13.5.2 Γ 函数的余元公式及对数凸性

定理 1 (余元公式) 当 $x \in (0,1)$ 时, 有

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

证明 对 $x \in (0,1)$, 在下面的公式

$$B(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}} dz.$$

中令 $y = 1 - x$. 并根据 B 函数与 Γ 函数的关系可得

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = B(1-x, x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

根据已知的结果:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad (0 < p < 1).$$

即得余元公式.

例 1 (Euler **乘积**) 设 $n \geqslant 2$ 是自然数. 则有

$$E := \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

证明 根据余元公式,

$$E^2 = \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{k}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\pi}{\sin \frac{k\pi}{n}} \tag{1}$$

为了计算乘积 $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$, 考察恒等式

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n}\right)$$

并在其中使 $z \to 1$, 取极限的结果为

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n}\right).$$

两边取模, 可得

$$n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n},$$

即,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

将此式代入 (1) 即得所证.

定理 2 $\ln\Gamma(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

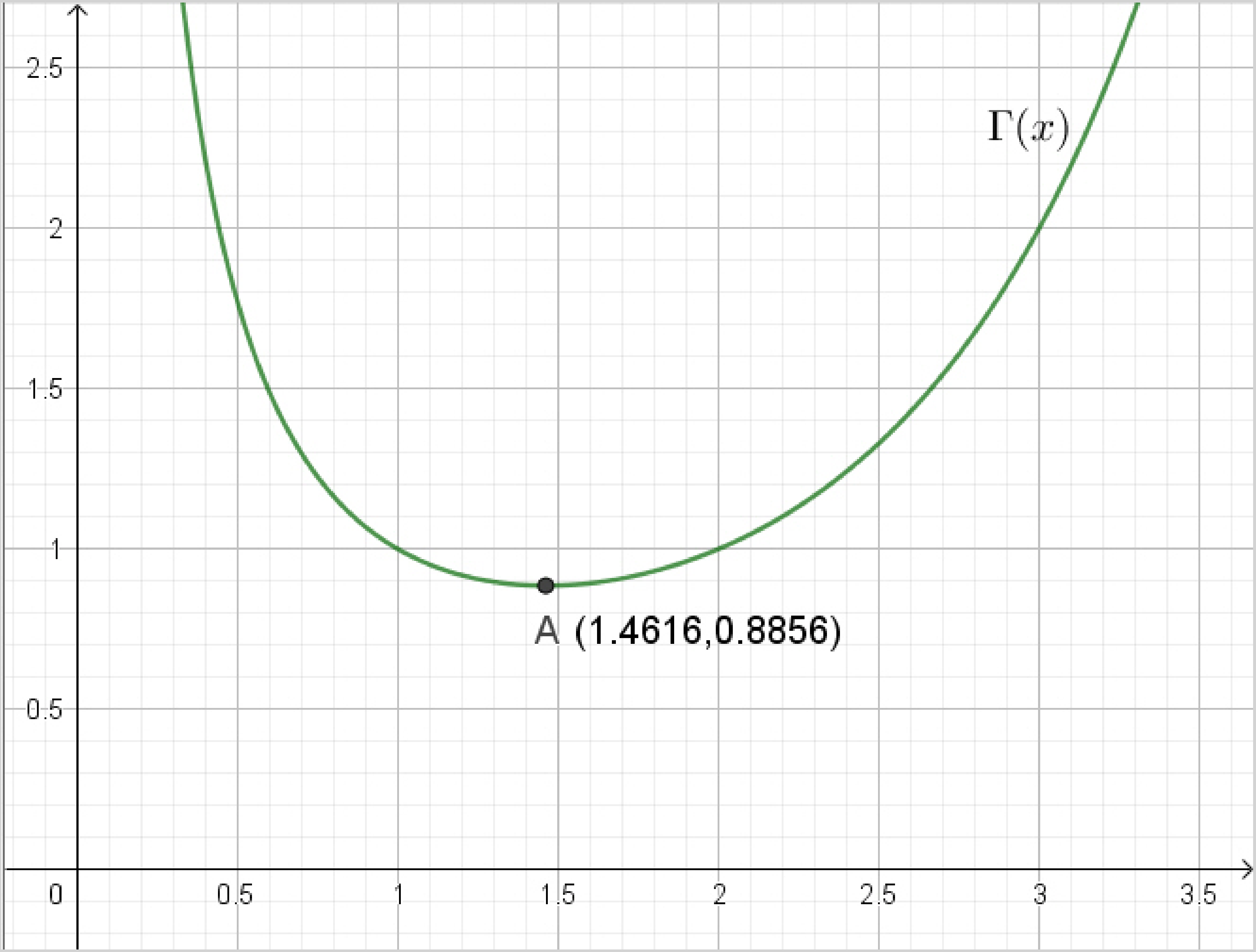
证明 设 $p>1$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 对任意 $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ 有

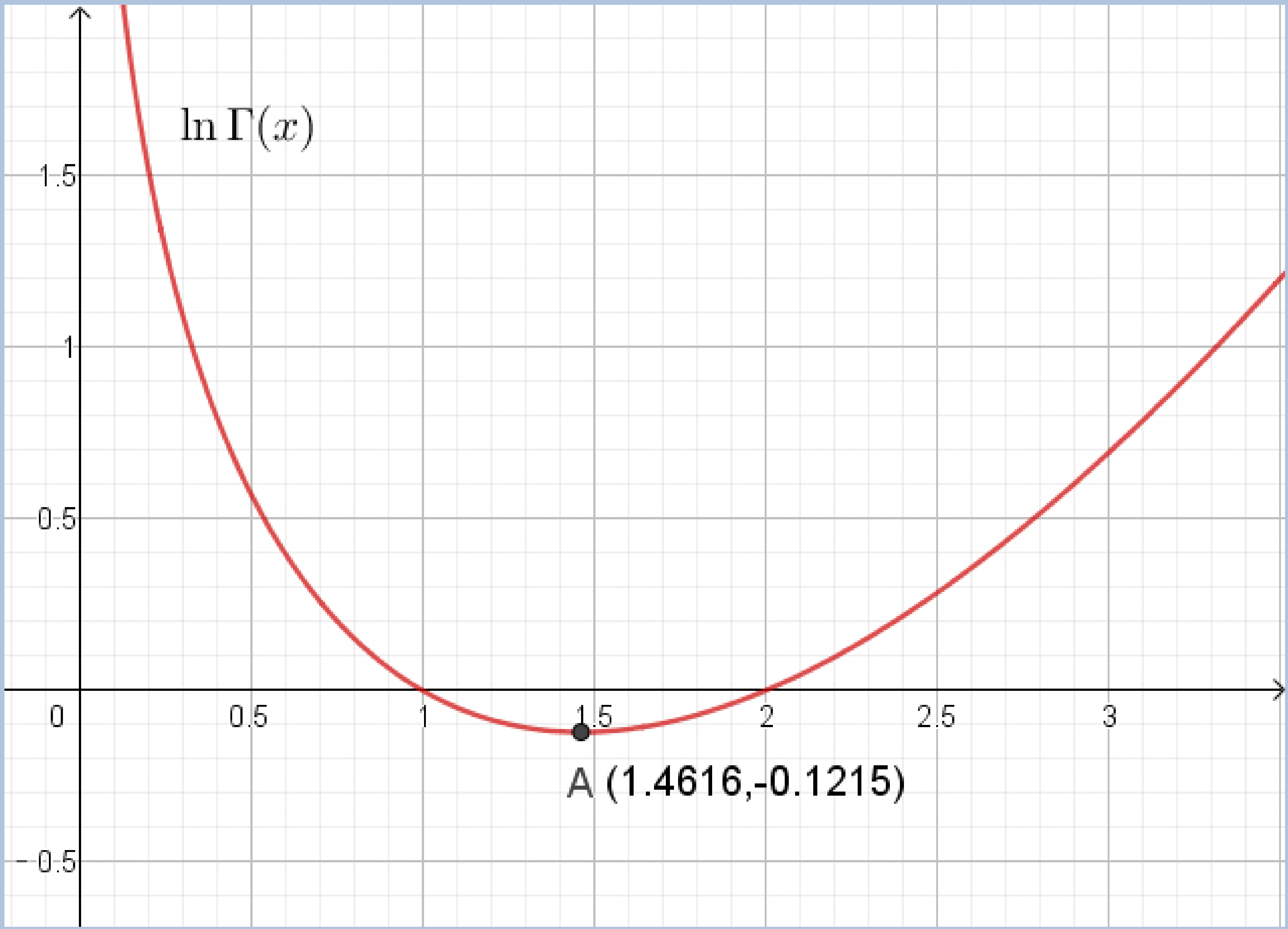
$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}-1} e^{-t}\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{x_1-1}{p}} e^{-\frac{t}{p}}\right)\left(t^{\frac{x_2-1}{q}} e^{-\frac{t}{q}}\right)\,dt \\ &\leqslant \left(\int_0^{+\infty} t^{x_1-1} e^{-t}\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} t^{x_2-1} e^{-t}\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\Gamma(x_1))^{\frac{1}{p}} (\Gamma(x_2))^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

因而

$$\ln\Gamma\left(\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}\right) \leqslant \frac{1}{p}\ln\Gamma(x_1)+\frac{1}{q}\Gamma(x_2),$$

即, $\ln\Gamma(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.


2.5
2
1.5
1
0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
$\Gamma(x)$
A (1.4616,0.8856)


$\ln\Gamma(x)$
1.5
1
0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
A (1.4616,-0.1215)
−0.5

定理 3 如果 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数, 满足

1° 对任意 $x>0$, 有 $f(x)>0$ 且 $f(1)=1$;

2° $f(x+1)=xf(x)$, $x>0$;

3° $\ln f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

则 $f(x)=\Gamma(x)$, $x>0$.

证明 由 2°, 只需对 $x\in(0,1)$ 来证明. 对于自然数 n, 有

$$n-1<n<n+x<n+1.$$

因此, 根据凸函数的性质, 有

$$\frac{\ln f(n)-\ln f(n-1)}{n-(n-1)}\leqslant\frac{\ln f(n+x)-\ln f(n)}{(n+x)-n}\leqslant\frac{\ln f(n+1)-\ln f(n)}{(n+1)-n}.$$

由 1°, 2°, 可得 $f(n)=(n-1)!$, 因此上式可简化为

$$(n-1)^x(n-1)!\leqslant f(n+x)\leqslant n^x(n-1)!.$$

再根据 2° 可得

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

也可写成

$$\frac{n}{x+n}f(x) \leqslant \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leqslant f(x)$$

由此可得

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

因为 $\Gamma(x)$ 满足 1°, 2°, 3°, 所以 $\Gamma(x) = f(x)$.

推论 1 (Euler-Gauss **公式**) 对于 $x > 0$, 有

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

例 2 设 $0<\alpha<2, \beta>0$. 求积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x^\alpha}\,dx$.

解 因为 $\alpha>0$, 所以由 Dirichlet 判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x^\alpha}\,dx$ 收敛. 另外, 当 $x\to 0$ 时, $\frac{\sin\beta x}{x^\alpha}\sim\frac{\beta}{x^{\alpha-1}}$. 因此当 $\alpha<2$ 时, $\int_0^1\frac{\sin\beta x}{x^\alpha}$ 收敛. 故, 当 $0<\alpha<2$ 时, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x^\alpha}\,dx$. 收敛. 注意到

$$\int_0^{+\infty}e^{-xt^{1/\alpha}}\,dt=\frac{\alpha}{x^\alpha}\int_0^{+\infty}u^{\alpha-1}e^{-u}\,du=\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}.$$

即,

$$\frac{1}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}e^{-xt^{1/\alpha}}\,dt. \tag{1}$$

我们有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x^\alpha}\,dx=\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-xt^{1/\alpha}}\sin\beta x\,dt\right)dx. \tag{2}$$

交换上式右端两个积分号的次序, 得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-xt^{1/\alpha}} \sin \beta x\, dx \right) dt$$

由于

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin \beta x\, dx = \frac{\beta}{\beta^2 + a^2}, \ (a > 0)$$

所以,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x^\alpha}\, dx &= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{\beta^2 + t^{2/\alpha}}\, dt \\ &= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{\beta^{\alpha-1}\frac{\alpha}{2}u^{\frac{\alpha}{2}-1}}{1+u}\, du \qquad (\text{作变换 } t = \beta u^{\frac{\alpha}{2}}) \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\pi\beta^{\alpha-1}}{\sin\frac{\alpha\pi}{2}}.\end{aligned}$$

于是对 $0 < \alpha < 2, \beta \geqslant 0$ 有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\pi\beta^{\alpha-1}}{\sin\frac{\alpha\pi}{2}}. \tag{3}$$

特别有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\, dx = \sqrt{2\pi}.$$

注意到

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos \beta x\, dx = \frac{a}{\beta^2 + a^2} \quad (a > 0).$$

稍微修改上面的方法, 可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\, dx = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\pi \beta^{\alpha-1}}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \quad (0 < \alpha < 1, \beta > 0). \tag{4}$$