2021 年秋季学期　数学分析 (B1) 期中考试

参考答案与评分标准

余启帆[1]　苏煜庭　严骐鸣

2021 年 11 月 20 日

1. (5 分) 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明: $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}=0$.

2. (24 分) 求下面的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1+n)^n+\mathrm{e}^{2n}}{n^{n+1}}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^3\sin x}$

3. (12 分) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

4. (12 分) 设 $y(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$, $f(x)=xy^{(n+1)}(x)+(n+x-2)y^{(n)}(x)+ny^{(n-1)}(x)$.

(1) 求 $y^{(n)}(x)$;

(2) 求证: $f(x)=0$.

5. (12 分) 求函数 $f(x)=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)x^{\frac{2}{3}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的极大值和极小值.

6. (10 分) 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $y=1+x\mathrm{e}^y$ 确定的隐函数. 求该函数曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程.

7. (10 分) 设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 且 $f(x)\in[a,b]$, 又 $[a,b]$ 中任意不同的 x,y 满足 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$. 令 $x_1\in[a,b]$, 并归纳地定义 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+f(x_n))$. 求证:

(1) $\{x_n\}$ 是单调数列;

(2) $\{x_n\}$ 收敛于 $[a,b]$ 中一点 c, 且 $f(c)=c$;

(3) 满足 $f(x)=x$ 的 x 是唯一的.

8. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在二阶导数, $f(0)=0$, $f'(0)>0$, $f''(x)\leqslant\alpha<0$, 其中 α 是常数. 证明:

(1) 存在 $x_0>0$, 使得 $f'(x_0)=0$;

(2) 方程 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一实根.

9. (7 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有任意阶导数, 且对任意实数 x 及 $n=0,1,2,\cdots$ 满足 $\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant n!\,|x|$. 求证: $f(x)=0$.

[1]闻道有先后, 解答有疏漏. 发现错误欢迎联系我: qifan@mail.ustc.edu.cn

0.1 参考答案与评分标准

1. (5 分) 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明: $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}=0$.

证明 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon^2$, 则当 $x\in(0,\delta)$ 时, 有 (2 分)

$$\left|\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}-0\right|=\left|\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant\sqrt{x}<\sqrt{\delta}=\varepsilon, \qquad (5\text{ 分})$$

故, 根据极限的定义有 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}=0$. □

说明 (1) 题目要求证明, 若只是用 $\varepsilon-\delta$ 语言将极限的定义翻译了一遍, 相当于没有证明, 给 0 分, 所有未出现 δ 具体取值的都属于此范围.

(2) 若没有注意到 $x\to0^+$ 的极限过程对应于 $0<x<\delta$, 而是写成了 $0<|x|<\delta$, 扣 1 分.

(3) 需要写出关键的放缩步骤 $\left|\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant\sqrt{x}$, 没有这一步扣 2 分.

(4) 若使用了换元 $\dfrac{1}{x}\to u$, 则相当于没有用 $\varepsilon-\delta$ 语言直接证明, 而是 $\varepsilon-A$ 语言, 扣 3 分.

(5) "任意" "存在" 量词使用错误、顺序颠倒等逻辑错误扣 3 分.

2. (24 分) 求下面的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1+n)^n+\mathrm{e}^{2n}}{n^{n+1}}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^3\sin x}$

解 (1)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+n)^n+\mathrm{e}^{2n}}{n^{n+1}}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1+n)^n}{n^n}+\frac{\mathrm{e}^{2n}}{n^{n+1}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^2}{n}\right)^n\right] && (2\text{ 分})\\&=\mathrm{e}+0=\mathrm{e}. && (6\text{ 分})\end{aligned}$$

□

说明 结果错误至多得 2 分.

(2)

解 (1)

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(n!)\overset{\dagger}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2n-1}\overset{\dagger}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n-\ln(n-1)}{2}=0 \qquad (4\text{ 分})$$

$$\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=\mathrm{e}^0=1. \qquad (6\text{ 分})$$

其中 $\dagger$ 处用到 "$\dfrac{*}{\infty}$ 型" 的 Stolz 定理. □

解 (2)　注意到,

$$1<(n!)^{\frac{1}{n^2}}\leqslant (n^n)^{\frac{1}{n^2}}=n^{\frac{1}{n}}, \qquad (2\ 分)$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}=1$ 及两边夹法则知, $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$.　(6 分) □

说明　(1) 若取了对数最后忘记将结果写回指数 e^0, 扣 2 分.

(2) 两边夹法则格式不对, 直接对极限进行比较的, 得 2 分.

解　(3)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+4)}{(x+3)}=\frac{5}{4}. \qquad (6\ 分)$$

□

说明　也可以使用 L'Höspital 法则, 过程正确答案错误扣 1 分.

解　(4) 由带 Peano 余项的 Taylor 公式及等价无穷小替换得:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4} \qquad (2\ 分)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4} \qquad (5\ 分)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{24}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{24}. \qquad (6\ 分)$$

□

说明　等价无穷小替换 2 分, Taylor 公式 3 分, 跳步不得分, 答案 1 分, 过程正确答案错误扣 1 分.

3. (12 分)　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解　当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}=\frac{(x-1)e^x+1}{x^2} \qquad (6\ 分)$$

在 $x=0$ 处:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x^2}=\frac{1}{2} \qquad (12\ 分)$$

□

说明　(1) 也可以通过课本**定理 3.19**, 证明 f 连续, 然后通过计算导函数的极限得到 $f'(0)$, 但是这样必须先证明 f 连续, 否则不得分. (因为这样没用到 $f(0)=1$, 此时如果把 $f(0)$ 改为任何其它数, 那么 $f'(0)$ 不存在)

(2) 正确地写到了 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$, 但是之后求错了其值, 扣 4 分.

(3) 出现一些书写错误, 如写着写着漏了 $\lim\limits_{x\to 0}$, 酌情扣 1–2 分.

4. (12 分)　设 $y(x)=x^2e^{-x}$, $f(x)=xy^{(n+1)}(x)+(n+x-2)y^{(n)}(x)+ny^{(n-1)}(x)$.

(1) 求 $y^{(n)}(x)$;

(2) 求证: $f(x)=0$.

解　(1)

$$\begin{aligned}
y^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^2\right)^{(k)} \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^{(n-k)} \\
&= (-1)^n x^2 \mathrm{e}^{-x} + (-1)^{n-1} 2nx\mathrm{e}^{-x} + (-1)^{n-2} n(n-1)\mathrm{e}^{-x} \\
&= (-1)^n \mathrm{e}^{-x} \left(x^2 - 2nx + n(n-1)\right) \qquad (8\text{ 分})
\end{aligned}$$

(2) 将 (1) 中结果代入:

$$\begin{aligned}
f(x) &= xy^{(n+1)}(x) + (n+x-2)y^{(n)}(x) + ny^{(n-1)}(x) \\
&= x\left((-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 2(n+1)x + n(n+1)\right)\right) \\
&\quad + (n+x-2)\left((-1)^n \mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 2nx + n(n-1)\right)\right) \\
&\quad + n\left((-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 2(n-1)x + (n-2)(n-1)\right)\right) \\
&= 0. \qquad (12\text{ 分})
\end{aligned}$$

□

说明　第 (1) 问二项式系数 $\binom{n}{k}$ 算错扣 2 分.

实际上本题需要把 $n = 0, 1$ 单独考虑, 但是可以验证结果仍然可以写成 $(-1)^n\mathrm{e}^{-x}(x^2 - 2nx + n(n-1))$ 的形式, 因此并没有扣分.

第 (2) 问虽然同学们也许算了很长时间, 但是改卷过程中只看代入的第一步是否正确, 之后不管是真的去算了得到是 0 还是假装计算了得到 0 都给分, 没有第 1 步的不得分.

5. (12 分)　求函数 $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right) x^{\frac{2}{3}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的极大值和极小值.

解　当 $x \neq 0$ 时, 有

$$f'(x) = x^{\frac{2}{3}} + \left(x - \frac{5}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3} x^{-\frac{1}{3}}(x-1) = 0 \implies x = 1 \qquad (4\text{ 分})$$

由此 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递增, 在 $(0, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 故,

$f(0) = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值;　(8 分)

$f(1) = -\frac{3}{2}$ 是 $f(x)$ 的极小值.　(12 分)　□

说明　(1) 如果第一步求导就求错了, 下面都是错的, 不得分. 如果化简的时候算错了系数, 可得 2 分.

(2) 最好明确写出所得导数仅适用于 $x \neq 0$, 如果没写不扣分, 但是, 若根据 $f'(x) = 0$ 得到 $x = 0, 1$, 出现 $x = 0$ 扣 2 分.

(3) 若求导错误导致极小值求错了, 但是指出 $x = 0$ 是极大值点. 在指出 0 是极大值的时候, 视论证过程是否用到导数 (以及求导是第一步就错, 还是化简后错) 扣分情况不同.

(4) 求得了极大值点、极小值点, 但是没有代入求出极大值、极小值, 两处各扣 1 分 (即扣 2 分)

6. (10 分) 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $y=1+x\mathrm{e}^y$ 确定的隐函数. 求该函数曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程.

解

$$y=1+x\mathrm{e}^y \implies x=\frac{y-1}{\mathrm{e}^y} \implies x'_y=\frac{2-y}{\mathrm{e}^y} \qquad (6\text{ 分})$$

$$\implies y'_x=\frac{\mathrm{e}^y}{2-y} \qquad (8\text{ 分})$$

代入 $(0,1)$ 得到 $(0,1)$ 处切线斜率为

$$y'_x|_{x=0,y=1}=\mathrm{e},$$

从而切线方程为 $y=\mathrm{e}x+1$.　(10 分) □

7. (10 分) 设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 且 $f(x)\in[a,b]$, 又 $[a,b]$ 中任意不同的 x,y 满足 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$. 令 $x_1\in[a,b]$, 并归纳地定义 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n))$. 求证:

(1) $\{x_n\}$ 是单调数列;

(2) $\{x_n\}$ 收敛于 $[a,b]$ 中一点 c, 且 $f(c)=c$;

(3) 满足 $f(x)=x$ 的 x 是唯一的.

解 (1) $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1}+f(x_n)-f(x_{n-1}))$, 由条件 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ 知 $|f(x_n)-f(x_{n-1})|<|x_n-x_{n-1}|$, 从而 x_n-x_{n-1} 与 $x_n-x_{n-1}+f(x_n)-f(x_{n-1})$ 同号, 从而对任意的 n, x_n-x_{n-1} 与 x_2-x_1 同号, 故

(a) $x_2>x_1$ 时, x_n 递增,

(b) $x_2<x_1$ 时, x_n 递减,

(c) $x_2=x_1$ 时, $f(x_1)=x_1$ 从而 $f(x_n)=x_n$, x_n 为常数列.

综上, x_n 单调.　(4 分)

(2) 可归纳证明 $x_n\in[a,b]$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$ 成立, 由 (1) 知 x_n 单调且有界, 故 $x_n\to c\in[a,b]$ $(n\to\infty)$, 由 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ 知 f 满足 Lipschitz 条件, 从而 $f\in C[a,b]$.

在式 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n))$ 两边取极限, 由 f 连续得

$$c=\frac{c+f(c)}{2} \implies c=f(c). \qquad (7\text{ 分})$$

(3) 用反证法. 假设存在 $b\neq c$, 使得 $f(b)=b$, 则

$$|b-c|=|f(b)-f(c)|<|b-c|,$$

矛盾! 从而假设不成立, 证毕.　(10 分) □

解 (2) 往证: $\{x_n\}$ 单调.

考虑 $x_{n+1}-x_n=f(x_n)-x_n$, 设 $g(x)=f(x)-x$, $h(x)=f(x)+x$

由题知 $\forall a\leqslant x<y\leqslant b$, 有

$$|f(x)-f(y)|<|x-y| \implies x-y<f(x)-f(y)<y-x$$

$$\implies \begin{cases} f(x)-x>f(y)-y \iff g(x)>g(y), \\ f(x)+x<f(y)+y \iff h(x)<h(y), \end{cases}$$

这表明 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递减, $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增, 由 f 满足 Lipschitz 条件知 $f\in C[a,b]$, 故 $g,h\in C[a,b]$, 由 $f(x)\in[a,b]$ 知

$$g(a)=f(a)-a\geqslant 0,\quad g(b)=f(b)-b\leqslant 0,$$

由 g 连续且严格递减知存在唯一的 $c\in[a,b]$ 使得 $g(c)=0$, 此即 $f(c)=c$.　(第 3 问, 3 分)

因此,

(a) 当 $x\in[a,c)$ 时, $g(x)>0\implies f(x)>x$,

(b) 当 $x\in(c,b]$ 时, $g(x)<0\implies f(x)<x$.

下面对 x_1 的取值范围分类讨论.

(a) 当 $x_1=c$ 时, $x_2=\dfrac{x_1+f(x_1)}{2}=x_1$, 从而可归纳证明 $\{x_n\}$ 为常数列;

(b) 当 $x_1\in[a,c)$ 时,

$$x_2-x_1=\frac{g(x_1)}{2}>\frac{g(c)}{2}=0,\quad x_2=\frac{h(x_1)}{2}<\frac{h(c)}{2}<c,$$

从而可归纳证明:

$$x_n<x_{n+1}<c,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

即 $\{x_n\}$ 单调递增有上界;

(c) 当 $x_1\in(c,b]$ 时,

$$x_2-x_1=\frac{g(x_1)}{2}<\frac{g(c)}{2}=0,\quad x_2=\frac{h(x_1)}{2}>\frac{h(c)}{2}=c,$$

从而可归纳证明:

$$x_n>x_{n+1}>c,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

即 $\{x_n\}$ 单调递减有下界.　(第 1 问, 7 分)

由上知 $\{x_n\}$ 单调有界, 故收敛, 记 $x_n\to x'\in[a,b]$ $(n\to\infty)$, 在 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+f(x_n))$ 两边取极限, 由 f 连续知 $x'=f(x')$, 又根据 $g(x)$ 零点唯一性知 $x'=c$, 从而 $x_n\to c$ $(n\to\infty)$, 其中 $c\in[a,b]$ 满足 $f(c)=c$.　(第 2 问, 10 分)　□

说明　(1) 无论采用何种方法, 分值分配都是第 (1) 问 4 分, (2) (3) 问各 3 分.

(2) 若第 (1)(3) 问证明过程中对 f 求导, 则该问至多得 1 分, 第二问如果没证明 f 的连续性就将极限和函数交换扣 1 分, 其他情况 (如循环论证等) 酌情扣分/给分.

8. (8 分)　设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在二阶导数, $f(0)=0$, $f'(0)>0$, $f''(x)\leqslant\alpha<0$, 其中 α 是常数. 证明:

(1) 存在 $x_0>0$, 使得 $f'(x_0)=0$;

(2) 方程 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一实根.

证明　(1) $\forall x>0$, 由 Lagrange 中值定理得: $\exists\xi_1\in(0,x)$, 使得

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=f''(\xi_1)\leqslant\alpha$$
$$\implies f'(x)\leqslant\alpha x+f'(0),$$

取 $x_1 = -\dfrac{f'(0)}{\alpha} + 1$, 则 $f'(x_1) < 0$. (2 分)

又 $f'(0) > 0$, $f'(x)$ 连续, 由连续函数介值定理 (或 Darboux 定理) 知, $\exists x_0 \in (0, x_1) \subset (0, +\infty)$, 使得 $f'(x_0) = 0$. (4 分)

(2) 由 $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ 及极限的保序性知, $\exists x_2 > 0$, 使得 $f(x_2) > f(0) = 0$.

对 $f(x)$ 使用 Taylor 公式, $\exists \xi_2 \in (0, x)$, 使得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\theta x)}{2}x^2 \leqslant f'(0)x + \frac{\alpha}{2}x^2 = x\left(f'(0) + \frac{\alpha}{2}x\right),$$

取 $x_3 = -\dfrac{2f'(0)}{\alpha} + 1$, 则 $f(x_3) < 0$.

由 $f(x_2) > 0$, $f(x_3) < 0$ 及连续函数介值定理知, $\exists x_0' \in (x_2, x_3)$, 使得 $f(x_0') = 0$. (2 分)

下证这样的实根是唯一的.

用反证法. 若 $f(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同实根 x_0', x_0'', 不妨设 $0 < x_0' < x_0''$, 则由 $f(0) = f(x_0') = f(x_0'') = 0$ 及 Rolle 定理知, $\exists \eta_1 \in (0, x_1)$, $\eta_2 \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0,$$

再次使用 Rolle 定理知, $\exists \gamma \in (\eta_1, \eta_2)$, 使得 $f''(\gamma) = 0$, 这与 $f''(x) < 0$ 矛盾, 因此 $f(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一实根. (4 分)

□

说明　第 (1) 问找出 $f'(x_1) < 0$ 得 2 分, 未写出具体过程而只有文字叙述的不得分.

第 (2) 问存在性和唯一性各 2 分, 唯一性也可以通过函数单调性来证明, 但必须说明清楚, 画图证明不得分.

9. (7 分)　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有任意阶导数, 且对任意实数 x 及 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 满足 $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant n!\,|x|$. 求证: $f(x) = 0$.

提示　先考虑通过 Taylor 展开证明在 $(-1, 1)$ 上有 $f(x) = 0$, 再通过一般点处的 Taylor 展开及数学归纳法或递推得到 $f(x) = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

证明　由条件易知 $f^{(n)}(x) = 0$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. 对 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处 Taylor 展开: $\exists \theta \in (0, 1)$ 使得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \qquad (2\text{ 分})$$

$$\Longrightarrow\ |f(x)| \leqslant |\theta x| \cdot |x|^n \leqslant |x|^{n+1},$$

上式令 $n \to \infty$ 得: $f(x) = 0$, $x \in (-1, 1)$. (3 分)

由连续性得: $f(x) = 0$, $x \in [-1, 1]$. (4 分)

同理, 对 $f^{(n)}(x)$ 进行 Taylor 展开可知, $f^{(n)}(x) = 0$, $x \in [-1, 1]$, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

下面对 k 用数学归纳法证明: $f^{(n)}(x) = 0$, $x \in [-k, k]$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(1) $k = 1$ 时, 已证明;

(2) 假设结论对 k 成立, 下证对 $k + 1$ $(k \geqslant 1)$ 成立.

对 $f(x)$ 在 $x=k$ 处 Taylor 展开: $\exists\theta_1\in(0,1)$, 使得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f^{(n)}(k+\theta)}{n!}(x-k)^n \\ \Longrightarrow\ |f(x)| &\leqslant |k+\theta|\cdot|x-k|^n \leqslant (k+1)\,|x-k|^n\,, \end{aligned} \qquad (5\text{ 分})$$

上式令 $n\to\infty$ 得: $f(x)=0$, $x\in[k,k+1)$.

同理可证得 $f^{(n)}(x)=0$, $x\in[-(k+1),k+1]$.

(3) 由 (1)(2) 及数学归纳法知, $f^{(n)}(x)=0$, $x\in[-k,k]$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$.

因此, $f^{(n)}(x)=0$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

特别地, 取 $n=0$, 有 $f(x)=0$, $x\in(-\infty,+\infty)$.　(7 分) □

说明　写出在任一点 x_0 处的展开式, 或 $x=0$ 处的无穷阶 Taylor 展开, 或 $x=0$ 处 Taylor 展开未交代中值 θ,ξ 的范围, 均得 1 分.

证得 $f(x)=0$, $x\in[-1,1]$ 后写出延拓或一般点处的展开得 1 分, 证明完整且逻辑清晰得 7 分, 归纳递推交代不清楚扣 1–2 分.

余启帆[2]　苏煜庭　严骐鸣
2021 年 11 月 24 日于中国科学技术大学

[2]闻道有先后, 解答有疏漏. 发现错误欢迎联系我: qifan@mail.ustc.edu.cn