下怎么证。

1. $\forall r>0$，考虑函数 $g_r(z)\triangleq A(r)-f(z)$，那么 $|z|=r$ 时有 $\mathrm{Re}\,g_r(z)\geqslant 0$。由于 $g_r(z)=A(r)-a_0-a_1z-a_2z^2-\cdots$ 应用 (*) 得：

$$|a_n|r^n=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,g(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta\right|\leq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,g(re^{i\theta})\,d\theta$$

$$\underset{\text{平均值}}{=\!=\!=}2\mathrm{Re}\,g(0)=2A(r)-2\mathrm{Re}f(0),\quad\forall n\geqslant 1.$$

2. 假设 $e^z-P(z)$ 只有有限个零点 $z_1,\cdots,z_n$，重数分别为 $k_1,\cdots,k_n$，令 $Q(z)=(z-z_1)^{k_1}\cdots(z-z_n)^{k_n}$，则 $\frac{e^z-P(z)}{Q(z)}$ 为恒非零的整函数，从而存在整函数 $f(z)$，s.t.

$$\frac{e^z-P(z)}{Q(z)}=e^{f(z)}$$

所以 $\exists\,C>0$ 和 $R>0$，对 $\forall|z|>R$，有 $e^{\mathrm{Re}f(z)}=\left|\frac{e^z-P(z)}{Q(z)}\right|\leq e^{|z|\cdot C}$

亦即 $\mathrm{Re}f(z)\leq C|z|$，对于 $r>R$，应用第1问可得

$$|a_n|r^n\leq 2Ar-2\mathrm{Re}f(0)\Rightarrow|a_n|\leq 2Ar^{1-n}-2r^{-n}\mathrm{Re}f(0).$$

这里 $f(z)=\sum_0^{\infty}a_nz^n$，当 $n\geqslant 2$ 时，令 $r\to\infty$ 可得 $a_n=0$，故 f 为线性函数，即 $e^z=P(z)+e^{az+b}Q(z)$，只能有 $P(z)=0$，矛盾！

Rmk. 用Picard大定理有简单证法。设 $h(z)=e^{-z}P(z)$，则 ∞ 为本性奇点，而 f 只有有限个零点，Picard大定理 $\Rightarrow$ f 在 ∞ 的邻域内无穷次取到值1，即证。

习题 2.5 目标是想办法化为整函数的情形.

由已知可得 $\exists R>0, M>0$, s.t. $|f(z)|\le M|z|^N$ 对任意 $|z|>R$ 成立. 所以 f 的极点只能落在紧集 $\overline{B(0,R)}$ 中. 从而 f 只有有限个极点 $z_1,\cdots,z_n$. 重数分别记为 $k_1,\cdots k_n$. 考虑函数

$$g(z)=f(z)\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)^{k_j}.$$

则 $g\in H(\mathbb{C})$, 且 $|g(z)|=O(|z|^{\tilde{N}})$, 其中 $\tilde{N}\triangleq N+k_1+\cdots+k_n$. 由导数估计易证 g 为多项式. 故 $f(z)=g(z)\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)^{-k_j}$ 为有理函数

习题 2.6 这题不太简单. 注意区域不满足边界对应原理的使用条件. Schwarz 对称也不好用. 我们的工具是 Riemann 可去奇点定理.

假设 $f: D\to G$ 为双全纯映射. 那么 f 在孤立奇点 $z=0$ 附近有界. 所以 f 是 $B(0,1)$ 上的全纯函数. 由连续性可得 $f(B(0,1))\subset \overline{G}$. 而开映射定理说明 $f(B(0,1))$ 开. 故 $f(0)$ 为 G 的内点, 记为 w_0. 而 $f: D\to G$ 满, 故 $\exists z_0\in D$, s.t. $f(z_0)=w_0$. 取充分小的 $r>0$, s.t. $B(0,r)\subset B(0,1)$, $B(z_0,r)\subset D$, 且 $B(0,r)$, $B(z_0,r)$ 无交. 再由开映射定理可得 $f(B(0,r))\cap f(B(z_0,r))$ 为 w_0 的开邻域. 但由于 f 在 D 上单叶. 只能有 $f(B(0,r))\cap f(B(z_0,r))=\{w_0\}$. 矛盾!

Rmk. 有个类似但更简单的题. 可以做做.

(23期末) 证明: 不存在从 $\{z\in\mathbb{C}: |z|>1\}$ 到 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 的双全纯映射.

习题2.7 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，设 $z_0 \in \partial B(0,R)$ 为收敛圆周上一点。如果幂级数可以全纯开拓到某个 $B(z_0,r)\setminus\{z_0\}$ 上，且以 z_0 为极点，就称 z_0 是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的极点。本题实际上说明了：

幂级数在收敛圆周上有极点

$\Rightarrow$ 幂级数在收敛圆周上处处发散。

1. 设幂级数在收敛圆周上 ζ 处收敛，则 $\forall \epsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，s.t. $|a_n\zeta^n|<\epsilon$。那么

$$
\begin{aligned}
(R-r)|f(re^{i\theta})| &\le (R-r)\sum_{n=0}^{N}|a_n|r^n + (R-r)\sum_{n>N}|a_n\zeta^n|\cdot\left|\frac{re^{i\theta}}{\zeta}\right|^n \\
&\le (R-r)\sum_{n=0}^{N}|a_n|R^n + \epsilon(R-r)\sum_{n>N}\left(\frac{r}{R}\right)^n \\
&= (R-r)\sum_{n=0}^{N}|a_n|R^n + \epsilon(R-r)\left(\frac{r}{R}\right)^{N+1}\frac{1}{1-\frac{r}{R}} \\
&\le (R-r)\sum_{n=0}^{N}|a_n|R^n + \epsilon R.
\end{aligned}
$$

注意到 N 当然与 r 无关，上式令 $r\to R$ 即可得 $\lim_{r\to R^-}(R-r)|f(re^{i\theta})|=0$。

2. 设 $R(z)$ 为有理函数，不妨设 $R(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 的收敛半径为 $r>0$。那么一定存在 $z_0\in\partial B(0,r)$ 为 $R(z)$ 的极点。如若不然，则取定 $\rho>r$。因为 $R(z)$ 在紧集 $\overline{B(0,\rho)}$ 内只有有限个极点，所以存在 $r<\rho'<\rho$，s.t. $R(z)$ 在 $B(0,\rho')$ 内没有极点，从而 $R\in H(B(0,\rho'))$

$\xrightarrow[\text{Taylor定理}]{}$ $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 的收敛半径 $\ge \rho'$。矛盾！

回到证明。因为 z_0 为极点，由 Laurent 展开可得 $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)R(z)$ 不为 0。由第1问即可得 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在 $\partial B(0,r)$ 上处处发散。

2.8 本题有两个着手点：①. 从 $\mathrm{Re}f_n$ 的调和性质入手.
②. 从 $\log z$ 在 $\{1<|z|<2\}$ 上无全纯分支入手

对应了两个不同的证法.

证法1. 由平均值公式可得 $f_n(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n(re^{i\theta})\,d\theta$. $\forall r>0$.

取 $r=1,2$ 并取实部可得

$$\mathrm{Re}f_n(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}f_n(e^{i\theta})\,d\theta < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\,d\theta=\frac{1}{n}.$$

$$\mathrm{Re}f_n(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}f_n(2e^{i\theta})\,d\theta > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\log 2-\frac{1}{n}\right)d\theta=\log 2-\frac{1}{n}.$$

当 n 充分大时即得矛盾.

证法2. 由已知可得 $-1<\mathrm{Re}f_n(z)<\log 2+1$. $\forall n$, $\forall z\in\overline{D}$,
$D\triangleq\{z: 1<|z|<2\}$.

考虑函数列 $g_n(z):=e^{f_n(z)}$, 则有

$$|g_n(z)|=e^{\mathrm{Re}f_n(z)}\le 2e,\quad \forall z\in\overline{D},\ \forall n.$$

故 $\{g_n\}$ 一致有界 $\xRightarrow[\text{Montel}]{}$ 为正规族. 因此存在子列 n_k, s.t. g_{n_k} 内闭一致收敛于 $g\in H(D)\cap C(\overline{D})$. 由一致下界

（$\overline{D}$ 自身就是紧集, 内闭一致即可到）

$|g_{n_k}(z)|>\frac{1}{e}$ 可得 g 恒不为零, 从而 $\exists f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, s.t. $g(z)=e^{f(z)}$.

由已知可得 $\log|z|-\frac{1}{n_k}<\mathrm{Re}f_{n_k}(z)<\log|z|+\frac{1}{n_k}$

$$\Downarrow$$

$$|z|e^{-\frac{1}{n_k}}<|g_{n_k}|<|z|e^{\frac{1}{n_k}}$$

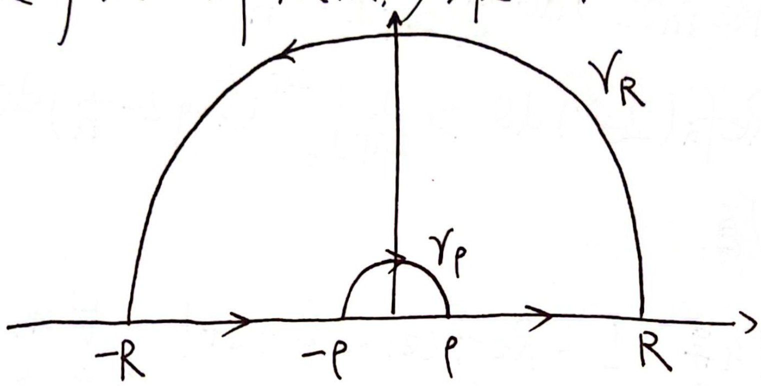
故令 $k\to\infty$ 可得 $|g(z)|=|z|\Rightarrow \mathrm{Re}f(z)=\log|z|$. 注意到 $\log z=\log|z|+i\arg z$ 在 $D\setminus(-2,-1)$ 上全纯. 从而在 $D\setminus(-2,-1)$ 上恒有 $f(z)=\log z+iy_0$, y_0 为常数. 但 $\log z$ 在 $(-2,-1)$ 任一点处不连续. 矛盾!

· 计算题

$\boxed{\text{习题3.1}}$ 考虑函数 $f(z)=\dfrac{1+iz-e^{iz}}{z^3}$

（为什么是这个函数？$iz-e^{iz}$ 这一项容易凑，因为虚部为 $x-\sin x$，多出来的 1 是为了便于在原点附近作积分）.

因为 $z=0$ 是 f 的一阶极点，考虑围道：



$$|f(z)| \le \frac{1+|z|+1}{|z|^3}, \quad \forall z\in$$

这里 $0<\rho<R<\infty$. γ_R 沿逆时针，γ_ρ 沿顺时针，有 f 的估计

① $\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \le \dfrac{2+R}{R^3}\cdot\pi R \to 0$, as $R\to+\infty$

② 注意到 $\lim\limits_{z\to 0} zf(z) = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1+iz-e^{iz}}{z^2}=\dfrac{1}{2}$. 故

因为 γ_ρ 顺时针走向

$$\left|\int_{\gamma_\rho} f(z)dz+\frac{1}{2}\pi i\right| = \left|\int_{\gamma_\rho}\frac{zf(z)-\frac{1}{2}}{z}dz\right|$$

$$\le \pi\rho\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\sup_{|z|=\rho}\left|zf(z)-\frac{1}{2}\right| \to 0, \quad \text{as } \rho\to 0^+.$$

而由 Cauchy 定理，沿围道积分可得

$$\int_\rho^R f(x)dx+\int_{\gamma_R} f(z)dz+\int_{-R}^{-\rho} f(x)dx+\int_{\gamma_\rho} f(z)dz=0.$$

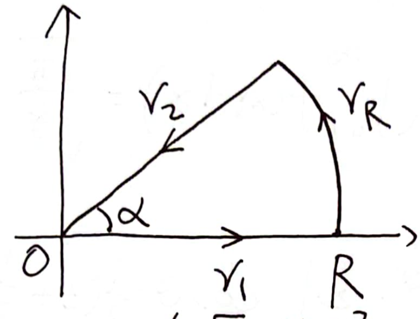
令 $\rho\to0^+$, $R\to+\infty$ 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -\lim_{\rho\to0^+}\int_{\gamma_\rho} f(z)dz-\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz=\frac{\pi i}{2}.$$

因此

$$\int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^3}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right) = \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\text{习题 3.2}}$ 回忆课上求解过 Fresnel 积分 $\int_0^\infty \cos x^2 dx$，这里我们用类似的围道.



α 为待定常数

考虑函数 $f(z) = e^{(-\sqrt{3}+i)z^2} = e^{-2z^2 e^{-i\frac{\pi}{6}}}$. 所以

$$\cancel{\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^R e^{-\sqrt{3}x^2}\cos(x^2)\, d}$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = e^{i\alpha}\int_R^0 e^{-2(re^{i\alpha})^2 e^{-i\frac{\pi}{6}}}dr$$

$$= -e^{i\alpha}\int_0^R e^{-2r^2\cdot e^{i(2\alpha-\frac{\pi}{6})}}dr. \quad (*)$$

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_0^\alpha e^{-2R^2e^{i(2\theta-\frac{\pi}{6})}}\cdot iRe^{i\theta}d\theta \quad (**).$$

为了进一步计算 我们取 $\alpha = \frac{\pi}{12}$，则

$$(*) = -e^{i\frac{\pi}{12}}\int_0^R e^{-2r^2}dr \longrightarrow -e^{\frac{\pi i}{12}}\int_0^\infty e^{-2r^2}dr = -e^{\frac{\pi i}{12}}\sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

$$|(**)| \le R\int_0^{\frac{\pi}{12}} e^{-2R^2\cos(2\theta-\frac{\pi}{6})}d\theta = R\int_0^{\frac{\pi}{12}} e^{-2R^2\sin(\frac{\pi}{3}-2\theta)}d\theta$$

$$\underset{\text{Jordan}}{\le} R\int_0^{\frac{\pi}{12}} e^{-\frac{4}{\pi}R^2(\frac{\pi}{3}-2\theta)}d\theta = \frac{\pi}{8R}e^{-\frac{4}{3}R^2}\left(e^{\frac{2R^2}{3}}-1\right)$$

$\to 0$, as $R \to +\infty$!

由 Cauchy 积分公式可得

$$\int_0^R f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$$

$$\xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_0^{\infty} f(x)dx = e^{\frac{\pi i}{12}}\sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$ 所以

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{3}x^2}\cos(x^2)dx = \mathrm{Re}\left(\int_0^\infty f(x)dx\right) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

$\boxed{\text{习题 3.3}}$ 考虑变换 $z=e^{i\theta}$. 则 $\cos\theta = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$. 所以

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \int_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(a+\frac{b}{2}(z+\frac{1}{z})\right)} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{b(z^2+1)+2az}. \quad (*)$$

求解可得 $f(z) = \frac{1}{b(z^2+1)+2az}$ 在 $B(0,1)$ 内有唯一一阶极点

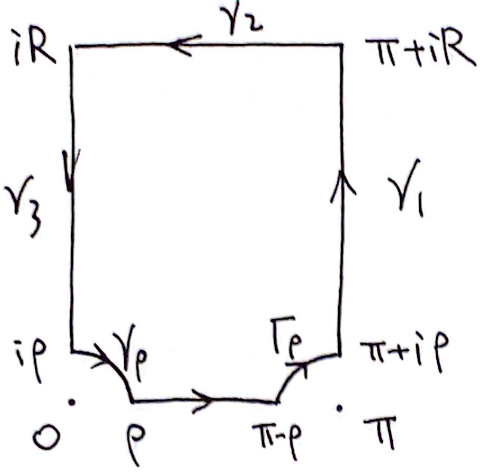
$$z_0 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

且 $\mathrm{Res}(f,z_0) = \frac{1}{2bz_0+2a} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}$. 由留数定理得

$$(*) = \frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

$\boxed{\text{习题 3.4}}$ 考虑函数 $f(z) = \log(1-e^{iz})$ (取主支)

注意到 $0, \pi$ 均为奇点. 所以构造围道时要避开这两个点. 因此. 我们考虑如下的围道.



逐个计算:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = i\int_\rho^R \log(1+e^{-y})\,dy \quad (\text{纯虚数})$$

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = -i\int_\rho^R \log(1-e^{-y})\,dy \quad (\text{纯虚数})$$

在 γ_2 上，有 $f(x+iR) = \log(1-e^{-R}e^{ix})$，故

$$|f(x+iR)| = \left|\log|1-e^{-R}e^{ix}| + i\arg(1-e^{-R}\cos x + e^{-R}i\sin x)\right|$$

$$\le \log(1+e^{-R}) + \arctan\frac{e^{-R}\sin x}{1-e^{-R}\cos x}$$

$$\le e^{-R} + \frac{e^{-R}}{1-e^{-R}} \longrightarrow 0, \quad \text{as } R\to+\infty.$$

所以 $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = -\int_0^\pi f(x+iR)\,dx \longrightarrow 0$, as $R\to+\infty$.

又因为 $\lim\limits_{\substack{\rho\to0^+\\ |z|=\rho}} z\log(1-e^{iz}) = \lim\limits_{\substack{\rho\to0^+\\ |\pi-z|=\rho}} (z-\pi)\log(1-e^{iz}) = 0$,

故 $\int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz \longrightarrow 0$, $\int_{\Gamma_\rho} f(z)\,dz \longrightarrow 0$, as $\rho\to0^+$. 由 Cauchy 积分定理可得

$$\int_\rho^{\pi-\rho} \log(1-e^{i\theta})\,d\theta + \int_{\Gamma_\rho} f + \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f + \int_{\gamma_\rho} f = 0$$

取实部，令 $\rho\to0^+$ 可得 $\int_0^\pi \log|1-e^{i\theta}|\,d\theta = 0$. 又因为

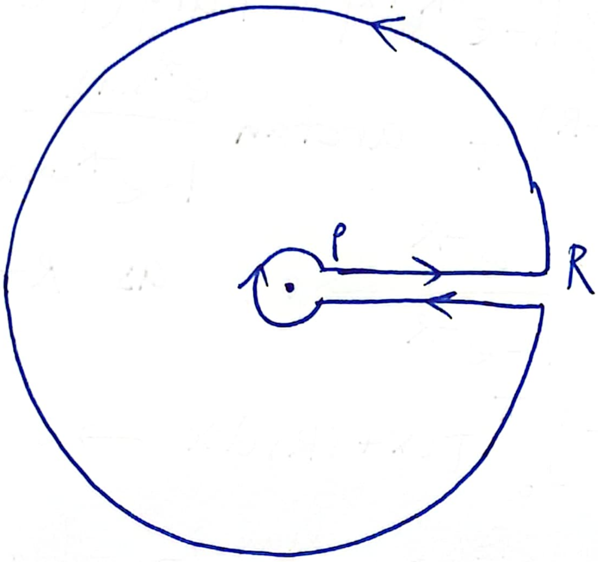
$$\int_0^\pi \log|1-e^{i\theta}|\,d\theta = \int_0^\pi \log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta = \pi\log2 + \int_0^\pi \log\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \pi\log2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\varphi\,d\varphi.$$ 故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\varphi\,d\varphi = -\frac{1}{2}\pi\log2$.

上面几个题基本覆盖到了我们见过的重要围道. 还差一个. 我们留一个题目自己练习.

Exercise. 计算积分 $\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{x^2+a^2}dx$. $(a>0)$

Hint. 应用如下的围道.



面对形如 $\frac{\log^2 x}{x^2+a^2}$, 应考虑 $f(z)=\frac{\log^3 z}{z^2+a^2}$. 在上面的围道积分后, 你应得到

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{x^2+a^2}dx = \frac{4\pi^2}{3}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} - 2\pi i\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}dx.$$

然后用一样的围道算 $\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}dx$ (这时候用什么函数?)

最后答案为 $\frac{\pi}{8a}(\pi^2+4\log^2 a)$.