

## 第 4 章 不定积分

### §4.1 不定积分及其基本的计算方法

#### 4.1.1 基本概念

**定义 1** 设函数  $F(x)$  与  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义. 若对每个  $x \in I$  都有

$$F'(x) = f(x), \quad \text{或} \quad dF(x) = f(x)dx,$$

则称  $F(x)$  为  $f(x)$  在区间  $I$  上的一个原函数.

## 第 4 章 不定积分

### §4.1 不定积分及其基本的计算方法

#### 4.1.1 基本概念

**定义 1** 设函数  $F(x)$  与  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义. 若对每个  $x \in I$  都有

$$F'(x) = f(x), \quad \text{或} \quad dF(x) = f(x)dx,$$

则称  $F(x)$  为  $f(x)$  在区间  $I$  上的一个原函数.

**注意1**, 如果  $F(x)$  是  $f(x)$  (在区间  $I$  上) 的一个原函数, 则  $F(x)$  加上一个任意常数后仍然是  $f(x)$  的一个原函数;

## 第 4 章 不定积分

### §4.1 不定积分及其基本的计算方法

#### 4.1.1 基本概念

**定义 1** 设函数  $F(x)$  与  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义. 若对每个  $x \in I$  都有

$$F'(x) = f(x), \quad \text{或} \quad dF(x) = f(x)dx,$$

则称  $F(x)$  为  $f(x)$  在区间  $I$  上的一个原函数.

**注意1**, 如果  $F(x)$  是  $f(x)$  (在区间  $I$  上) 的一个原函数, 则  $F(x)$  加上一个任意常数后仍然是  $f(x)$  的一个原函数;

**注意2**,  $f(x)$  的任意两个原函数只相差一个常数.

**定义 2** 称  $f(x)$  在区间  $I$  上的全体原函数  $\{F(x) + C\}$  为函数  $f(x)$  在区间  $I$  上的不定积分, 记为

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

其中  $C$  是任意常数, 称为积分常数;  $\int$  称为积分号;  $f(x)$  称为被积函数;  $f(x)dx$  称为被积表达式;  $x$  称为积分变量.

几何上解释求函数  $f(x)$  的原函数的问题: 在  $Oxy$  直角坐标系中找出一条曲线  $y = F(x)$ , 使其在横坐标为  $x$  的点处的切线斜率为  $f(x)$ . 这样的一条曲线, 称为  $f(x)$  的一条积分曲线, 将它沿着  $y$  轴的方向作平移, 便得出所有其余 (符合上述要求) 的曲线. 因此, 在几何上, 不定积分  $\int f(x)dx$  表示包含上述全部积分曲线的曲线族.

(1) 什么样的函数有原函数(或者说什么样的被积函数有不定积分)?

- (1) 什么样的函数有原函数(或者说什么样的被积函数有不定积分)?
- (2) 如果一个函数  $f(x)$  有原函数, 那么如何具体算出  $f(x)$  的原函数?

- (1) 什么样的函数有原函数(或者说什么样的被积函数有不定积分)?
- (2) 如果一个函数  $f(x)$  有原函数, 那么如何具体算出  $f(x)$  的原函数?
- (3) 由于初等函数的导数仍然是初等函数, 那么作为导数的逆运算, 一个初等函数的原函数(或者说不定积分)是否一定还能够表示成初等函数?

(1) 什么样的函数有原函数(或者说什么样的被积函数有不定积分)?

(2) 如果一个函数  $f(x)$  有原函数, 那么如何具体算出  $f(x)$  的原函数?

(3) 由于初等函数的导数仍然是初等函数, 那么作为导数的逆运算, 一个初等函数的原函数(或者说不定积分)是否一定还能够表示成初等函数?

根据 Darboux 定理可知, 导函数满足介值定理, 不可能有第一类间断点的函数. 因此象符号函数  $y = \operatorname{sgn}x$  这样的函数是不能表示成一个函数的导数的, 因而没有原函数. 然而, 我们将在下一章中证明一个重要事实: 对于给定区间上的连续函数, 在这区间上必有原函数.

(1) 什么样的函数有原函数(或者说什么样的被积函数有不定积分)?

(2) 如果一个函数  $f(x)$  有原函数, 那么如何具体算出  $f(x)$  的原函数?

(3) 由于初等函数的导数仍然是初等函数, 那么作为导数的逆运算, 一个初等函数的原函数(或者说不定积分)是否一定还能够表示成初等函数?

根据 Darboux 定理可知, 导函数满足介值定理, 不可能有第一类间断点的函数. 因此象符号函数  $y = \operatorname{sgn}x$  这样的函数是不能表示成一个函数的导数的, 因而没有原函数. 然而, 我们将在下一章中证明一个重要事实: 对于给定区间上的连续函数, 在这区间上必有原函数.

本章只考虑定义在一个区间上的连续函数的不定积分, 并以求出不定积分作为主要目标. 这里所谓的“求出不定积分”, 是指可将不定积分表示为初等函数. 但确实有这样的初等函数, 它们的不定积分无法表示成初等函数. 例如, 可以证明下列积分  $\int e^{-x^2} dx$ ,  $\int \frac{1}{\ln x} dx$ ,  $\int \sin x^2 dx$  等是不能表示成为初等函数的.

## 4.1.2 基本积分表

由前面的微分公式表, 可得到下面的不定积分公式表.

$$(i) \int 0 \, dx = C; \quad (ii) \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C;$$

$$(iii) \int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1);$$

$$(iv) \int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$(v) \int \sin x \, dx = -\cos x + C; \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C;$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C; \quad \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C;$$

$$(vi) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1;$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C_1.$$

### 4.1.3 不定积分的线性性质

(i) 若  $a$  是常数 ( $a \neq 0$ ), 则  $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$ ;

(ii)  $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ .

我们注意, 关于不定积分的等式实际上是关于函数族的等式 (即一个集合等式). 等式 (i) 的含义是, 当  $a \neq 0$  时,  $a \cdot f$  的原函数可由  $a$  乘  $f$  的原函数得到; 而且  $a$  乘  $f$  的原函数也必是  $a \cdot f$  的原函数. 等式 (ii) 具有类似的含义. (我们再次提一下, 在函数连续的前提下, 原函数的存在性已得到了保证.)

等式 (i) 和 (ii) 是微分法则的显然推论 (例如, 由于 (i) 式两端中函数的微分都是  $af(x)dx$ , 从而 (i) 成立; 类似地可得出 (ii)). 此外, 易知 (ii) 对于多个函数的情形也成立.

由这两个等式, 可以将一个较复杂的不定积分化为若干个已知的不定积分的和, 进而得出结果. 这种方法, 称为分项积分法.

例 1 求  $\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} dx.$

例 1 求  $\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} dx$ .

解

$$\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} dx$$

例 1 求  $\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} dx$ .

解

$$\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} dx = \int \left( x - 4 + \frac{5}{x + 1} \right) dx$$

例 1 求  $\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} dx$ .

解

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} dx &= \int \left( x - 4 + \frac{5}{x + 1} \right) dx \\ &= \int x dx - 4 \int dx + 5 \int \frac{dx}{x + 1}\end{aligned}$$

例 1 求  $\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} dx$ .

解

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} dx &= \int \left( x - 4 + \frac{5}{x + 1} \right) dx \\&= \int x dx - 4 \int dx + 5 \int \frac{dx}{x + 1} \\&= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5 \ln|x + 1| + C.\end{aligned}$$

例 1 求  $\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} dx$ .

解

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} dx &= \int \left( x - 4 + \frac{5}{x + 1} \right) dx \\ &= \int x dx - 4 \int dx + 5 \int \frac{dx}{x + 1} \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5 \ln|x + 1| + C.\end{aligned}$$

注意, 上面第二个等式右端的每一个不定积分都含有一个任意常数, 最后合并记作  $C$ ; 这一点我们以后不再申明.

例 2 求  $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx.$

例 2 求  $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$ .

解

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$$

例 2 求  $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$ .

解

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$$

例 2 求  $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$ .

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx \\&= \int \sec^2 x dx + \int \csc^2 x dx\end{aligned}$$

例 2 求  $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx.$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx \\&= \int \sec^2 x dx + \int \csc^2 x dx \\&= \tan x - \cot x + C.\end{aligned}$$

例 3 求  $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx.$

例 3 求  $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$ .

解

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$$

例 3 求  $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$ .

解

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)} dx$$

例 3 求  $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$ .

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx &= \int \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)} dx \\ &= \int \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx\end{aligned}$$

例 3 求  $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$ .

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx &= \int \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)} dx \\&= \int \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\&= \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx\end{aligned}$$

例 3 求  $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$ .

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx &= \int \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)} dx \\&= \int \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\&= \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx \\&= -\frac{1}{x} - \arctan x + C.\end{aligned}$$

## 4.1.4 不定积分的换元法

**定理 1 (第一换元法)** 设  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数 (即  $F'(x) = f(x)$ ) , 并设  $u = \varphi(x)$  可微. 则我们有

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C.$$

即  $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$  的一个原函数是  $F(\varphi(x))$ .

**证明** 由一阶微分形式的不变性, 关系式

$$dF(u) = f(u)du$$

再以函数  $\varphi(x)$  代替自变量  $u$  时仍然成立, 由此导出所说的等式.

这一方法也称为“凑微分法”.

例 4 求  $\int \tan x \, dx$ .

例 4 求  $\int \tan x \, dx$ .

解 所求的不定积分

$$\int \tan x \, dx$$

例 4 求  $\int \tan x \, dx$ .

解 所求的不定积分

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

例 4 求  $\int \tan x \, dx$ .

解 所求的不定积分

$$\begin{aligned}\int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= - \int \frac{(d \cos x)}{\cos x}\end{aligned}$$

例 4 求  $\int \tan x \, dx$ .

解 所求的不定积分

$$\begin{aligned}\int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\&= - \int \frac{(d \cos x)}{\cos x} \\&= - \ln |\cos x| + C.\end{aligned}$$

例 5 求  $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}} dx.$

例 5 求  $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}} dx$ .

解 记  $t = \ln x$ , 所求的不定积分为

$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}} dx$$

例 5 求  $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$ .

解 记  $t = \ln x$ , 所求的不定积分为

$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}} d(\ln x)$$

例 5 求  $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$ .

解 记  $t = \ln x$ , 所求的不定积分为

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx &= \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}} d(\ln x) \\ &= \int \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt\end{aligned}$$

例 5 求  $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$ .

解 记  $t = \ln x$ , 所求的不定积分为

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx &= \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}} d(\ln x) \\&= \int \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt \\&= \int \frac{(1+t)-1}{\sqrt{1+t}} dt\end{aligned}$$

例 5 求  $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$ .

解 记  $t = \ln x$ , 所求的不定积分为

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx &= \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}d(\ln x) \\&= \int \frac{t}{\sqrt{1+t}}dt \\&= \int \frac{(1+t)-1}{\sqrt{1+t}}dt \\&= \int \sqrt{1+t}d(1+t) - \int \frac{d(1+t)}{\sqrt{1+t}}\end{aligned}$$

例 5 求  $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$ .

解 记  $t = \ln x$ , 所求的不定积分为

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx &= \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}d(\ln x) \\
 &= \int \frac{t}{\sqrt{1+t}}dt \\
 &= \int \frac{(1+t)-1}{\sqrt{1+t}}dt \\
 &= \int \sqrt{1+t}d(1+t) - \int \frac{d(1+t)}{\sqrt{1+t}} \\
 &= \frac{2}{3}(1+t)^{3/2} - 2\sqrt{1+t} + C
 \end{aligned}$$

例 5 求  $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$ .

解 记  $t = \ln x$ , 所求的不定积分为

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx &= \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}d(\ln x) \\
 &= \int \frac{t}{\sqrt{1+t}}dt \\
 &= \int \frac{(1+t)-1}{\sqrt{1+t}}dt \\
 &= \int \sqrt{1+t}d(1+t) - \int \frac{d(1+t)}{\sqrt{1+t}} \\
 &= \frac{2}{3}(1+t)^{3/2} - 2\sqrt{1+t} + C \\
 &= \frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2} - 2\sqrt{1+\ln x} + C.
 \end{aligned}$$

例 6 求  $\int \frac{1}{\sin x} dx$ .

例 6 求  $\int \frac{1}{\sin x} dx$ .

解 设  $u = \cos x$ . 则

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

例 6 求  $\int \frac{1}{\sin x} dx$ .

解 设  $u = \cos x$ . 则

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

例 6 求  $\int \frac{1}{\sin x} dx$ .

解 设  $u = \cos x$ . 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx \\ &= - \int \frac{du}{1 - u^2}\end{aligned}$$

例 6 求  $\int \frac{1}{\sin x} dx$ .

解 设  $u = \cos x$ . 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx \\&= - \int \frac{du}{1 - u^2} \\&= -\frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du\end{aligned}$$

例 6 求  $\int \frac{1}{\sin x} dx$ .

解 设  $u = \cos x$ . 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx \\&= - \int \frac{du}{1 - u^2} \\&= -\frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du \\&= -\frac{1}{2} (\ln(1+u) - \ln(1-u)) + C\end{aligned}$$

例 6 求  $\int \frac{1}{\sin x} dx$ .

解 设  $u = \cos x$ . 则

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx \\
 &= - \int \frac{du}{1 - u^2} \\
 &= -\frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du \\
 &= -\frac{1}{2} (\ln(1+u) - \ln(1-u)) + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{1-u}{1+u} + C
 \end{aligned}$$

例 6 求  $\int \frac{1}{\sin x} dx$ .

解 设  $u = \cos x$ . 则

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx \\
 &= - \int \frac{du}{1 - u^2} \\
 &= -\frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du \\
 &= -\frac{1}{2} (\ln(1+u) - \ln(1-u)) + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{1-u}{1+u} + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C.
 \end{aligned}$$

**定理 2 (第二换元法)** 设函数  $x = \varphi(t)$  是严格单调的可微函数, 且  $\varphi'(t)$  不取零值 (从而  $\varphi$  有反函数  $\varphi^{-1}$ ). 若  $G(t)$  是  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  的一个原函数, 即

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) + C,$$

则有

$$\int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

即  $G(\varphi^{-1}(x))$  是  $f(x)$  的一个原函数.

**证明** 我们由复合函数求导法则, 反函数求导法则以及已知条件, 得出

$$\begin{aligned}\frac{dG(\varphi^{-1}(x))}{dx} &= \frac{dG(t)}{dx} = \frac{dG}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= G'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t))\varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} \\ &= f(\varphi(t)) = f(x).\end{aligned}$$

由此导出所说的结果.

例 7 求  $\int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx.$

例 7 求  $\int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx$ .

解 设  $t = \sqrt{e^x + 1}$ , 则  $e^x + 1 = t^2$ , 故  $e^x dx = 2t dt$ , 即  $dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$ . 所求的不定积分为

$$\int \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{t^2 - 1} dt$$

例 7 求  $\int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx$ .

解 设  $t = \sqrt{e^x + 1}$ , 则  $e^x + 1 = t^2$ , 故  $e^x dx = 2t dt$ , 即  $dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$ . 所求的不定积分为

$$\int \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{t^2 - 1} dt = \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

例 7 求  $\int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx$ .

解 设  $t = \sqrt{e^x + 1}$ , 则  $e^x + 1 = t^2$ , 故  $e^x dx = 2t dt$ , 即  $dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$ . 所求的不定积分为

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{t^2 - 1} dt &= \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \ln(t-1) - \ln(t+1) + C\end{aligned}$$

例 7 求  $\int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx$ .

解 设  $t = \sqrt{e^x + 1}$ , 则  $e^x + 1 = t^2$ , 故  $e^x dx = 2t dt$ , 即  $dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$ . 所求的不定积分为

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{t^2 - 1} dt &= \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \ln(t-1) - \ln(t+1) + C \\ &= \ln \frac{t-1}{t+1} + C \end{aligned}$$

例 7 求  $\int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx$ .

解 设  $t = \sqrt{e^x + 1}$ , 则  $e^x + 1 = t^2$ , 故  $e^x dx = 2t dt$ , 即  $dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$ . 所求的不定积分为

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{t^2 - 1} dt &= \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \ln(t-1) - \ln(t+1) + C \\ &= \ln \frac{t-1}{t+1} + C \\ &= \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} + C \end{aligned}$$

例 7 求  $\int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx.$

解 设  $t = \sqrt{e^x + 1}$ , 则  $e^x + 1 = t^2$ , 故  $e^x dx = 2t dt$ , 即  $dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$ . 所求的不定积分为

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{t^2 - 1} dt &= \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \ln(t-1) - \ln(t+1) + C \\ &= \ln \frac{t-1}{t+1} + C \\ &= \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} + C \\ &= 2 \ln (\sqrt{e^x + 1} - 1) - x + C. \end{aligned}$$

例 8 求  $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} dx$ .

例 8 求  $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} dx$ .

解 被积函数的定义域为  $x > 0$ . 我们令  $x = t^6 (t > 0)$  以消除所有根号, 则  $\sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2, dx = 6t^5 dt$ , 从而

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})}$$

例 8 求  $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} dx$ .

解 被积函数的定义域为  $x > 0$ . 我们令  $x = t^6 (t > 0)$  以消除所有根号, 则  $\sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2, dx = 6t^5 dt$ , 从而

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} = 6 \int \frac{t^2 dt}{1 + t^2}$$

例 8 求  $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} dx.$

解 被积函数的定义域为  $x > 0$ . 我们令  $x = t^6 (t > 0)$  以消除所有根号, 则  $\sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2, dx = 6t^5 dt$ , 从而

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} &= 6 \int \frac{t^2 dt}{1 + t^2} \\ &= 6 \int dt - 6 \int \frac{dt}{1 + t^2}\end{aligned}$$

例 8 求  $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} dx$ .

解 被积函数的定义域为  $x > 0$ . 我们令  $x = t^6 (t > 0)$  以消除所有根号, 则  $\sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2, dx = 6t^5 dt$ , 从而

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} &= 6 \int \frac{t^2 dt}{1 + t^2} \\ &= 6 \int dt - 6 \int \frac{dt}{1 + t^2} \\ &= 6(t - \arctan t) + C.\end{aligned}$$

例 8 求  $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} dx.$

解 被积函数的定义域为  $x > 0$ . 我们令  $x = t^6 (t > 0)$  以消除所有根号, 则  $\sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2, dx = 6t^5 dt$ , 从而

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} &= 6 \int \frac{t^2 dt}{1 + t^2} \\&= 6 \int dt - 6 \int \frac{dt}{1 + t^2} \\&= 6(t - \arctan t) + C. \\&= 6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + C.\end{aligned}$$

例 9 求  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ , 其中  $a$  是一个常数,  $a > 0$ .

例 9 求  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ , 其中  $a$  是一个常数,  $a > 0$ .

解 为了去除二次根号, 我们令  $x = a \sin t$ , 这里  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ . 则  $t = \arcsin \frac{x}{a}$ , 且  $dx = a \cos t dt$ . 故所求的不定积分为

$$\int a^2 \cos^2 t dt$$

例 9 求  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ , 其中  $a$  是一个常数,  $a > 0$ .

解 为了去除二次根号, 我们令  $x = a \sin t$ , 这里  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ . 则  $t = \arcsin \frac{x}{a}$ , 且  $dx = a \cos t dt$ . 故所求的不定积分为

$$\int a^2 \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt$$

例 9 求  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ , 其中  $a$  是一个常数,  $a > 0$ .

解 为了去除二次根号, 我们令  $x = a \sin t$ , 这里  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ . 则  $t = \arcsin \frac{x}{a}$ , 且  $dx = a \cos t dt$ . 故所求的不定积分为

$$\begin{aligned}\int a^2 \cos^2 t dt &= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C\end{aligned}$$

例 9 求  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ , 其中  $a$  是一个常数,  $a > 0$ .

解 为了去除二次根号, 我们令  $x = a \sin t$ , 这里  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ . 则  $t = \arcsin \frac{x}{a}$ , 且  $dx = a \cos t dt$ . 故所求的不定积分为

$$\begin{aligned}\int a^2 \cos^2 t dt &= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C \\ &= \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C\end{aligned}$$

例 9 求  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ , 其中  $a$  是一个常数,  $a > 0$ .

解 为了去除二次根号, 我们令  $x = a \sin t$ , 这里  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ . 则  $t = \arcsin \frac{x}{a}$ , 且  $dx = a \cos t dt$ . 故所求的不定积分为

$$\begin{aligned}\int a^2 \cos^2 t dt &= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt \\&= \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C \\&= \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C \\&= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C.\end{aligned}$$

若被积函数在定义域上连续, 则必须求出被积函数在整个定义域上的不定积分 (我们知道, 它必定存在), 而不是部分定义域上的不定积分. 我们举个例子, 以作说明.

例 10 求  $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx.$

解 当  $x \neq 0$  时, 将被积函数的分子、分母同除以  $x^2$ , 得出

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx &= \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 3} dx \\ &= \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x^2 - 1}{\sqrt{3}x} + C.\end{aligned}$$

为了求出  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$  在整个定义域  $(-\infty, +\infty)$  上的原函数  $F(x)$ , 由已

得的结果, 可设

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{3}x} + C_1, & x < 0; \\ C, & x = 0; \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{3}x} + C_2, & x > 0. \end{cases}$$

由  $F(x)$  在  $x = 0$  处连续, 得出

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} F(x) = F(0),$$

即  $\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} + C_1 = C = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} + C_2$ , 故  $C_1 = C - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2}$ ,  $C_2 = C + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2}$ . 由此易知

$$F'_+(0) = F'_-(0) = f(0).$$

从而  $F$  在  $x = 0$  处可导, 且  $F'(0) = f(0)$ . 故

$$\int f(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{3}x} - \frac{\pi}{2} \right) + C, & x < 0; \\ C, & x = 0; \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{3}x} + \frac{\pi}{2} \right) + C, & x > 0. \end{cases}$$

## 4.1.5 分部积分法

**定理 3 (分部积分法)** 设函数  $u = u(x)$  与  $v = v(x)$  有连续的微商, 则

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx.$$

**证明** 根据函数乘积的微分法则, 有

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

因此,

$$\int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) du = u(x)v(x) + C.$$

由此即得所证.

例 11 求  $\int x^2 \ln x \, dx.$

例 11 求  $\int x^2 \ln x \, dx$ .

解 因为  $d(\frac{1}{3}x^3) = x^2 dx$ , 所以可取  $u(x) = \ln x, v(x) = \frac{1}{3}x^3$ .

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 d(\ln x)$$

例 11 求  $\int x^2 \ln x \, dx$ .

解 因为  $d(\frac{1}{3}x^3) = x^2 dx$ , 所以可取  $u(x) = \ln x, v(x) = \frac{1}{3}x^3$ .

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x \, dx &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 d(\ln x) \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx\end{aligned}$$

例 11 求  $\int x^2 \ln x \, dx$ .

解 因为  $d(\frac{1}{3}x^3) = x^2 dx$ , 所以可取  $u(x) = \ln x, v(x) = \frac{1}{3}x^3$ .

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x \, dx &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 d(\ln x) \\&= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\&= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.\end{aligned}$$

例 11 求  $\int x^2 \ln x \, dx$ .

解 因为  $d(\frac{1}{3}x^3) = x^2 dx$ , 所以可取  $u(x) = \ln x, v(x) = \frac{1}{3}x^3$ .

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x \, dx &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 d(\ln x) \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.\end{aligned}$$

一般对于形如  $\int x^m \ln x \, dx$ ,  $\int x^m \arctan x \, dx$  的不定积分都可以仿此法求解.

例 12 设  $p(x)$  是  $n$  次多项式, 求  $\int p(x)e^x dx.$

例 12 设  $p(x)$  是  $n$  次多项式, 求  $\int p(x)e^x dx$ .

解

$$\int p(x)e^x dx = p(x)e^x - \int p'(x)e^x dx$$

例 12 设  $p(x)$  是  $n$  次多项式, 求  $\int p(x)e^x dx$ .

解

$$\begin{aligned}\int p(x)e^x dx &= p(x)e^x - \int p'(x)e^x dx \\ &= p(x)e^x - \left( p'(x)e^x - \int p''(x)e^x dx \right)\end{aligned}$$

例 12 设  $p(x)$  是  $n$  次多项式, 求  $\int p(x)e^x dx$ .

解

$$\begin{aligned}\int p(x)e^x dx &= p(x)e^x - \int p'(x)e^x dx \\&= p(x)e^x - \left( p'(x)e^x - \int p''(x)e^x dx \right) \\&= (p(x) - p'(x))e^x + \int p''(x)e^x dx\end{aligned}$$

例 12 设  $p(x)$  是  $n$  次多项式, 求  $\int p(x)e^x dx$ .

解

$$\begin{aligned}\int p(x)e^x dx &= p(x)e^x - \int p'(x)e^x dx \\&= p(x)e^x - \left( p'(x)e^x - \int p''(x)e^x dx \right) \\&= (p(x) - p'(x))e^x + \int p''(x)e^x dx \\&= \dots\end{aligned}$$

例 12 设  $p(x)$  是  $n$  次多项式, 求  $\int p(x)e^x dx$ .

解

$$\begin{aligned}
 \int p(x)e^x dx &= p(x)e^x - \int p'(x)e^x dx \\
 &= p(x)e^x - \left( p'(x)e^x - \int p''(x)e^x dx \right) \\
 &= (p(x) - p'(x))e^x + \int p''(x)e^x dx \\
 &= \cdots \\
 &= \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k p^{(k)}(x) \right) e^x + C.
 \end{aligned}$$

例 13 计算  $I_n = \int \cos^n x dx.$

例 13 计算  $I_n = \int \cos^n x dx.$

解

$$I_n = \int (\sin x)' \cos^{n-1} x dx$$

例 13 计算  $I_n = \int \cos^n x dx.$

解

$$\begin{aligned} I_n &= \int (\sin x)' \cos^{n-1} x dx \\ &= \sin x \cos^{n-1} x - (n-1) \int \sin x \cos^{n-2} x (-\sin x) dx \end{aligned}$$

例 13 计算  $I_n = \int \cos^n x dx.$

解

$$\begin{aligned} I_n &= \int (\sin x)' \cos^{n-1} x dx \\ &= \sin x \cos^{n-1} x - (n-1) \int \sin x \cos^{n-2} x (-\sin x) dx \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx \end{aligned}$$

例 13 计算  $I_n = \int \cos^n x dx$ .

解

$$\begin{aligned} I_n &= \int (\sin x)' \cos^{n-1} x dx \\ &= \sin x \cos^{n-1} x - (n-1) \int \sin x \cos^{n-2} x (-\sin x) dx \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x dx \end{aligned}$$

例 13 计算  $I_n = \int \cos^n x dx.$

解

$$\begin{aligned} I_n &= \int (\sin x)' \cos^{n-1} x dx \\ &= \sin x \cos^{n-1} x - (n-1) \int \sin x \cos^{n-2} x (-\sin x) dx \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x dx \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$

例 13 计算  $I_n = \int \cos^n x dx.$

解

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int (\sin x)' \cos^{n-1} x dx \\
 &= \sin x \cos^{n-1} x - (n-1) \int \sin x \cos^{n-2} x (-\sin x) dx \\
 &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx \\
 &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x dx \\
 &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.
 \end{aligned}$$

所以有

$$I_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

由于  $I_0 = x + C, I_1 = \sin x + C$ , 所以由上面递推公式可以得到  $I_n$  的表达式.

例 14 求  $\int e^{ax} \sin bx dx$  ( $a, b$  是不等于零的实数).

例 14 求  $\int e^{ax} \sin bx dx$  ( $a, b$  是不等于零的实数).

解 记所说的不定积分为  $I$ , 则由分部积分公式, 得出

$$I = \frac{1}{a} \int \sin bx \cdot d(e^{ax}) = \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

**例 14** 求  $\int e^{ax} \sin bx dx$  ( $a, b$  是不等于零的实数).

**解** 记所说的不定积分为  $I$ , 则由分部积分公式, 得出

$$I = \frac{1}{a} \int \sin bx \cdot d(e^{ax}) = \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

对右端第二个积分再用分部积分公式, 得

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx.$$

例 14 求  $\int e^{ax} \sin bx dx$  ( $a, b$  是不等于零的实数).

解 记所说的不定积分为  $I$ , 则由分部积分公式, 得出

$$I = \frac{1}{a} \int \sin bx \cdot d(e^{ax}) = \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

对右端第二个积分再用分部积分公式, 得

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx.$$

因此, 我们有

$$I = \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos bx - \frac{b^2}{a^2} I.$$

移项得到 (注意,  $I$  表示一个函数族)

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C.$$

例 15 记  $I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 其中  $a$  是非零实数. 证明下面的递推公式成立:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n - 1}{2na^2} I_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(由此及  $I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$ , 可递推地求得  $I_n$ .)

**例 15** 记  $I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 其中  $a$  是非零实数. 证明下面的递推公式成立:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n - 1}{2na^2} I_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(由此及  $I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$ , 可递推地求得  $I_n$ .)

**证明** 取  $u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}$ ,  $v = x$ , 则  $du = -\frac{2nx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx$ ,  $dv = dx$ , 得

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx$$

**例 15** 记  $I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 其中  $a$  是非零实数. 证明下面的递推公式成立:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n - 1}{2na^2} I_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(由此及  $I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$ , 可递推地求得  $I_n$ .)

**证明** 取  $u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}$ ,  $v = x$ , 则  $du = -\frac{2nx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx$ ,  $dv = dx$ , 得

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \left( \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx - a^2 \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \right) \end{aligned}$$

**例 15** 记  $I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 其中  $a$  是非零实数. 证明下面的递推公式成立:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n - 1}{2na^2} I_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(由此及  $I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$ , 可递推地求得  $I_n$ .)

**证明** 取  $u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}$ ,  $v = x$ , 则  $du = -\frac{2nx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx$ ,  $dv = dx$ , 得

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \left( \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx - a^2 \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \right) \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n (I_n - a^2 I_{n+1}), \end{aligned}$$

**例 15** 记  $I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 其中  $a$  是非零实数. 证明下面的递推公式成立:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n - 1}{2na^2} I_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(由此及  $I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$ , 可递推地求得  $I_n$ .)

**证明** 取  $u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}$ ,  $v = x$ , 则  $du = -\frac{2nx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx$ ,  $dv = dx$ , 得

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \left( \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx - a^2 \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \right) \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n (I_n - a^2 I_{n+1}), \end{aligned}$$

由此即得结果.

许多不定积分的计算, 需将分部积分法与换元法结合使用, 我们举一个这样的例子.

**例 16** 求  $\int xe^x(1 + e^x)^{-\frac{3}{2}}dx.$

**解** 我们先由分部积分得出

$$\begin{aligned}\int xe^x(1 + e^x)^{-\frac{3}{2}}dx &= - \int 2xd \left( \frac{1}{\sqrt{1 + e^x}} \right) \\ &= -\frac{2x}{\sqrt{1 + e^x}} + 2 \int \frac{1}{\sqrt{1 + e^x}} dx.\end{aligned}$$

而上式中的不定积分可用代换法求得 (见例 7), 我们最后有

$$\int xe^x(1 + e^x)^{-\frac{3}{2}}dx = 4 \ln(\sqrt{e^x + 1} - 1) - 2x - \frac{2x}{\sqrt{e^x + 1}} + C.$$