# 复分析第四次习题课

黄天一
USTC

更新：2024 年 5 月 1 日

## 目录



## 1 作业讲解

**作业 1.1 (教材 3.5.1)** 设 $f$ 是有界整函数, $z_1, z_2$ 是 $B(0,r)$ 中任意两点. 证明:

$$\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} \, \mathrm{d}z = 0.$$

并由此得出 Liouville 定理.

**证明.** 根据 Cauchy 积分定理可得, 我们只需证明

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} \, \mathrm{d}z = 0.$$

设 $M>0$ 是 $|f(z)|$ 的一个上界, 那么任取 $R>r$ 有

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{M}{(R-|z_1|)(R-|z_2|)} \cdot 2\pi R < \frac{2\pi MR}{(R-r)^2}.$$

由此即证. 另一方面, 根据 Cauchy 积分公式可得

$$0 = \frac{1}{z_1-z_2} \left( \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z-z_1} \, \mathrm{d}z - \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z-z_2} \, \mathrm{d}z \right) = 2\pi \mathrm{i} \frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}.$$

所以 $f(z_1)=f(z_2)$, 从而 $f$ 是常值函数.

**作业 1.2 (教材 3.5.2)** 设 $f$ 为整函数, 如果当 $z\to\infty$ 时, $f(z)=O(|z|^\alpha)$, $\alpha \geqslant 0$. 证明: $f$ 是次数不超过 $\lfloor \alpha \rfloor$ 的多项式.

**证明.** 记 $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$, 我们只需证 $f^{(n)}(z)$ 恒为零. 任意取定 $z \in \mathbb{C}$. 由条件可得存在 $M > 0$ 和充分大的 $R > 0$, 对任意 $\zeta \in \mathbb{C}$ 满足 $|\zeta - z| \geqslant R$, 都有 $|f(\zeta)| \leqslant M|\zeta|^\alpha$. 由 Cauchy 积分公式可得

$$|f^{(n)}(z)| = \left| \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta - z| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta \right| \leqslant \frac{n!}{2\pi} \int_{|\zeta - z| = R} \frac{M|\zeta|^\alpha}{R^{n+1}} |\,\mathrm{d}\zeta| \leqslant \frac{Mn!(R + |z|)^\alpha}{R^n}.$$

注意到 $\alpha < n$, 上式令 $R \to \infty$ 即可得 $f^{(n)}(z) = 0$, 即证.

**作业 1.3 (教材 3.5.4)** 设 $f$ 为整函数. 如果 $f(\mathbb{C}) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, 证明 $f$ 是一个常值函数.

**证明.** 我们考虑函数 $g(z) = \frac{1}{f(z)+\mathrm{i}}$, 此时分母的虚部大于 1, 所以 $g$ 为整函数且 $|g(z)| \leqslant 1$. 由 Liouville 定理可得 $g$ 为常数, 所以 $f$ 也为常数.

**作业 1.4 (教材 3.5.5)** 设 $f$ 为整函数. 如果 $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus [0, 1]$, 证明 $f$ 是一个常值函数.

**证明.** 如下图所示, 我们可以找到一个把 $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ 映为上半平面的单叶全纯函数:

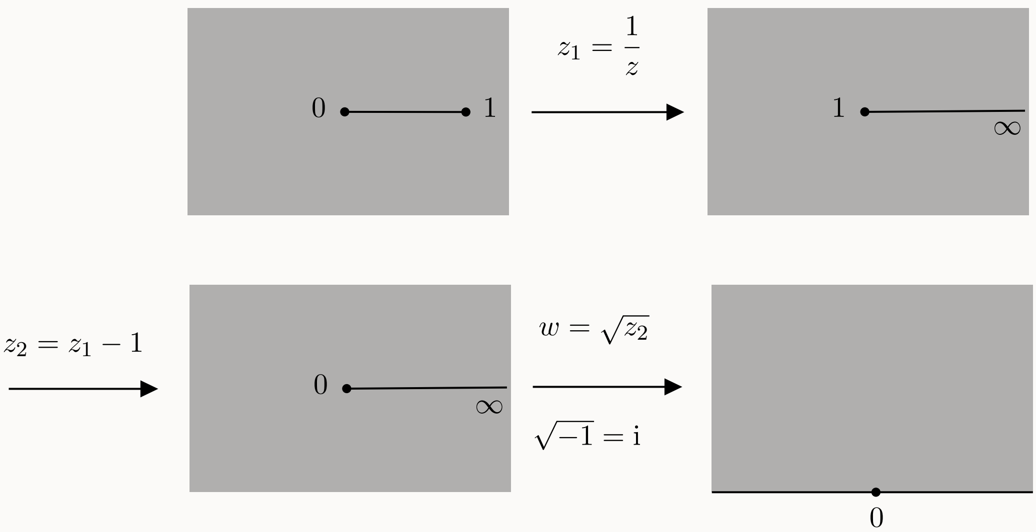



**图 1**

复合可得待求的共形变换为 $\varphi(z) = \sqrt{\frac{1-z}{z}}$. 那么 $g(z) := \varphi(f(z))$ 为整函数, 并且 $g(\mathbb{C}) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. 由上一个作业题可得 $g$ 恒为常数, 所以 $f$ 也恒为常数.

**习题 1.1** 证明如下结论:

1. 如果 $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 是调和函数, 且 $u$ 有上界或下界, 那么 $u$ 恒为常数.
2. (19H 期中) 如果 $u : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ 为非负调和函数, 那么 $u$ 为常数.
3. (23 期中) 设 $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 为调和函数, 并且对任意 $z \in \mathbb{C}$ 成立 $u(z) \leqslant 2|\log|z|| + 1$, 那么 $u$ 恒为常数.

**证明.** 1. 不妨设 $u$ 有上界 $M$. 首先 $u$ 在 $\mathbb{C}$ 上存在共轭调和函数 $v$, 所以整函数 $f = u + \mathrm{i}v$ 以 $u$ 为实部. 考虑 $g(z) := \dfrac{1}{M + 1 - f(z)}$, 那么 $g$ 为整函数且 $|g(z)| \leqslant 1$. 由 Liouville 定理可得 $g$ 为常数, 从而 $u$ 也为常数.

2. 考虑 $\mathbb{C}$ 上的函数 $v(z) = u(\mathrm{e}^z)$, 那么 $v$ 是调和函数 $u$ 和整函数 $\mathrm{e}^z$ 的复合, 所以 $v$ 在 $\mathbb{C}$ 上调和 (之前的一道作业题), 且由 $u$ 非负可得 $v$ 非负. 从而由第 1 问可得 $v$ 为常数, 因此 $u$ 为常数.

3. 注意到现在只有上界估计, 没有模估计的话是很难用积分方法处理的, 不过我们还是有招. 设 $v$ 为 $u$ 在 $\mathbb{C}$ 上的一个共轭调和函数, 那么整函数 $f = u + \mathrm{i}v$ 以 $u$ 为实部. 考虑整函数 $g(z) = \mathrm{e}^{f(z)}$, 那么

$$|g(z)| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, f(z)} \leqslant \mathrm{e}\, |z|^2,\ \forall |z| > 1.$$

利用作业 1.2 可得 $g(z)$ 为至多二次的多项式. 但由定义可得 $g$ 没有零点, 所以 $g$ 只能为常数, 所以 $u$ 也为常数.

**评论** 从证明来看, 对于区域 $D$, 如果存在整函数 $f$ 把 $\mathbb{C}$ 映为 $D$, 那么 $D$ 上的非负调和函数一定也是常数. 不过这样的 $D$ 是很少的, 因为著名的 Picard 小定理告诉我们: 如果存在两点 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 不属于整函数 $f$ 的值域, 那么 $f$ 只能是常数. 所以这样的 $D$ 只能形如 $\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

**作业 1.5 (教材 4.5.3)** 设 $z_1, \cdots, z_n$ 的模长大于 1, 证明: 存在 $z_0 \in \partial B(0,1)$, 使得 $\prod\limits_{k=1}^{n} |z_0 - z_k| > 1$.

**证明.** 考虑多项式 $p(z) = \prod\limits_{k=1}^{n} (z - z_k)$, 则 $|p(0)| = |z_1 \cdots z_n| > 1$. 由最大模定理可得 $\max\limits_{|z|=1} |p(z)| \geqslant |p(0)| > 1$, 由此即证.

**作业 1.6 (教材 4.5.4)** 设 $f \in H(B(0,R))$. 证明: $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ 是 $[0,R)$ 上的增函数.

**证明.** 任取 $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 < R$, 那么由最大模定理可得

$$M(r_1) = \max_{|z|=r_1} |f(z)| = \max_{|z|\leqslant r_1} |f(z)| \leqslant \max_{|z|\leqslant r_2} |f(z)| = \max_{|z|=r_2} |f(z)| = M(r_2).$$

所以 $M(r)$ 是增函数.

**作业 1.7 (教材 4.5.7)** 设 $f$ 是域 $D$ 上非常数的全纯函数. 证明: 如果 $f$ 在 $D$ 中没有零点, 则 $|f(z)|$ 在 $D$ 内不能取得最小值.

**证明.** 由于 $f$ 在 $D$ 上恒不为零, 所以 $\frac{1}{f} \in H(D)$ 为非常值函数. 由最大模定理可得 $|\frac{1}{f}| = \frac{1}{|f|}$ 在 $D$ 内不能取得最大值, 所以 $|f|$ 在 $D$ 内不能取得最小值.

**作业 1.8 (教材 4.5.10)** 设 $f \in H(B(0,R)), f(B(0,R)) \subset B(0,M), f(0) = 0$, 证明:

1. $|f(z)| \leqslant \dfrac{M}{R}|z|, |f'(0)| \leqslant \dfrac{M}{R}, \forall z \in B(0,R)$.
2. 等号成立当且仅当 $f(z) = \dfrac{M}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z, \theta \in \mathbb{R}$.

**证明.** 我们考虑函数 $g(z) = \frac{1}{M} f(Rz)$, 那么 $g : B(0,1) \to B(0,1)$ 为全纯函数且 $g(0) = 0$, 所以由 Schwarz 引理可得 $|g(z)| \leqslant |z|$ 且 $|g'(0)| \leqslant 1$. 反解可得 $f(z) = Mg(\frac{z}{R})$, 所以

$$|f(z)| \leqslant M\frac{|z|}{R},\ |f'(0)| = \frac{M}{R}|g'(0)| \leqslant \frac{M}{R}.$$

上述等号成立当且仅当 $g(z)$ 对应的 Schwarz 引理中的等号成立, 当且仅当 $g(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z, \theta \in \mathbb{R}$, 即 $f(z) = \frac{M}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$.

**作业 1.9 (教材 4.5.12)** 设 $f \in H(B(0,R)) \cap C(\overline{B(0,R)})$, 对 $0 \leqslant r < R$ 定义 $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $A(r) = \max\limits_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z)$. 证明:

$$M(r) \leqslant \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|, \ \forall r \in [0,R).$$

**证明.** 先回忆课上讲过的例题:

**例题.** 设 $f \in H(B(0,1))$, $f(0) = 0$, 并且存在 $A > 0$, 使得 $\operatorname{Re} f(z) \leqslant A, \forall z \in B(0,1)$. 那么

$$|f(z)| \leqslant \frac{2A|z|}{1-|z|}, \ \forall z \in B(0,1).$$

我们现在希望把本题转化为上面例题的情形, 所以考虑 $B(0,1)$ 上的全纯函数 $g(z) = f(Rz) - f(0)$. 此时 $g(0) = 0$, 并且由于 $\operatorname{Re} g(z) = \operatorname{Re} f(Rz) - \operatorname{Re} f(0)$ 是调和函数, 由调和函数的最大值定理可得[1]

$$\max_{|z| \leqslant 1} \operatorname{Re} g(z) = \max_{|z|=1} \operatorname{Re} g(z) = A(R) - \operatorname{Re} f(0).$$

这样我们对 $g$ 应用例题结论可得

$$|g(z)| \leqslant \frac{2(A(R) - \operatorname{Re} f(0))|z|}{1-|z|} \leqslant \frac{2(A(R) + |f(0)|)|z|}{1-|z|}, \ \forall z \in B(0,1).$$

注意到反解可得 $f(z) = g(\frac{z}{R}) + f(0)$, 所以

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leqslant \left| g\left(\frac{z}{R}\right) \right| + |f(0)| \leqslant \frac{2(A(R) + |f(0)|)|z|}{R-|z|} + |f(0)| \\ &= \frac{2|z|}{R-|z|} A(R) + \frac{R+|z|}{R-|z|} |f(0)|, \ \forall z \in B(0,R). \end{aligned}$$

**作业 1.10 (教材 4.5.13)** 设 $f \in H(B(0,1))$, $f(0) = 1$, 并且 $\operatorname{Re} f(z) \geqslant 0, \forall z \in B(0,1)$. 证明:

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leqslant \operatorname{Re} f(z) \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}, \ \forall z \in B(0,1).$$

**评论** 原题中的取等条件是完全错误的.

**证明.** 我们现在希望应用 Schwarz 引理. 为此, 要找共形映射将右半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} f(z) > 0\}$ 映为单位圆盘, 并且将 1 映为 0. 可见分式线性变换 $w = \frac{z-1}{z+1}$ 符合要求. 我们考虑 $g(z) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1}$, 那么 $g : B(0,1) \to \overline{B(0,1)}$ 为全纯函数, 并且 $g(0) = 0$. 由 Schwarz 引理可得 $|g(z)| \leqslant |z|$. 注意到反解可得 $f(z) = \frac{1+g(z)}{1-g(z)}$, 所以

$$|f(z)| \leqslant \frac{1+|g(z)|}{1-|g(z)|} \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

[1]这是微分方程课程里的结论. 或者, 考虑函数 $\mathrm{e}^g \in H(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$, 那么由最大模原理可得

$$\max_{|z| \leqslant 1} \mathrm{e}^{\operatorname{Re} g(z)} = \max_{|z| \leqslant 1} |\mathrm{e}^{g(z)}| \leqslant \max_{|z|=1} |\mathrm{e}^{g(z)}| = \max_{|z|=1} \mathrm{e}^{\operatorname{Re} g(z)}.$$

由此也可得证.

对于实部, 我们计算可得

$$\operatorname{Re} f(z)=\frac{f(z)+\overline{f(z)}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+g(z)}{1-g(z)}+\frac{1+\overline{g(z)}}{1-\overline{g(z)}}\right)=\frac{1-|g(z)|^2}{|1-g(z)|^2}.$$

由此可得

$$\operatorname{Re} f(z)\geqslant\frac{1-|g(z)|^2}{(1+|g(z)|)^2}=\frac{1-|g(z)|}{1+|g(z)|}\geqslant\frac{1-|z|}{1+|z|}.$$

**作业 1.11 (教材 4.5.19)** 设 $f\in H(B(0,1))$, $f(B(0,1))\subset B(0,M)$. 证明:

$$M|f'(0)|\leqslant M^2-|f(0)|^2.$$

**证明.** 我们设 $a=\frac{1}{M}f(0)$, 记 $\varphi_a(z)=\frac{a-z}{1-\bar{a}z}$. 考虑函数 $g(z)=\varphi_a(\frac{1}{M}f(z))$, 那么 $g:B(0,1)\to B(0,1)$ 为全纯函数, 并且 $g(0)=0$. 那么由 Schwarz 引理可得 $|g'(0)|\leqslant 1$. 而反解可得 $f=M\varphi_a^{-1}\circ g=M\varphi_a\circ g$, 所以

$$|f'(0)|=M|\varphi_a'(a)||g'(0)|\leqslant M(1-|a|^2)=\frac{M^2-|f(0)|^2}{M}.$$

由此即证.

**作业 1.12 (教材 4.5.20)** 设 $f\in H(B(0,1))$, $f(0)=0$, $f(B(0,1))\subset B(0,1)$. 证明: 如果存在 $z_1,z_2\in B(0,1)$, 使得 $z_1\neq z_2$, $|z_1|=|z_2|$, $f(z_1)=f(z_2)$, 则

$$|f(z_1)|=|f(z_2)|\leqslant|z_1|^2=|z_2|^2.$$

**证明.** 这题相当难, 不过好在教材终于给了个提示. 考虑函数

$$g(z)=\frac{f(z_1)-f(z)}{1-\overline{f(z_1)}f(z)}\frac{1-\bar{z}_1z}{z-z_1}\frac{1-\bar{z}_2z}{z-z_2}.$$

由于 $z_1,z_2$ 都是 $f(z_1)-f(z)$ 的零点, $g(z)$ 在 $B(0,1)$ 上是全纯的. 注意到 $\varphi_{z_1}(z)=\frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1z}$ 和 $\varphi_{z_2}(z)=\frac{z-z_2}{1-\bar{z}_2z}$ 都是紧集 $\overline{B(0,1)}$ 上的连续函数, 所以对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 如果 $z,w\in\overline{B(0,1)}$ 满足 $|z-w|<\delta$, 那么成立 $|\varphi_{z_i}(z)-\varphi_{z_i}(w)|<\epsilon$, $i=1,2$. 又因为当 $|z|=1$ 时, 有 $|\varphi_{z_1}(z)|=|\varphi_{z_2}(z)|=1$, 所以只要 $|z|=r\in(1-\delta,1)$, 总有 $|\varphi_{z_i}(z)|>1-\epsilon$, $i=1,2$. 这时有 $|g(z)|<\frac{1}{(1-\epsilon)^2}$, 由最大模原理即可得

$$|g(0)|\leqslant\max_{|z|=r}|g(z)|\Rightarrow\frac{|f(z_1)|}{|z_1z_2|}\leqslant\frac{1}{(1-\epsilon)^2}.$$

结合 $|z_1|=|z_2|$, 令 $\epsilon\to 0^+$ 即证.

**作业 1.13 (教材 4.5.27)** 设 $D$ 是以原点 $O$ 为中心, 以 $z_1,z_2,z_3,z_4$ 为顶点的正方形域, $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, $M$ 是 $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上的最大值, $m$ 是 $|f(z)|$ 在线段 $[z_1,z_2]$ 上的最大值. 证明:

1. $|f(0)|\leqslant m^{\frac{1}{4}}M^{\frac{3}{4}}$.
2. 在闭三角形 $\triangle Oz_1z_2$ 上也有 $|f(z)|\leqslant m^{\frac{1}{4}}M^{\frac{3}{4}}$.

**证明.** 这题的技巧比较经典, 这题下面的补充习题也用了类似的方法.

1. 考虑函数 $g(z) = f(z)f(\mathrm{i}z)f(-z)f(-\mathrm{i}z)$, 那么 $g \in H(D) \cap C(\overline{D})$. 当 $z \in \partial D$ 时, 注意到四点 $z, \mathrm{i}z, -z, -\mathrm{i}z$ 中一定存在一者属于边 $[z_1, z_2]$, 所以由已知可得 $|g(z)| \leqslant mM^3$. 根据最大模原理可得

$$|f(0)|^4 = |g(0)| \leqslant \max_{z \in \partial D} |g(z)| \leqslant mM^3.$$

由此即证.

2. 利用自变量的平移不难发现, 第 1 问中的结论可以推广为任意正方形区域, 这时第 1 问中的 $f(0)$ 要修改为 $f$ 在正方形区域中心点的取值. 任取 $z \in \triangle O z_1 z_2$, 那么存在以 $z$ 为中心的正方形域 $\Omega$, 使得 $\Omega$ 的一条边包含于线段 $[z_1, z_2]$, 记为 $[w_1, w_2]$, 如图所示:

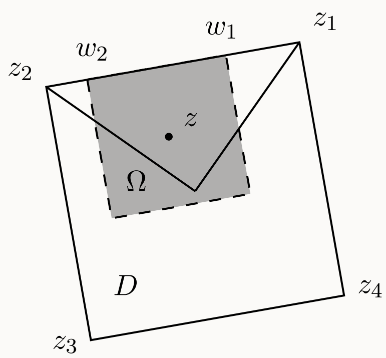



**图 2**

这时 $f$ 在 $[w_1, w_2]$ 上的最大值 $\tilde{m}$ 不超过 $m$, 而在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值 $\tilde{M}$ 不超过 $M$. 所以由第 1 问结论可得

$$|f(z)| \leqslant \tilde{m}^{\frac{1}{4}} \tilde{M}^{\frac{3}{4}} \leqslant m^{\frac{1}{4}} M^{\frac{3}{4}}.$$

**习题 1.2** 设 $f \in H(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$. 如果 $f$ 在 $\partial B(0,1)$ 的某段闭圆弧 $\gamma$ 上恒为零, 证明: $f$ 在 $B(0,1)$ 内恒为零.

**证明.** 设 $\gamma$ 的参数表示为 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} : \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, 其中 $-\pi < \alpha < \beta \leqslant \pi$. 记 $\theta_0 = \beta - \alpha$, 并考虑正整数 $N = \lceil \frac{2\pi}{\theta_0} \rceil$, 以及函数

$$g(z) = \prod_{k=0}^{N} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta_0} z).$$

那么 $g \in H(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$. 由于 $f$ 在 $\gamma$ 上恒为零, 并且对任意 $|z| = 1$, 存在整数 $0 \leqslant k \leqslant N$ 使得 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta_0} z \in \gamma$, 所以 $g$ 在 $\partial B(0,1)$ 上恒为零. 由最大模原理即可得 $g$ 在 $B(0,1)$ 内恒为零. 对任意正整数 $n$, 由 $g(\frac{1}{n}) = 0$ 可得存在 $z_n \in \mathbb{C}$ 满足 $|z_n| = \frac{1}{n}$, 使得 $f(z_n) = 0$. 而 $\{z_n\}$ 收敛于 0, 由唯一性定理可得 $f$ 恒为零.

**作业 1.14 (教材 4.1.6)** 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 是复数项级数, 并且 $\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = q$. 证明:

1. 如果 $q < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛.

2. 如果 $q>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散.

**证明.** 1. 如果 $q<1$, 我们取定 $q<\sigma<1$, 那么存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $n\geqslant N$ 时恒成立 $|z_n|\leqslant\sigma^n$, 由此可得

$$\sum_{k=n}^{n+p}|z_k|\leqslant\sum_{k=n}^{n+p}\sigma^k<\frac{\sigma^n}{1-\sigma}.$$

当 $n\to\infty$ 时上式收敛于 0, 所以原级数绝对收敛.

2. 如果 $q>1$, 那么存在子列 $\{z_{n_k}\}$, 使得 $|z_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}}\geqslant 1$ 恒成立, 即 $|z_{n_k}|\geqslant 1$. 这说明 $\{z_n\}$ 不收敛于零, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散.

**作业 1.15 (教材 4.1.8)** 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 是复数项级数, 并且 $\limsup\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|=q$. 证明:

1. 如果 $q<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛.
2. 如果 $q>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 可能收敛也可能发散.

**证明.** 1. 如果 $q<1$, 我们取定 $q<\sigma<1$, 那么存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $n\geqslant N$ 时恒成立 $|\frac{z_{n+1}}{z_n}|\leqslant\sigma$, 由此可得 $|z_n|\leqslant\sigma^{n-N}|z_N|$ 对任意 $n\geqslant N$ 成立. 从而

$$\sum_{k=n}^{n+p}|z_k|\leqslant\sum_{k=n}^{n+p}\sigma^{k-N}|z_N|<\frac{\sigma^{n-N}}{1-\sigma}|z_N|.$$

注意到 $n\to\infty$ 时上式收敛于 0, 所以原级数绝对收敛.

2. 任给 $q>1$. 如果取 $z_n=q^n$, 那么 $z_n$ 发散到 $\infty$, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散. 但如果取

$$z_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2}, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{q}{n^2}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

那么 $\limsup\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|=q$, 但由 $0<z_n\leqslant\dfrac{q}{n^2}$ 可得正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛.

**习题 1.3** 证明: 如果 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足条件:

- $\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\}$ 有界.
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n-b_{n+1}|<\infty$.

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 收敛.

**评论** 从该判别法, 很容易证明数学分析中的 Abel-Dirichlet 判别法.

**证明.** 设 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 为部分和, 并令 $S_0 = 0$, 设 $M > 0$ 为 $|S_n|$ 的上界. 那么对任意 $m < n$ 成立

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=m}^{n} (S_k - S_{k-1}) b_k\right| \\ &= \left|S_n b_n - S_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1})\right| \\ &\leqslant M(|b_n| + |b_m|) + M \sum_{k=m}^{n-1} |b_k - b_{k+1}|.\end{aligned}$$

由条件可得 $n, m \to \infty$ 时有 $|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k b_k| \to 0$, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

**作业 1.16 (教材 4.2.3)** 证明: 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处绝对收敛, 那么它在 $\overline{B(0, |z_0|)}$ 上绝对一致收敛.

**证明.** 由已知可得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n||z_0|^n$ 收敛, 任取 $z \in \overline{B(0, |z_0|)}$, 都有

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n||z^n| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n||z_0|^n.$$

根据 Weierstrass 判别法可得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\overline{B(0, |z_0|)}$ 上绝对一致收敛.

**作业 1.17 (教材 4.2.5)** 证明 Abel 第二定理的又一说法: 如果幂级数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ 在多角形域 $G$ 的每个顶点处都收敛, 则它必在 $\overline{G}$ 上一致收敛. 特别地, $f$ 在 $\overline{G}$ 上连续.

**证明.** 不妨设 $z_0 = 0$. 我们需要一点准备工作: 任取 $\mathbb{C}$ 中不同的两点 $z, w$, 记 $L$ 为连接 $z, w$ 的线段, 我们断言对任意 $\eta \in L \setminus \{z, w\}$, 都有 $|\eta| < \max\{|z|, |w|\}$. 如果 $z, w, 0$ 共线则易证. 考虑不共线的情形, 假设存在 $\eta \in L \setminus \{z, w\}$ 使得 $|\eta| > |z|$ 且 $|\eta| > |w|$, 如下图左侧所示. 那么此时 $\theta < \alpha$ 且 $\delta < \beta$, 从而 $\pi = \theta + \delta < \alpha + \beta = \pi - \angle z0w < \pi$, 矛盾.

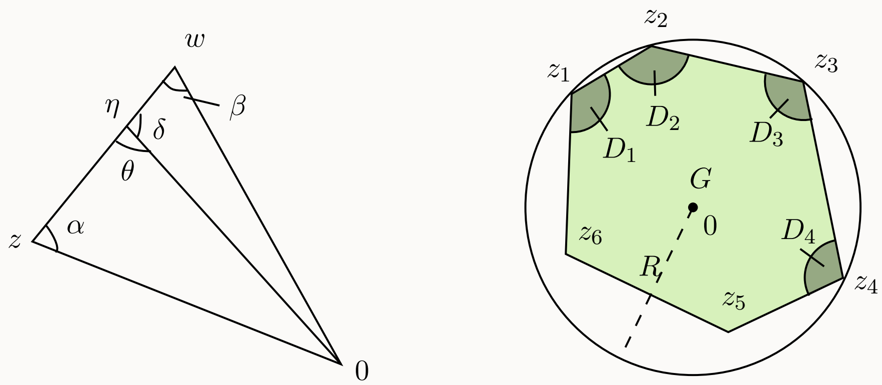



**图 3**

根据上述引理, 对于多角形域 $G$, 存在顶点集 $\{z_1,\cdots,z_n\}$, 使得 $|z_1|=\cdots=|z_n|=R$, 并且对任意 $z\in\overline{G}\setminus\{z_1,\cdots,z_n\}$, 都有 $|z|<R$. 由于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在每个顶点处收敛, 该幂级数的收敛半径不小于 $R$. 我们设 $z_i$ 对应的顶角为 $\theta_i\in(0,\pi)$, 对应的 Stolz 角域即为 $S_{\theta_i/2}(z_i)$. 根据 Abel 第二定理的证明, 存在 $r>0$, 使得在每个 $D_i:=S_{\theta_i/2}(z_i)\cap B(z_i,r)$ 内, 原幂级数都是一致收敛的, 如图 3 右侧所示. 又因为 $K:=\overline{G}\setminus(D_1\cup\cdots\cup D_n)$ 是包含于 $B(0,R)$ 的紧集, 所以原幂级数在 $K$ 内一致收敛. 综上可得, 原幂级数在 $\overline{G}=K\cup D_1\cup\cdots\cup D_n$ 内一致收敛.

**作业 1.18 (教材 4.2.8)** 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在闭圆盘 $\overline{B(0,R)}$ 内收敛, 这里 $R>0$. 证明:

1. $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n!}z^n$ 是整函数.
2. 存在正数 $M$, 使得

$$|\varphi^{(n)}(z)|\leqslant\frac{M\,\mathrm{e}^{\frac{|z|}{R}}}{R^n},\ \forall z\in\mathbb{C},n\in\mathbb{N}.$$

**证明.** 1. 由已知可得 $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<\infty$, 所以存在常数 $M>0$, 使得 $|a_n|\leqslant M^n$ 对任意 $n$ 成立. 因此

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{M}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

这说明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n!}z^n$ 的收敛半径为 $\infty$, 从而其和函数为整函数.

2. 由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $z=R$ 处收敛, 所以存在常数 $M>0$, 使得 $|a_n|R^n\leqslant M$ 恒成立. 根据 Weierstrass 定理可得

$$\varphi^{(n)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left(\frac{a_k}{k!}z^k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{n+k}}{k!}z^k.$$

所以

$$|\varphi^{(n)}(z)|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{M}{R^{n+k}}\frac{1}{k!}|z^k|=\frac{M}{R^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{|z|}{R}\right)^k=\frac{M}{R^n}\mathrm{e}^{\frac{|z|}{R}}.$$

**评论** 注意教材上的版本是错题, 因为没有要求级数在 $z=R$ 处收敛. 反例也很好举: 如果 $a_n=n$, 那么级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 $R=1$. 此时

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(n-1)!}=z\,\mathrm{e}^z.$$

那么 $\varphi^{(n)}(z)=(z+n)\mathrm{e}^z$, 这时不可能存在常数 $M>0$ 使得 $|\varphi^{(n)}(z)|\leqslant M\mathrm{e}^{|z|}$ 恒成立.

**习题 1.4 (19 期中)** 设 $D$ 是域, $a\in D$, $f\in H(D)$, 并且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(a)$ 收敛. 证明:

1. $f$ 可以被延拓为整函数 $F$.
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}F^{(n)}(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中内闭一致收敛.

**证明.** 1. 这时对充分大的 $n$, 有 $|f^{(n)}(a)| \leqslant 1$. 考虑 $f(z)$ 的 Taylor 展开式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$, 有

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$$

所以 Taylor 展开式的收敛半径为 $\infty$, 其和函数 $F(z)$ 为整函数, 同时为 $f$ 的延拓.

2. 首先 Taylor 展开可得 $F^{(n)}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{F^{(n+k)}(a)}{k!}(z-a)^k$. 任取 $\mathbb{C}$ 中的紧集 $K$, 我们设 $R > 0$ 满足 $K \subset B(a,R)$. 由已知可得对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 有

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} F^{(n)}(a) \right| < \epsilon, \ \forall m > N, p \in \mathbb{N}.$$

那么对任意 $m > N$, 以及 $z \in K$, 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m}^{m+p} F^{(n)}(z) \right| &= \left| \sum_{n=m}^{m+p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(n+k)}(a)}{k!}(z-a)^k \right| \overset{(*)}{=\!=} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=m}^{m+p} F^{(n+k)}(a) \right) \frac{(z-a)^k}{k!} \right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n=m+k}^{m+p+k} F^{(n)}(a) \right| \frac{|z-a|^k}{k!} < \epsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!} = \mathrm{e}^R \epsilon. \end{aligned}$$

其中 (*) 级数可换序是因为 Taylor 级数绝对收敛. 由此即证 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中内闭一致收敛.

**作业 1.19 (教材 4.2.10)** 设 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 把 $B(0,R)$ 一一地映为域 $G$. 证明: $G$ 的面积为 $\pi \sum\limits_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2 R^{2n}$.

**证明.** 回忆我们证明过, 对于全纯函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, $z = x + \mathrm{i}y$, 有

$$|f'(z)|^2 = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = \det Jf.$$

另一方面, 根据幂级数展开可得

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

结合 $f$ 是单叶函数, 根据换元公式可得

$$\begin{aligned} \mathrm{Area}(G) &= \iint_G \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_D |\det Jf(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D |f'(z)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} nm a_n \bar{a}_m r^{n+m-2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta}\,\mathrm{d}\theta \right) r\,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

由于幂级数在收敛圆内内闭绝对一致收敛, 所以 $r < R$ 时, 上述积分中的级数关于 $\theta \in [0, 2\pi]$ 一

致收敛. 所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{Area}(G) &= \int_0^R \sum_{n,m=0}^{\infty} nma_n\bar{a}_m r^{n+m-1}\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta}\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}r \\
&= \int_0^R \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi n^2|a_n|^2 r^{2n-1}\,\mathrm{d}r \xlongequal{(*)} \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi n^2|a_n|^2 \int_0^R r^{2n-1}\,\mathrm{d}r \\
&= \pi\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2 R^{2n}.
\end{aligned}$$

这里, (*) 用了实分析中单调收敛定理 (MCT) 的级数版本.

**作业 1.20 (教材 4.3.1)** 设 $D$ 是域, $a\in D$, 函数 $f$ 在 $D\setminus\{a\}$ 上全纯. 证明: 若 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=0$, 则 $f$ 在 $D$ 上全纯.

**证明.** 首先考虑函数

$$g(z)=\begin{cases}(z-a)f(z), & z\in D\setminus\{a\},\\ 0, & z=a.\end{cases}$$

由已知可得, $g\in C(D)$ 且 $g$ 在 $D\setminus\{a\}$ 上全纯. 现在想要先证明 $g\in H(D)$, 为此只需证明 $g$ 在某个开圆盘 $B(a,r)$ 内全纯. 任取 $B(a,r)$ 中的一条简单闭曲线 $\gamma$, 其内部记为 $G$. 考虑两种情况:

- $a\notin G$, 那么有 $g\in H(G)\cap C(\overline{G})$. 此时由 Cauchy 积分定理可得 $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z=0$.
- $a\in G$, 那么取充分小的 $\epsilon>0$, 使得 $B(a,\epsilon)\subset G$. 此时由 Cauchy 积分定理可得

$$\left|\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{|z-a|=\epsilon} g(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi\epsilon\cdot\sup_{\overline{G}}|g(z)|.$$

  令 $\epsilon\to 0^+$, 即可得 $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z=0$.

综上所述, 由 Morera 定理可得 $g\in H(D)$, 并且由定义可得 $z=a$ 是 $g$ 的零点. 所以 $g$ 在 $B(a,r)$ 内的 Taylor 展开形如

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

我们自然延拓 $f$ 在 $a$ 处的值为 $a_1$, 那么在 $B(a,r)$ 上恒有 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(z-a)^n$, 从而 $f\in H(B(a,r))$, 进而 $f\in H(D)$.

**作业 1.21 (教材 4.3.3)** 证明:

1. $|\mathrm{e}^z-1|\leqslant \mathrm{e}^{|z|}-1\leqslant |z|\,\mathrm{e}^{|z|}, \forall z\in\mathbb{C}$.
2. $(3-\mathrm{e})|z|<|\mathrm{e}^z-1|<(\mathrm{e}-1)|z|, 0<|z|<1$.

**证明.** 1. 利用 Taylor 展开可得

$$\mathrm{e}^{|z|}-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}=|z|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{(n+1)!}\leqslant |z|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}=|z|\,\mathrm{e}^{|z|}.$$

$$|\mathrm{e}^z - 1| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!} = \mathrm{e}^{|z|} - 1.$$

2. 当 $0 < |z| < 1$ 时, 利用 Taylor 展开可得

$$|\mathrm{e}^z - 1| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!} < |z|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = (\mathrm{e}-1)|z|.$$

$$|\mathrm{e}^z - 1| = |z|\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}\right| \geqslant |z|\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{(n+1)!}\right) > |z|\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\right) = (3-\mathrm{e})|z|.$$

**习题 1.5 (21 期中期末)** 证明以下结论.

1. 当 $\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2 \leqslant 0$ 时, $|\mathrm{e}^{z_1} - \mathrm{e}^{z_2}| \leqslant |z_1 - z_2|$.
2. 当 $|z| < 1$ 时, 有 $|1-(1-z)\mathrm{e}^z| \leqslant |z|^2$.
3. 设 $p \geqslant 1$, 且 $E_p(z) = (1-z)\exp(\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{z^k}{k})$. 当 $|z| \leqslant 1$ 时, 有 $|1 - E_p(z)| \leqslant |z|^{p+1}$.

**证明.** 1. 我们记 $L_{z_1z_2}$ 为 $z_1$ 到 $z_2$ 的线段, 那么由 $\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2 \leqslant 0$ 可得, 对任意 $z \in L_{z_1z_2}$, 都有 $\operatorname{Re} z \leqslant 0$, 进而 $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z} \leqslant 1$. 利用原函数定理可得

$$|\mathrm{e}^{z_1} - \mathrm{e}^{z_2}| = \left|\int_{L_{z_1z_2}} \mathrm{e}^z \,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_{L_{z_1z_2}} |\mathrm{e}^z|\,|\mathrm{d}z| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

2. 直接作 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned}
|1-(1-z)\mathrm{e}^z| &= \left|1-(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right)z^n\right| = \left|\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right)z^n\right| \\
&\leqslant \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right)|z|^n \leqslant |z|^2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) = |z|^2.
\end{aligned}$$

3. 这个时候再要 Taylor 展开就有些强人锁男了, 那我们就模仿 1 的方法来一遍. 注意到 $E_p(0) = 1$, 并且 $E_p'(z) = -z^p\exp(\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{z^k}{k})$. 我们仍记 $L_{0z}$ 为 0 到 $z$ 的线段, 并设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0 \leqslant r \leqslant 1)$, 那么由原函数定理可得

$$\begin{aligned}
|1 - E_p(z)| &= \left|-\int_{L_{0z}} \zeta^p \exp\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\zeta^k}{k}\right)\mathrm{d}\zeta\right| \xlongequal{\zeta = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \left|\int_0^r t^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta}\exp\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{t^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{k}\right)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_0^r t^p\exp\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{t^k\cos k\theta}{k}\right)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^r t^p\exp\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{t^k}{k}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^r E_p'(t)\,\mathrm{d}t = 1 - E_p(r).
\end{aligned}$$

所以只需证明: 对任意 $0 \leqslant r \leqslant 1$, 成立 $1 - E_p(r) - r^{p+1} \leqslant 0$. 设左式为 $f(r)$, 那么

$$f'(r) = r^p \left( \exp\left( \sum_{k=1}^{p} \frac{r^k}{k} \right) - p - 1 \right) =: r^p h(r).$$

注意到 $h'(r) = \frac{1-r^p}{1-r} \exp(\sum\limits_{k=1}^{p} \frac{r^k}{k})$ 恒大于零, 并且 $h(0) = -p < 0$, $h(1) = \exp(\sum\limits_{k=1}^{p} \frac{1}{k}) - p - 1 > 0$, 所以 $f(r)$ 在 $[0,1]$ 上先单调递减, 再单调递增. 又因为 $f(0) = f(1) = 0$, 所以 $f$ 在 $[0,1]$ 上恒非正, 即证.

**作业 1.22 (教材 4.3.5)** 是否存在 $f \in H(B(0,1))$, 使得下述条件之一成立?

1. $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n}{n+1}, n = 2, 3, 4, \cdots;$
2. $f\left(\dfrac{1}{2n}\right) = 0, f\left(\dfrac{1}{2n-1}\right) = 1, n = 1, 2, \cdots.$
3. $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2}, n = 2, 3, \cdots.$
4. $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^3}, n = 2, 3, \cdots.$

**证明.** 1. 存在. 此时 $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$.

2. 不存在. 由于 $\{\frac{1}{2n}\}$ 是 $f$ 的零点集, 由唯一性定理可得 $f$ 恒为零, 这与后者矛盾. 或者由 $f$ 在 $z = 0$ 处的连续性归谬.

3. 存在. 此时 $f(z) = z^2$.

4. 不存在. 由于 $\{\frac{1}{n}\}$ 是 $f(z) - z^3$ 的零点集, 由唯一性定理可得 $f(z) = z^3$. 这与 $f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$ 矛盾.

**作业 1.23 (教材 4.3.11)** 证明: 若 $\dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$ 在 $z = 0$ 处的 Taylor 级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{B_n}{n!} z^n$, 则 Bernoulli 数 $B_n$ 满足关系式

$$B_0 = 1, \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0.$$

特别地, $B_1 = -\dfrac{1}{2}$, $B_{2n+1} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

**评论** 我们可以利用 Bernoulli 数给出 Riemann-$\zeta$ 函数在偶数 $n = 2k$ 处取值的表达式, 这是后一章要做的事情.

**证明.** 首先考虑函数 $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z - 1}{z} \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. 注意到 $\lim\limits_{z \to 0} z f(z) = 0$, 由作业 1.20 可得 $f$ 是整函数, 并且 $f$ 在 $z = 0$ 处的 Taylor 展开为

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}.$$

将 Taylor 展开式代入恒等式 $f(z)\cdot\dfrac{z}{\mathrm{e}^z-1}=1$ 中, 可得

$$\begin{aligned}1&=\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{(m+1)!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}z^k\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{(n-k+1)!k!}\right)z^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k\right)\frac{z^n}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

比对系数即可得

$$B_0=1,\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k=0(n\geqslant 1).$$

**作业 1.24 (教材 4.5.17)** 设 $f\in H(B(0,1))$, $f(B(0,1))\subset B(0,1)$. 证明: 若 $z_1,\cdots,z_n$ 是 $f$ 在 $B(0,1)$ 中的所有彼此不同的零点, 其阶数分别为 $k_1,\cdots,k_n$, 则

$$|f(z)|\leqslant\prod_{j=1}^{n}\left|\frac{z_j-z}{1-\bar{z}_jz}\right|^{k_j},\ \forall z\in B(0,1).$$

特别地, 有 $|f(0)|\leqslant\prod\limits_{j=1}^{n}|z_j|^{k_j}$.

**证明.** 考虑函数

$$g(z)=f(z)\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1-\bar{z}_jz}{z_j-z}\right)^{k_j}.$$

那么 $g\in H(B(0,1))$. 仿照作业 1.12, 由一致连续性可得对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意 $z\in B(0,1)$ 满足 $|z|>1-\delta$, 都有 $\left|\dfrac{z_j-z}{1-\bar{z}_jz}\right|>1-\epsilon$ 对任意 $j=1,\cdots,n$ 成立. 现在任取 $z\in B(0,1)$, 设 $r\in(0,1)$ 满足 $r>\max\{|z|,1-\delta\}$, 那么由最大模定理可得

$$|g(z)|\leqslant\max_{|\zeta|=r}|g(z)|\leqslant\frac{1}{(1-\epsilon)^{k_1+\cdots+k_n}}.$$

令 $\epsilon\to0^+$ 可得 $|g(z)|\leqslant1$, 由此即证.

**作业 1.25 (教材 4.4.1)** 设 $D$ 是有限条可求长简单闭曲线围成的域. 证明: $f,g\in H(\overline{D})$, $f$ 在 $\partial D$ 上没有零点, $f$ 在 $D$ 中全部彼此不同的零点为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$, 其相应的阶数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_n$, 则

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D}g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=\sum_{j=1}^{n}k_jg(z_j).$$

**证明.** 本题的证明完全仿照辐角原理的证明. 我们选取两两无交的充分小圆盘 $B(z_j,\epsilon),j=1,\cdots,n$, 并且在 $B(z_j,\epsilon)$ 内 $f$ 有 Taylor 展开

$$f(z)=\sum_{m=k_j}^{\infty}a_{j,m}(z-z_j)^m,\ a_{j,k_j}\neq0.$$

从而在 $B(z_j,\epsilon)$ 内有

$$f'(z)=\sum_{m=k_j}^{\infty} m a_{j,m}(z-z_j)^{m-1}.$$

应用 Cauchy 积分定理可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z&=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-z_j|=\frac{\epsilon}{2}} g(z)\frac{k_j a_{j,k_j}(z-z_j)^{k_j-1}+O((z-z_j)^{k_j})}{a_{j,k_j}(z-z_j)^{k_j}+O((z-z_j)^{k_j+1})}\,\mathrm{d}z\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-z_j|=\frac{\epsilon}{2}}\frac{g(z)}{z-z_j}\frac{k_j a_{j,k_j}+O(z-z_j)}{a_{j,k_j}+O(z-z_j)}\,\mathrm{d}z\\&\xlongequal{\text{Cauchy 积分公式}}\sum_{j=1}^{n}k_j g(z_j).\end{aligned}$$

**习题 1.6 (21(H) 期中)** 设 $D=B(a,R)$ 为开圆盘, $G\supset\overline{D}$ 为区域. 设 $f$ 在 $G$ 上全纯单叶, 以及 $\Omega=f(D)$, 并且记 $f$ 的反函数为 $g:\Omega\to D$. 证明:

$$f^{-1}(w)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=R}\frac{zf'(z)}{f(z)-w}\,\mathrm{d}z,\ \forall w\in\Omega.$$

**证明.** 用上题的结论很容易证明. 任给 $w\in\Omega$, 则 $f^{-1}(w)$ 是函数 $f(z)-w$ 在 $\overline{D}$ 内的唯一零点, 阶数为 1. 取 $g(z)\equiv z$, 应用上题结论可得

$$f^{-1}(w)=1\cdot f^{-1}(w)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=R}\frac{zf'(z)}{f(z)-w}\,\mathrm{d}z.$$

**作业 1.26 (教材 4.4.3)** 设 $\lambda>1$. 证明: 方程 $z=\lambda-\mathrm{e}^{-z}$ 在右半平面 $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>0\}$ 中恰有一个根, 并且是正实根.

**证明.** 设 $f(z)=z+\mathrm{e}^{-z}-\lambda$. 首先由 $f(0)=1-\lambda<0$, 以及 $\lim\limits_{\mathbb{R}\ni x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 可得 $f(z)$ 至少存在一个大于零的零点. 下面只需证明 $f$ 在右半平面恰有一个零点.

方法一: 用辐角原理. 对充分大的 $R>0$, 可以设 $f$ 在 $|z|\geqslant R$ 时恒不为零. 我们记 $\gamma_1$ 为右半圆周 $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z\geqslant 0,|z|=R\}$, $\gamma_2$ 为直径 $\{\mathrm{i}y\in\mathbb{C}:|y|\leqslant R\}$, 构成的右半圆盘边界取逆时针定向. 设 $N(R)$ 为 $f(z)$ 在 $\gamma_1,\gamma_2$ 围成右半圆盘内部的零点个数. 首先有

$$\Delta_{\gamma_1}\operatorname{Arg}f(z)=\Delta_{\gamma_1}\operatorname{Arg}z+\Delta_{\gamma_1}\operatorname{Arg}\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-z}-\lambda}{z}\right)=\pi+O(R^{-1}).$$

最后一个等号是因为 $|\mathrm{e}^{-z}-\lambda|\leqslant 1+\lambda$ 有界. 其次, 代入 $z=\mathrm{i}y$ 可得 $f(\mathrm{i}y)=\cos y-\lambda+\mathrm{i}(y-\sin y)$. 由 $\lambda>1$ 可得, 此时函数值的实部总小于零. 如下图所示:

注意到 $\lim\limits_{R\to+\infty}\dfrac{f(\pm\mathrm{i}R)}{|f(\pm\mathrm{i}R)|}=\pm\mathrm{i}$, 结合图示可得 $\lim\limits_{R\to+\infty}\Delta_{\gamma_2}\operatorname{Arg}f(z)=\pi$. 综上所述, 由辐角原理可得

$$\lim_{R\to+\infty}N(R)=\frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\Delta_{\gamma_1}\operatorname{Arg}f(z)+\frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\Delta_{\gamma_2}\operatorname{Arg}f(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

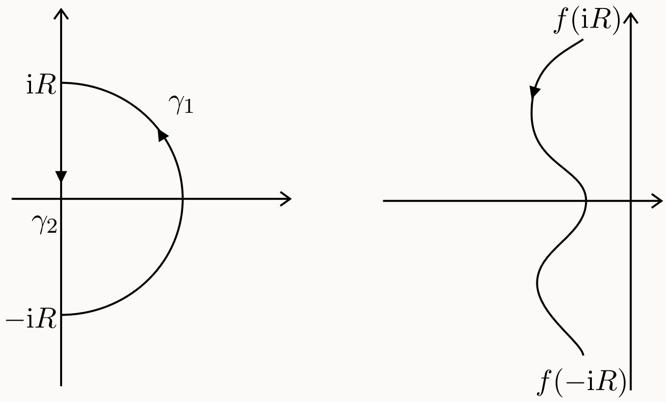



**图 4**

方法二: 用 Rouché 定理. 取定 $R > \lambda + 1$, 那么对任意 $z \in \mathbb{C}$ 满足 $\operatorname{Re} z > 0$ 且 $|z| \geqslant R$, 都有

$$|f(z)| \geqslant |z| - \lambda - |\mathrm{e}^{-z}| \geqslant R - \lambda - 1 > 0.$$

所以只需计算 $f$ 在右半圆盘 $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z| < R\}$ 内的零点个数. 当 $\operatorname{Re} z > 0$ 且 $|z| = R$ 时, 有

$$|f(z) - (z - \lambda)| = |\mathrm{e}^{-z}| \leqslant 1 < R - \lambda \leqslant |z - \lambda|.$$

当 $\operatorname{Re} z = 0$ 时, 有

$$|f(z) - (z - \lambda)| = |\mathrm{e}^{-z}| = 1 < \lambda \leqslant |z - \lambda|.$$

而 $z - \lambda$ 在 $D$ 内有唯一零点 $\lambda$, 根据 Rouché 定理即证.

**习题 1.7 (19H 期中)** 求多项式 $p(z) = z^7 + z^5 + 9z^4 + 8z^3 + 7z + 8$ 在右半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ 内根的个数.

**证明.** 这时候看不出"主项", 那就用辐角原理吧. 采用与上题同样的围道, $N(R)$ 定义如前. 首先

$$\Delta_{\gamma_1} \operatorname{Arg} p(z) = \Delta_{\gamma_1} \operatorname{Arg} z^7 + \Delta_{\gamma_1} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{z^5 + 9z^4 + 8z^3 + 7z + 8}{z^7}\right) = 7\pi + O(R^{-2}).$$

另一方面, 代入 $z = \mathrm{i}y$ 可得 $p(\mathrm{i}y) = 9y^4 + 8 + \mathrm{i}(-y^7 + y^5 - 8y^3 + 7y)$, 此时函数值的实部总大于零, $\gamma_2$ 在 $p$ 下的像大致如图所示:

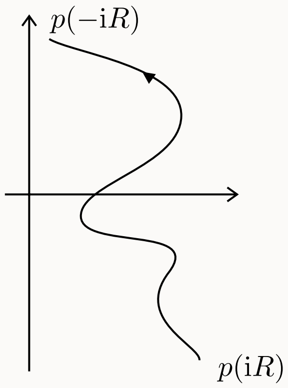



**图 5**

注意到 $\lim\limits_{R\to+\infty}\dfrac{p(\pm\mathrm{i}R)}{|p(\pm\mathrm{i}R)|}=\mp\mathrm{i}$, 结合图示可得 $\lim\limits_{R\to+\infty}\Delta_{\gamma_2}\operatorname{Arg}p(z)=\pi$. 综上所述, 由辐角原理可得

$$\lim_{R\to+\infty}N(R)=\frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\Delta_{\gamma_1}\operatorname{Arg}p(z)+\frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\Delta_{\gamma_2}\operatorname{Arg}p(z)=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=4.$$

所以 $p(z)$ 在右半平面内有四个零点.

**作业 1.27 (教材 4.4.5)** 利用 Rouché 定理证明代数学基本定理.

**评论** 代数基本定理有两种不同的叙述:

- 任意非常数复系数多项式都存在复数根.
- 任意 $n$ 阶复系数多项式恰存在 $n$ 个复数根 (计重数).

利用归纳法不难证明上述两个叙述是等价的. 在复分析这门课里, 我们只需要证第一个. 不过有些时候也可以一步到位, 比如应用辐角原理和 Rouché 定理时.

**证明.** 不妨设 $p(z)=z^n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_kz^k$ 为 $n\geqslant 1$ 次多项式, 我们取定正数 $R>\max(1,\sum\limits_{k=0}^{n-1}|a_k|)$. 那么对任意 $|z|\geqslant R$, 有

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}|a_k||z|^k\leqslant|z|^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|<|z|^n.$$

这说明 $p(z)$ 在 $|z|\geqslant R$ 时恒不为零, 从而只需考虑 $p(z)$ 在 $B(0,R)$ 中的零点. 而上式也说明了当 $|z|=R$ 时, 有 $|p(z)-z^n|<|z|^n$, 根据 Rouché 定理可得 $p(z)$ 有 $n$ 个复数根.

**习题 1.8 (期中常驻题)** 利用下列工具证明代数学基本定理.

1. 最大模定理.
2. 辐角原理.

**证明.** 1. 假设非常值多项式 $p(z)$ 不存在复数根, 那么 $\frac{1}{p(z)}$ 也为整函数. 由 $\lim\limits_{z\to\infty}p(z)=\infty$ 可得, 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $R>0$, 使得 $\max\limits_{|z|=R}|\frac{1}{p(z)}|<\epsilon$, 从而由最大模定理可得 $\frac{1}{|p(0)|}<\epsilon$. 但 $\frac{1}{p(0)}$ 不可能为零, 矛盾!

2. 设 $p(z)$ 为 $n\geqslant 1$ 次多项式, 那么当 $R>0$ 充分大时, 使得 $|p(z)|>0$ 对任意 $|z|\geqslant R$ 成立. 所以 $p(z)$ 在 $B(0,R)$ 内的零点个数即为 $p(z)$ 复数根个数. 我们设 $p(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$, $a_n\neq 0$. 那么

$$\lim_{z\to\infty}z\frac{p'(z)}{p(z)}=\lim_{z\to\infty}\frac{na_nz^n+O(z^{n-1})}{a_nz^n+O(z^{n-1})}=n.$$

所以计算可得

$$\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=R}\frac{p'(z)}{p(z)}\,\mathrm{d}z-n\right|=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=R}\frac{1}{z}\left(z\frac{p'(z)}{p(z)}-n\right)\mathrm{d}z\right|\leqslant\max_{|z|=R}\left|z\frac{p'(z)}{p(z)}-n\right|.$$

由上述可得 $\lim\limits_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=R}\frac{p'(z)}{p(z)}\,\mathrm{d}z=n$. 而辐角原理告诉我们当 $R$ 充分大时该积分项是 $p(z)$ 在 $B(0,R)$ 中的零点个数, 从而为全体复数根个数. 这说明 $p(z)$ 的复数根个数为 $n$.

**评论** 下列是这门课里第三、四章的重要定理的推导图. 即使没法复刻所有的证明, 代数基本定理的几个证明也是要会的.

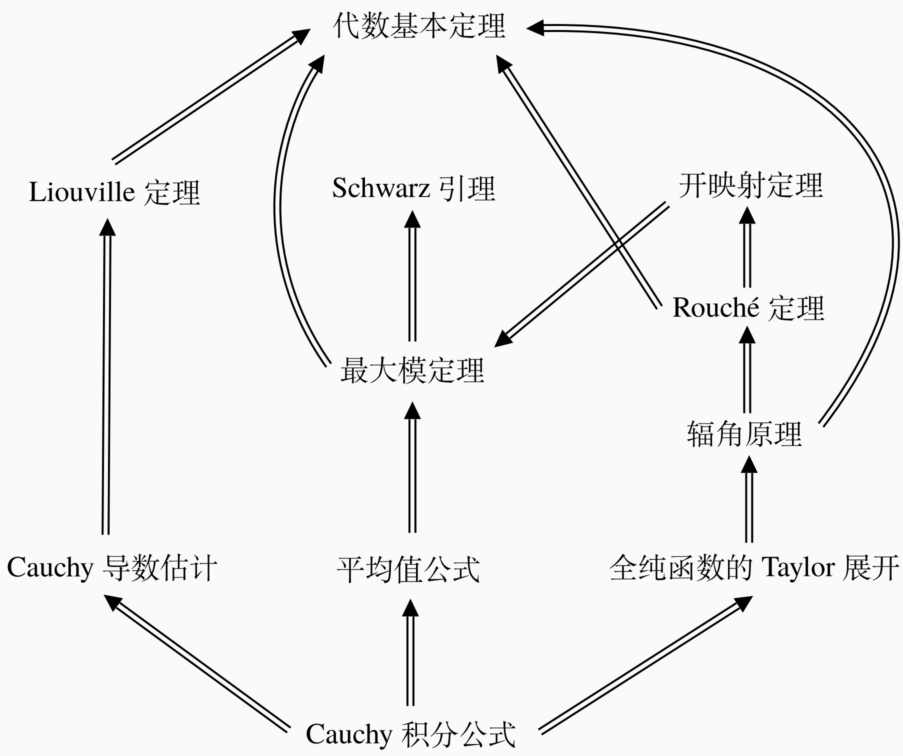



**图 6**

**作业 1.28 (教材 4.4.11)** 求下列全纯函数在 $B(0,1)$ 中的零点个数.

1. $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$.
2. $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8$.
3. $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$.
4. $\mathrm{e}^z - 4z^n + 1$.

**证明.** 本题都用 Rouché 定理处理, 每小问的函数都记为 $f(z)$.

1. 当 $|z|=1$ 时, 有 $|f(z)+8z| = |z^9 - 2z^6 + z^2 - 2| \leqslant 6 < |8z|$, 所以零点个数为 1.
2. 当 $|z|=1$ 时, 有 $|f(z)-8| = |2z^5 - z^3 + 3z^2 - z| \leqslant 7 < 8$, 所以零点个数为零.
3. 当 $|z|=1$ 时, 有 $|f(z)+5z^4| = |z^7 + z^2 - 2| \leqslant 4 < |5z^4|$, 所以零点个数为 4.
4. 当 $|z|=1$ 时, 有 $|f(z)+4z^n| = |\mathrm{e}^z + 1| \leqslant \mathrm{e} + 1 < 4 = |4z^n|$, 所以零点个数为 $n$.

**作业 1.29 (教材 4.4.6)** 设 $0 < r < 1$. 证明: 当 $n$ 充分大时, 多项式 $1 + 2z + \cdots + nz^{n-1}$ 在 $B(0,r)$ 中没有根.

**证明.** 注意到多项式 $p_n(z) = 1 + 2z + \cdots + nz^{n-1}$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \dfrac{1}{(1-z)^2}$ 的部分和, 并且该幂级数收敛半径为 1, 所以 $\{p_n(z)\}$ 在 $B(0,1)$ 内内闭一致收敛于恒非零函数 $\dfrac{1}{(1-z)^2}$. 根

据 Hurwitz 定理即证.

**作业 1.30 (教材 4.4.9)** 设 $D$ 是域, $f_n : D \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 是全纯映射, $\forall n \in \mathbb{N}$. 证明: 若 $\{f_n\}$ 在 $D$ 上内闭一致收敛到 $f$, 则或者 $f(D) = \{0\}$, 或者 $f(D) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

**证明.** 只需证如果 $f$ 不恒为零, 那么 $f$ 恒不为零. 这时, 任取 $z \in D$, 我们选取 $r > 0$ 使得 $B(z, 2r) \subset D$, 那么圆周 $\gamma : |\zeta - z| = r$ 是 $D$ 内的可求长简单闭曲线, 并且其内部包含于 $D$. 利用 Hurwitz 定理可得, 当 $n$ 充分大时, $f_n$ 和 $f$ 在 $B(z, r)$ 内的零点个数相同. 但 $f_n$ 都恒不为零, 所以 $f$ 在 $B(z, r)$ 内没有零点, 从而 $f(z) \neq 0$. 由 $z$ 的任意性即证.

**作业 1.31 (教材 4.4.12)** 证明: 若 $f \in H(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$, $f(\overline{B(0,1)}) \subset B(0,1)$, 则 $f(z)$ 在 $B(0,1)$ 中有唯一的不动点.

**证明.** 考虑函数 $g(z) = f(z) - z$, 那么 $g \in H(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$. 当 $|z| = 1$ 时, 由已知可得

$$|g(z) + z| = |f(z)| < 1 = |z|.$$

根据 Rouché 定理可得 $g(z)$ 在 $B(0,1)$ 的零点个数为 1. 而 $g(z)$ 的零点即为 $f(z)$ 的不动点, 由此即证.

**作业 1.32 (教材 4.4.17)** 设 $D$ 是由可求长简单闭曲线 $\gamma$ 围成的单连通域, $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$. 证明: 若 $f$ 将 $\gamma$ 一一地映为简单闭曲线 $\Gamma$, 则 $f$ 将 $D$ 双全纯地映为由 $\Gamma$ 围成的单连通域 $G$.

**证明.** 任取 $w \in G$, 考虑函数 $f(z) - w$, 并且记 $\Gamma_w = \{\zeta - w : \zeta \in \mathbb{C}\}$, $G_w$ 类似. 此时自然有 $0 \in G_w$, 并且由于 $f(z) - w$ 将简单闭曲线 $\gamma$ 一一地映为简单闭曲线 $\Gamma_w$, 这说明

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f(z) - w) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\zeta \in \Gamma_w}\zeta = 1.$$

由辐角原理可得 $f(z) - w$ 在 $D$ 内恰有一个零点, 亦即存在唯一的 $z \in D$, 使得 $f(z) = w$, 这说明 $f$ 单叶地将 $D$ 映为 $G$, 进而双全纯地将 $D$ 映为 $G$.

## 2 补充习题

这里我们列出了 3.5 节到 4.5 节的相关补充题, 以往年试卷中有一定难度的题为主.

**习题 2.1** 求一个共形变换, 将下列区域 $D$ 映为单位圆盘.

1. (23 期末) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, |z - 1| > 1\}$.
2. (11 期末) $D = \Omega \setminus [0, \mathrm{i}]$, 其中 $\Omega = B(\sqrt{3}, 2) \cap B(-\sqrt{3}, 2)$.

**证明.** 1. 处理这种两个圆周相切的情形, 只需要找分式线性变换将切点映为无穷远点, 那么两个圆周就会被映为两条只在无穷远点相交的直线, 以及两条平行直线. 如下所示:

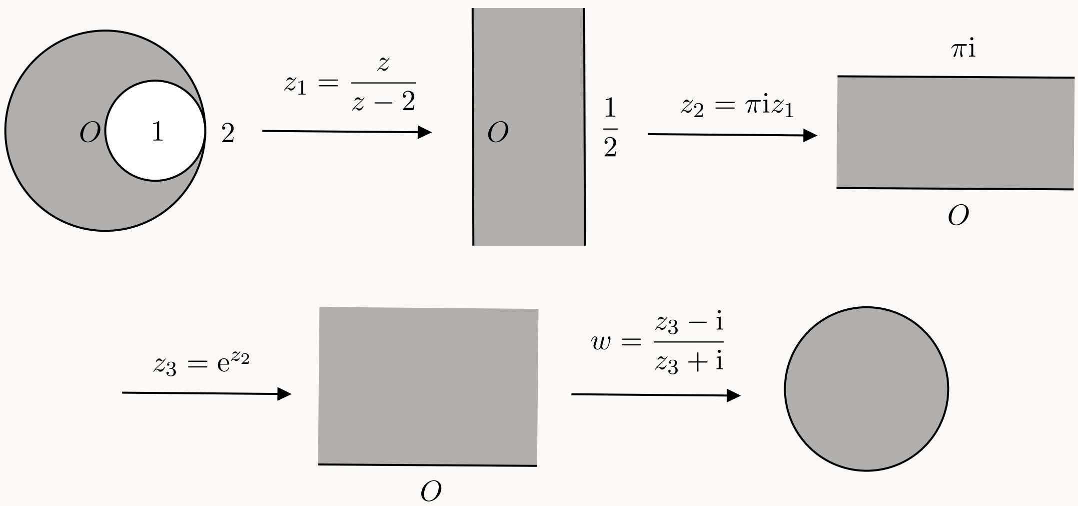



**图 7**

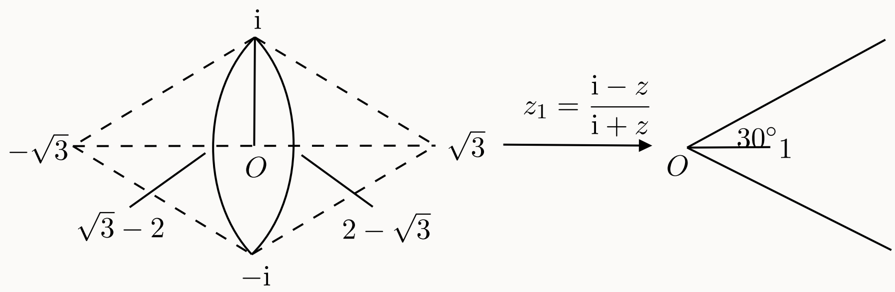
复合可得待求的共形变换为

$$w = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i} z}{z-2}} - \mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i} z}{z-2}} + \mathrm{i}}.$$

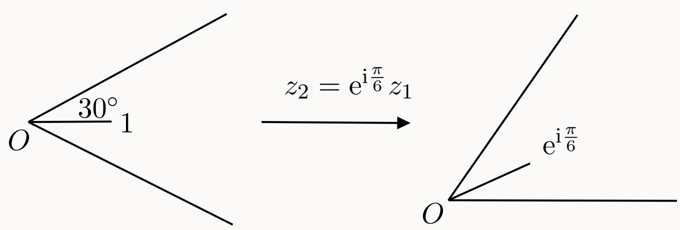
2. 两段圆弧有两个不同交点, 我们先求分式线性变换把 i 映成 0, 把 $-\mathrm{i}$ 映成 $\infty$, 则

$$f_1(z) = \lambda \frac{\mathrm{i} - z}{z + \mathrm{i}}.$$

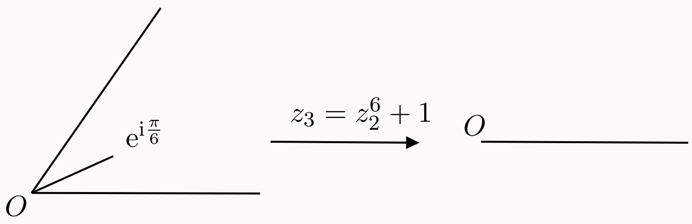
代入 $z = \sqrt{3} - 2$ 可得 $f_1(\sqrt{3} - 2) = \lambda(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2})$, 选取 $\lambda = 1$, 则 $f_1(2 - \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}$, $f_1(0) = 1$. 由此可得第一步变换的结果:




即区域 $\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{6}\}$ 去掉一条割线 $[0, 1]$. 然后把这个角状域逆时针旋转 $30^\circ$, 即




然后考虑六次幂, 然后向右平移 1 所得区域为全平面去掉割线 $[0, \infty)$.




最后作变换 $z_4 = \sqrt{z_3}$(选取满足 $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$ 的单值分支), 即可得上半平面. 综上所述, 所求的一个单叶全纯映射为

$$f(z) = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{i} - z}{\mathrm{i} + z}\right)^6}.$$

**习题 2.2** 1. (22 期中) 设函数 $f(z)$ 在 $|z| < 2$ 内全纯, $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ 为复系数多项式. 证明:

$$|f(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\,\mathrm{d}\theta.$$

2. (21 期末) 设 $p(z)$ 为 $n$ 次复系数多项式, 对 $r > 0$ 记 $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |p(z)|$. 证明: $\dfrac{M(r)}{r^n}$ 是 $(0, \infty)$ 上的减函数.

**证明.** 1. 这个形式很像平均值公式, 但 $p(0)$ 的模不为 1, 所以没法一步得证. 不过有一个小技巧: 考虑多项式

$$q(z) := z^n \overline{p\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \cdots + \overline{a_{n-1}}z + 1.$$

那么 $q(0) = 1$, 并且对任意模长为 1 的复数 $z$, 由 $z\bar{z} = 1$ 可得

$$|q(z)| = |z|^n \left|p\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\right| = |p(z)|.$$

对全纯函数 $f(z)q(z)$ 应用平均值公式可得

$$|f(0)| = |f(0)q(0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\,\mathrm{d}\theta.$$

2. 思路是转化为作业 1.6 的结论, 工具和前面类似. 考虑多项式

$$q(z) = z^n p\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n.$$

我们记 $\tilde{M}(r) = \sup\limits_{|z|=r} |q(z)|(r > 0)$, 那么

$$\tilde{M}(r) = r^n \max_{|z|=r}\left|p\left(\frac{1}{z}\right)\right| = r^n \max_{|z|=\frac{1}{r}} |p(z)| = r^n M\left(\frac{1}{r}\right).$$

由作业 1.6 可得 $\tilde{M}(r)$ 是关于 $r$ 的递增函数, 上式中用将 $r$ 替换为 $\frac{1}{r}$ 即可得 $\frac{M(r)}{r^n} = \tilde{M}(\frac{1}{r})$ 是关于 $r$ 的递减函数.

**习题 2.3 (23 期末)** 设 $D\subset\mathbb{C}$ 为有界区域, $f:D\to\mathbb{C}$ 全纯. 如果对任意收敛于 $\partial D$ 的点列 $z_n\in D$, 都有

$$\limsup_{n\to\infty}|f(z_n)|\leqslant M.$$

证明: 对任意 $z\in D$, 有 $|f(z)|\leqslant M$.

**评论** 注意我们的最大模定理是有两种叙述的: 一种针对任意区域 $D$ 和 $f\in H(D)$, 说非常值的 $f$ 不可能在 $D$ 内取得最大模. 另一种针对有界区域, 并且要求 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 这时才说 $f$ 的最大模在边界取到. 而本题不仅没有保证 $f$ 连续到边界, 甚至 $f$ 在边界上都还没有定义, 绝不能用第二个叙述. 考试时很多同学在这里出错.

**证明.** 我们设 $A=\sup\limits_{z\in D}|f(z)|\in[0,\infty]$, 那么存在 $D$ 中的点列 $\{z_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(z_n)|=A$. 由于 $D$ 是有界区域, 所以 $\{z_n\}$ 存在收敛子列 $\{z_{n_k}\}$, 其极限 $z\in\overline{D}$.

如果 $z\in D$, 那么有 $|f(z)|=A$, 此时 $f$ 在 $D$ 内部取得最大模, 所以 $f$ 为常值函数, 结合条件可得 $|f(z)|\leqslant M$ 恒成立. 如果 $z\in\partial D$, 那么 $\{z_{n_k}\}$ 是收敛于 $\partial D$ 的点列, 从而 $M\geqslant\limsup\limits_{k\to\infty}|f(z_{n_k})|=A$, 因此结论依旧成立.

**习题 2.4** 设 $f\in H(B(0,1))$. 证明: 存在 $z_0\in\partial B(0,1)$ 和收敛于 $z_0$ 的点列 $\{z_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)$ 存在.

**证明.** 假设待证不成立, 首先断言: 对任意 $z_0\in\partial B(0,1)$, 都有 $\lim\limits_{B(0,1)\ni z\to z_0}f(z)=\infty$. 如若不然, 则存在 $z_0\in\partial B(0,1)$ 和收敛于 $z_0$ 的点列 $\{z_n\}\subset B(0,1)$, 使得 $\{f(z_n)\}$ 为有界列, 从而存在子列 $\{z_{n_k}\}$, 使得 $\{f(z_{n_k})\}$ 是收敛列, 这与假设矛盾.

根据上述断言, $f$ 在 $B(0,1)$ 内只有有限个互异零点. 如若不然, 根据有界性可得存在收敛的互异零点列. 注意到 $f$ 不可能恒为零, 由唯一性定理可得该零点列只能收敛到边界 $\partial B(0,1)$, 这就与断言矛盾. 我们设这有限个互异零点为 $z_1,\cdots,z_n$, 重数分别为 $k_1,\cdots,k_n$. 考虑函数

$$g(z)=\frac{f(z)}{(z-z_1)^{k_1}\cdots(z-z_n)^{k_n}}.$$

那么 $g\in H(B(0,1))$ 且 $g$ 无零点, 从而 $\dfrac{1}{g}\in H(B(0,1))$. 根据断言可得, 对任意 $z_0\in\partial B(0,1)$, 都有 $\lim\limits_{B(0,1)\ni z\to z_0}\dfrac{1}{g(z)}=0$. 这说明我们可以延拓 $\dfrac{1}{g}$ 的边界值恒为零, 得到的延拓函数 $G$ 属于 $H(B(0,1))\cap C(\overline{B(0,1)})$. 但由最大模定理可得

$$\max_{|z|\leqslant 1}|G(z)|=\max_{|z|=1}|G(z)|=0,$$

所以在 $B(0,1)$ 内 $G(z)=\dfrac{1}{g(z)}$ 恒为零, 这不可能! 由此即证.

**习题 2.5** 设 $f\in H(B(0,1))$, $f(0)=0$, 并且 $|\operatorname{Re}f(z)|<1,\forall z\in B(0,1)$. 证明:

1. $|\operatorname{Re}f(z)|\leqslant\dfrac{4}{\pi}\arctan|z|,\forall z\in B(0,1)$.

2. $|\operatorname{Im} f(z)| \leqslant \dfrac{2}{\pi}\log\dfrac{1+|z|}{1-|z|}, \forall z \in B(0,1)$.

**证明.** 首先需要化归为可以使用 Schwarz 引理的情形. 如下所示, 给出了将区域 $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1\}$ 映为 $B(0,1)$ 的共形变换, 并且把 0 映为 0:

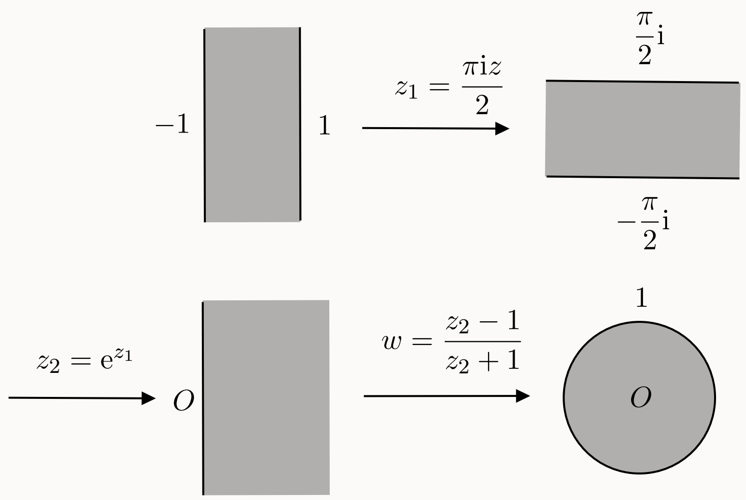



**图 8**

复合可得待求的一个共形变换为 $w = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i} z}{2}} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i} z}{2}} + 1} = \mathrm{i}\tan\dfrac{\pi z}{4}$. 从而我们考虑函数 $g(z) = \mathrm{i}\tan\dfrac{\pi f(z)}{4}$. 由 Schwarz 引理可得 $|g(z)| \leqslant |z|$. 反解可得

$$f(z) = \frac{2}{\pi \mathrm{i}}\log\frac{1+g(z)}{1-g(z)} = \frac{2}{\pi}\arg\frac{1+g(z)}{1-g(z)} - \mathrm{i}\cdot\frac{2}{\pi}\log\left|\frac{1+g(z)}{1-g(z)}\right|.$$

这里 log 是对数主支. 首先可得

$$|\operatorname{Im} f(z)| \leqslant \frac{2}{\pi}\log\frac{1+|g(z)|}{1-|g(z)|} \leqslant \frac{2}{\pi}\log\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

其次, 我们计算可得

$$\operatorname{Re}\frac{1+g(z)}{1-g(z)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+g(z)}{1-g(z)} + \frac{1+\overline{g(z)}}{1-\overline{g(z)}}\right) = \frac{1-|g(z)|^2}{|1-g(z)|^2}.$$

$$\operatorname{Im}\frac{1+g(z)}{1-g(z)} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1+g(z)}{1-g(z)} - \frac{1+\overline{g(z)}}{1-\overline{g(z)}}\right) = \frac{2\operatorname{Im} g(z)}{|1-g(z)|^2}.$$

由 $-1 < \operatorname{Re} f(z) < 1$ 可得 $-\dfrac{\pi}{2} < \arg\dfrac{1+g(z)}{1-g(z)} < \dfrac{\pi}{2}$, 所以

$$\arg\frac{1+g(z)}{1-g(z)} = \arctan\left(\operatorname{Im}\frac{1+g(z)}{1-g(z)} \Big/ \operatorname{Re}\frac{1+g(z)}{1-g(z)}\right) = \arctan\frac{2\operatorname{Im} g(z)}{1-|g(z)|^2}.$$

因此

$$\begin{aligned}|\operatorname{Re} f(z)| &= \frac{2}{\pi}\left|\arg\frac{1+g(z)}{1-g(z)}\right| = \frac{2}{\pi}\arctan\frac{2|\operatorname{Im} g(z)|}{1-|g(z)|^2} \\ &\leqslant \frac{2}{\pi}\arctan\frac{2|g(z)|}{1-|g(z)|^2} \leqslant \frac{2}{\pi}\arctan\frac{2|z|}{1-|z|^2} \leqslant \frac{4}{\pi}\arctan|z|.\end{aligned}$$

最后一步用了 tan 的二倍角公式. 之所以不是严格的等号, 是因为 arctan 的值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

**习题 2.6 (18 期中)** 设全纯函数 $f: B(0,1) \to B(0,1)$ 有两个不动点, 证明 $f$ 为恒等映射.

**证明.** 设 $a, b \in B(0,1)$ 是 $f$ 的两个不动点, 我们记 $\varphi_a(z) = \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$. 要构造一个适用 Schwarz 引理的函数, 我们考虑 $g = \varphi_a \circ f \circ \varphi_a^{-1}$, 那么 $g(0) = 0$ 且 $g: B(0,1) \to B(0,1)$ 为全纯函数, 所以 $|g(z)| \leqslant |z|$ 对任意 $z \in B(0,1)$ 成立. 又因为

$$g(\varphi_a(b)) = \varphi_a(f(b)) = \varphi_a(b),$$

并且由 $a \neq b$ 可得 $\varphi_a(b) \neq 0$, 所以由 Schwarz 引理的取等条件可得 $g = \mathbb{1}$ 为恒等映射, 从而 $f = \varphi_a^{-1} \circ \mathbb{1} \circ \varphi_a = \mathbb{1}$ 为恒等映射.

**习题 2.7 (23 保研优营)** 设 $f: B(0,1) \to B(0,1)$ 为全纯函数. 如果 $r := |f(0)|$ 不为零, 证明 $f$ 在 $B(0,r)$ 上恒不为零.

**证明.** 我们的想法是给出 $|f(z) - f(0)|$ 的估计. 记 $a = f(0)$, 以及 $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, 考虑全纯函数 $g = \varphi_a \circ f: B(0,1) \to B(0,1)$, 满足 $g(0) = 0$, 那么由 Schwarz 引理可得 $|g(z)| \leqslant |z|$ 恒成立. 注意到反解可得 $f(z) = \varphi_a^{-1} \circ g(z) = \frac{a-g(z)}{1-\bar{a}g(z)}$, 所以

$$|f(z) - a| = \left|\frac{(1-|a|^2)g(z)}{1-\bar{a}g(z)}\right| \leqslant \frac{(1-|a|^2)|z|}{1-|a||z|}.$$

由此可得当 $|z| < |a|$ 时, 有 $|f(z) - a| < |a|$, 所以 $|f(z)| \geqslant |a| - |f(z) - a| > 0$, 即证.

**习题 2.8 (18 期末)**

1. 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一个区域, $F(z,s)$ 是 $\Omega \times [0,1]$ 上的连续函数, 并且对任意固定的 $s \in [0,1]$, $F(z,s)$ 是关于 $z$ 的全纯函数. 证明: 函数

$$f(z) = \int_0^1 F(z,s)\,\mathrm{d}s$$

在 $\Omega$ 上全纯.

2. 如果函数 $f(t)$ 在 $t \geqslant 0$ 上连续有界, 则函数

$$g(z) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t$$

在 $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ 有定义且全纯.

**评论** 在处理第 1 题时, 可能会有同学写出如下的证明: 任取 $\Omega$ 中的可求长简单闭曲线 $\gamma$, 那么

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \left(\int_0^1 F(z,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\int_\gamma F(z,s)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}s = \int_0^1 0\,\mathrm{d}s = 0,$$

由 Morera 定理可证. 但上述曲线积分和定积分换序是想当然的, 我们并没有保证这件事成立的定理. 所以需要按如下方法证明.

**证明.** 1. 考虑黎曼和函数 $f_n(z) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} F\left(z, \dfrac{k}{n}\right)$, 那么 $f_n \in H(\Omega)$. 我们任取紧集 $K \subset \Omega$, 那么 $F$ 在 $K \times [0,1]$ 上一致连续. 从而任意 $\epsilon > 0$, 对充分大的 $n$, 只要 $t, s \in [0,1]$ 满足 $|t-s| \leqslant \frac{1}{n}$, 则有 $|F(z,t) - F(z,s)| < \epsilon$ 对任意 $z \in K$ 成立. 所以有

$$|f_n(z) - f(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(F\left(z, \frac{k}{n}\right) - F(z,s)\right)\mathrm{d}s\right| < \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{n} = \epsilon.$$

这说明 $\{f_n\}$ 在 $K$ 内一致收敛于 $f$, 从而在 $\Omega$ 内内闭一致收敛于 $f$. 根据 Weierstrass 定理可得 $f \in H(\Omega)$.

2. 设 $M > 0$ 是 $|f(t)|$ 的一个上界. 那么任取 $z \in \mathbb{C}$ 满足 $\operatorname{Re} z < 0$, 有 $|f(t)\,\mathrm{e}^{-zt}| \leqslant M\,\mathrm{e}^{-t\operatorname{Re} z}$. 注意到 $M\,\mathrm{e}^{-t\operatorname{Re} z}$ 关于 $t$ 是 $[0,\infty)$ 上的可积函数, 所以 $g(z)$ 在右半平面 $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ 上有定义. 另一方面, 我们考虑函数列

$$g_n(z) = \int_0^n f(t)\,\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t.$$

那么由第 1 问可得 $g_n \in H(D)$. 现在任取 $D$ 中的紧集 $K$, 我们记 $\rho = d(K, \partial D) > 0$. 根据 $D$ 的定义可得对任意 $z \in K$, 都有 $\operatorname{Re} z \geqslant \rho$. 此时

$$|g_n(z) - g(z)| \leqslant \int_n^\infty |f(t)\,\mathrm{e}^{-zt}|\,\mathrm{d}t \leqslant M \int_n^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{\rho}\,\mathrm{e}^{-\rho n}.$$

由此可得 $\{g_n\}$ 在 $K$ 上一致收敛于 $g$, 从而在 $D$ 上内闭一致收敛于 $g$. 由 Weierstrass 定理可得 $g \in H(D)$.

**习题 2.9** 设 $f_n(z)(n = 1, 2, \cdots)$ 在区域 $D$ 内全纯, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $D$ 内一致收敛. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ 在 $D$ 内内闭一致收敛.

**证明.** 任给紧集 $K \subset D$, 设 $\rho = d(K, \partial D) > 0$. 任给 $\epsilon > 0$, 那么存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $n > N$ 和 $p \in \mathbb{N}$, 都有 $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} f_k(z)\right| < \epsilon$ 对任意 $z \in D$ 成立. 所以对任意 $z \in K$, 由 Cauchy 积分公式可得

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n}^{n+p} f_n'(z)\right| &= \left|\sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|\zeta - z| = \frac{\rho}{2}} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|\zeta - z| = \frac{\rho}{2}} \frac{1}{(\zeta - z)^2} \sum_{k=n}^{n+p} f_n(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\frac{\rho}{2} \cdot \frac{1}{(\rho/2)^2} \sup_{|\zeta - z| = \rho/2} \left|\sum_{k=n}^{n+p} f_n(\zeta)\right| < \frac{2\epsilon}{\rho}.\end{aligned}$$

由此可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ 在 $K$ 内一致收敛, 从而在 $D$ 中内闭一致收敛.

**习题 2.10 (23 期末)** 考虑函数 $f(z) = \sec z$ 在 $z = 0$ 处的 Taylor 展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

1. 求该幂级数的收敛半径.
2. 计算 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$.
3. 证明: 对任意 $n \geqslant 0$, $a_n \in \mathbb{Z}$.

**证明.** 1. 按公式算收敛半径会非常令人自闭, 助教数分没这么强, 所以换个简单的办法: 一方面, 由于 $f \in H(B(0, \frac{\pi}{2}))$, 由 Taylor 展开定理可得该幂级数在 $B(0, \frac{\pi}{2})$ 中收敛. 假设收敛半径 $R > \frac{\pi}{2}$, 那么其和函数 $F(z)$ 在 $z = \frac{\pi}{2}$ 附近全纯, 从而在该点附近有界. 但 $|z| < \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $F(z) = f(z)$, 而 $z \to \frac{\pi}{2}$ 时有 $f(z) \to \infty$, 矛盾! 因此收敛半径只能是 $\frac{\pi}{2}$.

2. 由 $f(z)\cos z=1$ 可得

$$1=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}z^{2m}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{n+2m=k\\ n,m\geqslant 0}}(-1)^m\binom{k}{n}a_n\right)\frac{z^k}{k!}.$$

由此可得前几项系数满足的递归式为

$$a_0=1,\ a_1=0,\ a_2-a_0=0,\ a_3-3a_1=0,\ a_4-6a_2+a_0=0.$$

所以解出这些系数为

$$a_0=1,\ a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=0,\ a_4=5.$$

3. 利用归纳法即可. 第 2 问已算出了 $a_0=1$ 为整数. 假设 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$ 都是整数, 那么根据第 2 问中得到的递归式可得

$$a_k=-\sum_{\substack{n+2m=k\\ m\geqslant 0,0\leqslant n<k}}(-1)^m\binom{k}{n}a_n.$$

由此可得 $a_k$ 也是整数, 即证.

**习题 2.11 (22 期中)** 设 $a\in B(0,1)$, 计算下列积分:

$$\int_{|z|=1}\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

**证明.** 根据 Taylor 展开可得

$$\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}},\ \forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

并且该级数在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上内闭一致收敛, 从而在 $|z|=1$ 上一致收敛. 所以

$$\int_{|z|=1}\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-a}\,\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^{2n+1}(z-a)}=:\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}I_n.$$

如果 $a=0$, 那么对任意 $n$ 都有 $I_n=0$. 如果 $a\neq 0$, 那么对充分小的 $r>0$, 有

$$I_n=\int_{|z|=r}\frac{1/(z-a)}{z^{2n+1}}\,\mathrm{d}z+\int_{|z-a|=r}\frac{z^{-2n-1}}{z-a}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{(2n)!}\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}z^{2n}}\bigg|_{z=0}\left(\frac{1}{z-a}\right)+\frac{2\pi\mathrm{i}}{a^{2n+1}}=0.$$

综上所述, $I_n$ 总恒为零, 所以原积分为零.

**习题 2.12 (Cartan 定理)** 设 $D$ 是有界区域, $z_0$ 为 $D$ 中给定一点. $f\in H(D)$ 满足 $f(D)\subset D$. 证明: 如果 $f(z_0)=z_0$ 且 $f'(z_0)=1$, 那么 $f$ 为恒等映射.

**评论** 可以看出, Cartan 定理是 Schwarz 引理的取等条件的一个推广. 值得指出的是, Cartan 定理在多复变情形下也是成立的.

**证明.** 不妨设 $z_0=0$, 不然考虑函数 $g(z):=f(z-z_0)-z_0$ 即可. 假设 $f$ 不是恒等映射, 那么由题设可得, 存在开圆盘 $B(0,r)\subset D$, 以及整数 $N\geqslant 2$, 使得在 $B(0,r_0)$ 内恒成立.

$$f(z)=z+\sum_{n=N}^{\infty}a_nz^n,\ a_N\neq 0.$$

设 $0<r_1<r_0$ 满足 $B(0,r_1)\subset f^{-1}(B(0,r_0))$, 那么在 $B(0,r_1)$ 内, 恒有

$$\begin{aligned}f(f(z))&=f(z)+\sum_{n=N}^{\infty}a_nf(z)^n\\&=z+\sum_{n=N}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=N}^{\infty}a_n\left(z+\sum_{m=N}^{\infty}a_mz^m\right)^n\\&=z+2a_Nz^N+\cdots.\end{aligned}$$

如此归纳, 我们可以找到一列递减的正数列 $\{r_k:k=0,1,2,\cdots\}$, 使得在 $B(0,r_k)\subset D$ 有 Taylor 展开

$$\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{k\text{ times}}(z)=z+ka_Nz^N+\cdots.$$

记 $f_k$ 为 $f$ 复合 $k$ 次得到的函数, 那么由上述可得 $f_k^{(N)}(0)=ka_N,\forall k$, 这说明 $|f_k^{(N)}(0)|=k|a_N|$ 发散到无穷.

另一方面, 由于 $f(D)\subset D$ 且 $D$ 是有界域, 所以存在 $M>0$ 使得 $|f_k(z)|\leqslant M$ 对任意 $z\in D$ 和 $k=0,1,\cdots$ 成立. 根据 Cauchy 导数估计可得

$$|f_k^{(N)}(0)|\leqslant\frac{N!}{r_0^N}\max_{|z|\leqslant r_0}|f_k(z)|\leqslant\frac{MN!}{r_0^N}.$$

这又说明 $|f_k^{(N)}(0)|$ 有一致的上界, 矛盾!

**习题 2.13** 证明: 任意单叶整函数 $f$ 一定是线性函数.

**证明.** 我们设 $f(0)=z_0$, 那么由开映射定理可得, 存在 $r>0$, 使得 $B(z_0,r)\subset f(B(0,1))$. 从而由 $f$ 的单叶性可得对任意 $|z|\geqslant 1$, 都有 $|f(z)-z_0|\geqslant r$. 注意到

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-z_0}{z}, & z\neq 0,\\ f'(0), & z=0\end{cases}$$

是整函数. 由单叶性可得 $f'(0)\neq 0$ 且 $f(z)\neq z_0,\forall z\neq 0$, 所以 $g$ 是恒非零的整函数, 由此可得 $h(z):=\frac{1}{g(z)}$ 也是整函数. 注意到 $|z|\geqslant 1$ 时有 $|h(z)|\leqslant\frac{|z|}{r}$, 由作业 1.2 可得 $h(z)=az+b$ 为线性函数, 故 $f(z)=\frac{z}{az+b}+z_0$ 是分式线性变换. 但 $f$ 又是整函数, 所以 $f$ 只能为线性函数.

**习题 2.14 (16H 期中)** 设 $f,g$ 在单位闭圆盘 $\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant 1\}$ 上全纯, 并且在 $|z|=1$ 上满足

$$|f(z)+g(z)|<|f(z)|+|g(z)|.$$

1. 证明: 对任意非负实数 $\lambda$, $f-\lambda g$ 和 $f$ 在单位圆周内的零点个数相同.

2. 证明: $f$ 和 $g$ 在单位圆周内的零点个数相同.

**证明.** 1. 我们记 $\gamma$ 为逆时针定向的单位圆周. 由已知可得当 $|z|=1$ 时, $f(z)$ 和 $g(z)$ 总不同向, 所以此时 $f(z)-\lambda g(z)$ 总不为零, 那么

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f-\lambda g)=\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f+\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg}\left(1-\lambda\frac{g}{f}\right).$$

根据辐角原理, 我们只需证 $\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg}\left(1-\lambda\frac{g}{f}\right)=0$. 而由条件可得 $|z|=1$ 时 $\frac{g(z)}{f(z)}$ 不可能为正实数, 从而 $1-\lambda\frac{g(z)}{f(z)}$ 的取值不可能为小于 1 的实数. 如果曲线 $\theta\mapsto 1-\lambda\frac{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}$ 绕原点转的圈数不为零, 那么必然会与负实轴相交, 矛盾! 由此即证.

2. 上一题中取 $\lambda=1$, 可得 $f-g$ 和 $f$ 在单位圆周内的零点个数相同. 类似可得 $g-f$ 和 $g$ 在单位圆周内的零点个数相同, 由此即证.

**习题 2.15 (19 期中)** 设 $0<a_1<\cdots<a_n$ 为实数, 证明:

1. 多项式 $p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 的所有零点都落在 $B(0,1)$ 内.
2. 三角多项式 $a_0+a_1\cos\theta+\cdots+a_n\cos n\theta$ 在 $(0,2\pi)$ 中有 $2n$ 个不同的零点.

**证明.** 1. 考虑多项式 $q(z)=(1-z)p(z)=a_0+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})z^k-a_nz^{n+1}$, 那么任给 $\epsilon>0$, 当 $|z|=1+\epsilon$ 时有

$$|q(z)-a_nz^{n+1}|\leqslant a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})|z|^k\leqslant a_0|z|^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})|z|^{n+1}=a_n|z|^{n+1}.$$

根据 Rouché 定理可得 $q(z)$ 的全部零点都落在 $B(0,1+\epsilon)$ 中, 从而由 $\epsilon$ 的任意性可得 $q(z)$ 的全部零点落在 $\overline{B(0,1)}$ 中. 如果 $z_0\in\partial B(0,1)$ 是 $q(z)$ 的根, 那么

$$|a_nz_0^{n+1}|=a_n=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})\geqslant\left|a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})z_0^k\right|=|a_nz_0^{n+1}|.$$

这说明上式不等号只能取等. 注意到 $a_0,a_1-a_0,\cdots,a_n-a_{n-1}$ 都是正实数, 这等价于 $1,z_0,\cdots,z_0^n$ 同向, 所以 $z_0$ 只可能为 1. 而注意到 $p(1)=a_0+\cdots+a_n>0$, 所以 1 不是 $p(z)$ 的零点, 故 $p(z)$ 的零点都属于 $B(0,1)$.

2. 该三角多项式即为 $\operatorname{Re}p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$. 我们记 $\gamma$ 为逆时针定向的单位圆周, 由第 1 问及辐角原理可得 $\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma\operatorname{Arg}p(z)=n$. 任意连续曲线绕原点一圈时, 至少与虚轴相交两次, 这说明曲线 $\theta\mapsto p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 至少与虚轴相交 $2n$ 次, 亦即 $\operatorname{Re}p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 在 $[0,2\pi]$ 中至少有 $2n$ 个不同的零点. 又因为 $h(1)>0$, 所以 $\theta=0,2\pi$ 不是 $\operatorname{Re}p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 的零点, 因此 $\operatorname{Re}p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 在 $(0,2\pi)$ 中至少有 $2n$ 个不同的零点. 另一方面, 注意到当 $|z|=1$ 时, 有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}p(z)&=a_0+\frac{a_1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\cdots+\frac{a_n}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)\\&=\frac{2a_0z^n+a_1z^{n-1}(1+z^2)+\cdots+a_n(1+z^{2n})}{z^n}.\end{aligned}$$

上式分母是一个 $2n$ 次多项式, 至多有 $2n$ 个互异根, 从而 $\operatorname{Re}p(z)=0$ 至多有 $2n$ 个模长为 1 的互异零点, 所以 $\operatorname{Re}p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 在 $(0,2\pi)$ 中至多有 $2n$ 个不同零点. 综上即证.