日期:　　　/

第十一章

11.3

1. 曲线积分第一还是看可不可以直接换元. 不行 Stokes / Green

11.4

1. 曲面积分不到万不得已不进行三角换元, 因正负号极易错.

实在要换 把z换成 $z=f(x,y)$

若上例. 则 $\begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & f_x' \\ 0 & 1 & f_y' \end{vmatrix} dxdy$

第十二章

第二积分平均值定理: $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$

几个重要公式

1. $\cos ax = \frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right)$　　$x \in [-\pi, \pi]$

$\Rightarrow \frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2a}{a^2-n^2}$

$\Rightarrow \cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$

2. $\int x\cos nx\,dx = \frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx$

$\int x\sin nx\,dx = -\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx$

3. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)/a^2+b^2$

$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)/a^2+b^2$

日期: /

☆ 积分第二中值定理 P300

做一下综合习题 T6

十三章

13.3 含参变量积分

$u \mapsto \varphi(u) = \int_a^b f(x,u)\,dx$ ☆ $f(x,u) \in C([a,b]\times[\alpha,\beta])$

定理13.30 容易忘记

$\nabla u\cdot\vec{v} + u\nabla\cdot\vec{v}$.

$\nabla u\times\vec{v} + u\nabla\times\vec{v}$.

$\vec{v_2}\cdot\nabla\times\vec{v_1} - \vec{v_1}\cdot\nabla\times\vec{v_2}$.

场论

$\nabla\cdot(u\vec{v}) = \nabla u\cdot\vec{v} + u\nabla\cdot\vec{v}$ 结果是数

$\nabla\times(u\vec{v}) = u\nabla\times\vec{v} + \nabla u\times\vec{v}$ 结果是向量

$\nabla\cdot(\vec{v_1}\times\vec{v_2}) = \vec{v_2}\cdot\nabla\times\vec{v_1} - \vec{v_1}\cdot\nabla\times\vec{v_2}$ 记 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{v}) = 0$ $\nabla\times\nabla u = 0$

$\nabla\times(\nabla\times\vec{u}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{u}) - \nabla^2\vec{u} = 0$

反积分/含参变量积分 带三角函数的判断基本技巧就是 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

看到平方就用

日期:　　/

小tips:

$(\tau_x, \tau_y) = (-n_y, n_x)$

取 $\vec{v} = \varphi \nabla \psi$ 应用Gauss公式 $\left(\oiint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, ds = \iiint_V \nabla \cdot \vec{v}\, dV \right)$ Laplace

$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) = \nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \varphi \nabla \cdot \nabla\psi = \nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \varphi \Delta \psi$

$\oiint_{S^*} \underline{\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}}\, ds = \oiint_{S^*} \underline{\varphi \nabla\psi \cdot \vec{n}}\, ds = \iiint_V \nabla\varphi \cdot \nabla\psi\, dV + \iiint_V \varphi \Delta \psi\, dV$ 第一Green公式

交换 φ. ψ. 得到

$\oiint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, ds = \iiint_V \Delta\varphi \cdot \Delta\psi\, dV + \iiint_V \psi \Delta \varphi\, dV$

相减: $\oiint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds = \iiint_V (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi)\, dV$ 第二Green公式

特例: $\psi \equiv 1$ 得到 $\underline{\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, ds = \iiint_V \Delta \varphi\, dV}$

而若 $\Delta\varphi = 0 \Rightarrow \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, ds = 0$

二维 ⇒ 三维 是对 $u \nabla u$

$\oint \Rightarrow \iint$ 是对 $\underline{u \frac{\partial u}{\partial n}}$

$\oint_L \frac{-y\,dx + x\,dy}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} = 2\pi ab$ $\iint_S \frac{x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy}{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^{3/2}} = 4\pi abc$

补面法, 挖洞法

小知识: $\int_L f(x)\,dx + f(y)\,dy + f(z)\,dz \xlongequal{\text{stokes}} 0$

日期:　　/

例: 设 $\Omega=\{p\in\mathbb{R}^3 \mid |p|<1\}$. 设 $V:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $V=(v_1,v_2,v_3)$ 是 C^1 向量场. V在 $\mathbb{R}^3/\Omega$ 上恒为0.
且 $\nabla\cdot V$ 在$\mathbb{R}^3$中恒为0

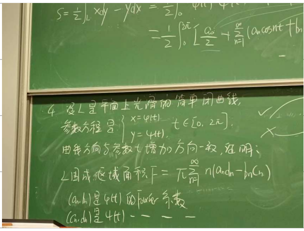
(1) 设 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是 C^1 函数. 求 $\iiint_\Omega \nabla f\cdot \vec{v}\,dxdydz$

(2) 求 $\iiint_\Omega v_1\,dxdydz$

(1) $\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}v_1+\frac{\partial f}{\partial y}v_2+\frac{\partial f}{\partial z}v_3\,dxdydz$

$=\iint_{\partial\Omega} fv_1\,dydz+fv_2\,dzdx+fv_3\,dxdy=0$ (因 V在边界上也为0)

(2) 取 $f(x,y,z)=x$ 即可

例: 

$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nt+b_n\sin nt$

$\psi(t)=\frac{c_0}{2}+\sum c_n\cos nt+d_n\sin nt$

$F=\oint_L xdy-ydx$　代入即得

Riemann可积 $\Rightarrow$ 平方可积

例: $f(x)$, $g(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ R-可积, 证明: $f(x)$和$g(x)$ Fourier 级数相等 $\Leftrightarrow \int_a^b|f(x)-g(x)|dx=0$　$\forall a,b$

($\Rightarrow$) $f(x)-g(x)$ Fourier 级数为0　又 $f(x)-g(x)$ R-可积

由 Parseval　$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2dx=0$

$\Rightarrow\ 0\le\int_a^b|f(x)-g(x)|dx\le\sqrt{\left(\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2dx\right)}=0$

($\Leftarrow$) $|a_n-a_n'|=\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))\cos nx\,dx\right|\le\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|dx=0$ ✓

日期: /

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-\cos bx}{x^2}dx\ (a>0)\ \xlongequal{\text{分部}}\ \int_0^{+\infty}\frac{-2ax\,e^{-ax^2}+b\sin bx}{x}dx$$

例: (1) $\int_0^{+\infty}\cos\alpha x\,e^{-\beta x}dx=\left(\frac{e^{-\beta x}(-\beta\cos\alpha x+\alpha\sin\alpha x)}{\alpha^2+\beta^2}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$

$$=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

☆ (2) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx-\cos ax}{x}dx$ e^{-ux}

$$=\int_0^{+\infty}(\cos bx-\cos ax)\left(\int_0^{+\infty}e^{-xy}dy\right)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}(\cos bx-\cos ax)e^{-xy}dx\right)dy$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{b^2+y^2}-\frac{y}{a^2+y^2}\right)dy=\ln\frac{a}{b}$$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}dx\quad(\alpha,\beta>0)$

$$\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x=\frac{1}{2}(\cos2\beta x-\cos2\alpha x)+\frac{1}{4}(\cos^2 2\alpha x-\cos^2 2\beta x)$$

$$=\frac{1}{2}(\cos2\beta x-\cos2\alpha x)+\frac{1}{8}(\cos4\alpha x-\cos4\beta x)$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{8}\ln\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3}{8}\ln\frac{\alpha}{\beta}$$

☆例: 讨论 $f(x)=\ln\left(1+\frac{\sin x}{x^p}\right)$, 当 x 取不同值时 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 的收敛域

(1) 要使 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 有定义, $p>0$.

$x\to+\infty$ 时, $f(x)=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{1}{2}\frac{\sin^2x}{x^{2p}}+o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)$ $\qquad u(x)\sim\frac{1}{4x^{2p}}$

$$=\underbrace{\frac{\sin x}{x^p}}_{g(x)}+\underbrace{\frac{\cos2x}{4x^{2p}}}_{h(x)}-\underbrace{\frac{1}{4x^{2p}}+o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)}_{u(x)}$$

$$\begin{cases}① \ p>1 & f(x)\ \text{绝对}\\ ② \ \frac{1}{2}<p\le1 & g(x)\ \text{条件},\ h(x),u(x)\ \text{绝对}\Rightarrow f(x)\ \text{条件}\\ ③ \ 0<p\le\frac{1}{2} & u(x)\ \text{发散}\Rightarrow f(x)\ \text{发散}\end{cases}$$

为什么展开到2阶?

因为展到一阶 只有 $p=1$ 一个分界点, 误差大了

又展到3阶以上 与2阶结果相同,

故2阶就好

日期:　　/

半小时快速入门微分方程

微分方程 两类

① 只有一次

通式 $f'(x) + p(x)f(x) = Q(x)$　　(要写成这样)

通解: $f(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int Q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx\right)$

C 通过题中 $f(x)$ 条件 取

看学习指导上册 $P_{251} - P_{254}$ 讲的很清楚

x的多项式 基本为 4x、3x 之类

② 有2次　只会考 系数一定是常数

要考 $R(x)$ 一定是 $f(x)e^{ax}$ 或 $a\cos x + b\sin x$ 形式

不会再难，这里我们只考虑这两种

$f''(x) + pf'(x) + q = R(x)$　(*)

(**)

解决这类问题，我们先找 $f''(x) + pf'(x) + q = 0$ 的通解，

再加上 (*)的一个特解即可 (和线代里面非齐次线性方程组一个道理)

找通解 解特征根方程　$x^2 + px + q = 0$　设根 λ_1、λ_2

1) 若 λ_1、λ_2 为实根　则(**)通解 $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$　C_1、C_2 待定

2) 若 λ_1、λ_2 为虚 $\Rightarrow$ λ_1、$\lambda_2 = \alpha \pm \beta i$　则 (**)通解 $e^{\alpha}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

找特解

1) 这种情况通常 $R(x) = Cxe^{\lambda x}$ 经验，直接取特解为 $(ax+b)e^{\lambda x}$ (a 有可能为0) 带进去

2) 这种情况通常 $R(x) = a\sin x + b\cos x$.

取特解为 $x(a\cos x + b\sin x)$ 带进去 把a、b 解出来即可