数学分析 A2 第一次单元测试

2018 年 4 月 25 日

1. 计算题 (给出必要的计算步骤)：(30 分)

   (a) 计算 $u(x_1,\ldots,u_n)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ 在点 $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ 的微分，其中 $t_1^2+t_2^2+\cdots+t_n^2>0$;

   (b) 计算映射 $\mathbf{f}(x,y)=(xy^2-4x^2,3x-4y^2)^T$ 在点 $(1,-1)$ 处的 Jacobi 矩阵；

   (c) 给定方程 $e^z-xyz=0$, 计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

   (d) 设 $\mathbf{f}(x,y)=(x-y,2xy^2)^T$, 计算 $J\mathbf{f}^{-1}$.

   (e) 把函数 $f(x,y)=e^x\sin(x+y)$ 在 $(0,0)$ 点 Taylor 展开到二次项。

2. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性、可微性以及 $(0,0)$ 邻域内两个一阶偏导函数的存在性和连续性。(15 分)

3. 已知 $u=u(x,y)$ 满足方程
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,$$
   选择参数 α,β 的值, 利用 $u(x,y)=v(x,y)e^{\alpha x+\beta y}$ 将原方程转化为关于 $v(x,y)$ 的方程，使新方程中不出现一阶偏导数。(10 分)

4. 设 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, 求函数 $f(x,y,z)=xy^2z^3$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6R^2$ 上的最大值。(10 分)

5. 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的所有形式的二阶偏导数. 对平面上定点 (x_0,y_0), 对任意角度 α, 定义一元函数 $g_\alpha(t)=f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)$. 若对任意 α, 都有 $\dfrac{dg_\alpha(0)}{dt}=0$ 且 $\dfrac{d^2g_\alpha(0)}{dt^2}>0$. 证明 $f(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值. (10 分)

6. 设 $f(x,y)$ 有一阶连续偏导数, $f(0,1)=f(1,0)$, 证明在 $x^2+y^2=1$ 上至少存在两个不同的点满足 $y\dfrac{\partial f}{\partial x}=x\dfrac{\partial f}{\partial y}$. (10 分)

7. 设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 为两个点集，请用 $\subset, \supset$ 或者 $=$ 描述下面每小题中两对集合之间的关系：

   (a) $(A \cup B)'$ 与 $A' \cup B'$;

   (b) $(A \cap B)'$ 与 $A' \cap B'$.

   并给出证明。如果集合关系采用的不是 $=$，请举例说明为什么等式不成立。(10 分)

8. 证明区域中任意两点之间存在着光滑的道路。(5 分)