《遍历理论引论》习题

2023 年 6 月

1. 设$\Omega = \{-1,1\}^{\mathbb{Z}}$, 其上取测度$\mu_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$, $\sigma : \Omega \to \Omega$ 为转移映射. 又设$(Y, \mathcal{Y}, \nu, S)$ 为可逆保测映射. 令$X = \Omega \times Y$, 以及

$$T : X \to X, \quad (\omega, y) \mapsto (\sigma\omega, S^{\omega_0} y).$$

   证明：$(X, \mathcal{B}(X), \mu_{(1/2,1/2)} \times \nu, T)$ 为可逆保测系统，称之为**随机转移**(random shift).

2. 令$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义如下:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

   在$\mathbb{R}$ 上定义如下测度：对于任何实数$a < b$

$$\mu([a,b]) = \int_a^b \frac{dx}{\pi(1+x^2)}.$$

   证明: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu, T)$ 为保测系统, 并且它为强混合的.

3. 对$k \in \mathbb{N}$, 取$\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \mathbb{R}^k$. 令

$$T_{\vec{\theta}} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k, \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \mapsto \vec{x} + \vec{\theta} = (x_1 + \theta_1, x_2 + \theta_2, \ldots, x_k + \theta_k).$$

   设m 是$\mathbb{T}^k$ 上的Lebesgue 测度.

   证明：$(\mathbb{T}^k, \mathcal{B}(\mathbb{T}^k), m, T_{\vec{\theta}})$ 是保测系统，并且它为遍历的当且仅当$\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \mathbb{R}^k$ 为有理独立的.[1]

4. 陈述 von Neumann L^2 遍历平均定理（von Neumann Mean Ergodic Theorem），并且运用谱理论知识给出一个证明.

5. 给出Borel 正规数定理对于十进制数的版本, 并且给出证明.

[1]称$\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \mathbb{R}^k$ 为有理独立的, 是指对于任何$n_0, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$, $n_0 + n_1\theta_1 + \ldots + n_k\theta_k = 0 \Rightarrow n_0 = n_1 = \ldots = n_k = 0$.

6. 设P为随机矩阵, $\vec{p}$为严格正的概率向量, 且$\vec{p}P = \vec{p}$. 则

$$Q = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P^n$$

存在. 并且

(a) Q 也为随机矩阵;

(b) $QP = PQ = Q$;

(c) P的特征值1对应的特征向量也为Q的特征向量;

(d) $Q^2 = Q$.

7. 设 $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ 为弱混合系统. 证明:

(1) 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $(X^n, \mathcal{X}^n, \mu^n, T^{(n)})$ 为弱混合的, 这里 $T^{(n)} = T \times \ldots \times T$ (n次).

(2) 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $(X, \mathcal{X}, \mu, T^n)$ 为弱混合的.

8. 设$(X, \mathcal{X}, \mu, T)$为弱混合的保测系统. 如果$(X, \mathcal{X}, \mu)$具有可数基, 那么存在$J \subseteq \mathbb{Z}_+, d(J) = 0$, 使得

$$\lim_{J \not\ni n \to \infty} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B),$$

对任意$A, B \in \mathcal{X}$ 成立.

9. 设(X, T) 是一个拓扑动力系统. 设μ 为$\mathcal{B}(X)$ 上概率测度使得$(X, \mathcal{B}(X), \mu, T)$成为保测系统. 证明: $\mu(\mathrm{Rec}(X, T)) = 1$. ($\mathrm{Rec}(X, T)$ 为回复点全体组成的集合)