

概率论与数理统计B 第二次习题课

4月29日 朱心远 PB17000015 zhuxinyuan@mail.ustc.edu.cn

第一次小测

有效份数: 95, 最小值: 0, 最大值: 32, 平均值: 20.51, 中位数: 20, 方差: 58.27

题目1

设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} A \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ A(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求常数 A .

(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$.

(3) 问 $P(-\frac{\pi}{4} < X < \frac{1}{2})$.

解:

(1)

因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(x)|_{-\infty}^{+\infty} = 1$, 所以我们有

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 A \cos x dx + \int_0^1 A(1-x) dx \\ &= A + \frac{1}{2}A = \frac{3}{2}A. \end{aligned}$$

所以 $A = \frac{2}{3}$.

(2)

因为

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

在本题中, 我们有

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, \quad x < -\frac{\pi}{2} \\ F(x) &= 1, \quad x \geq 1 \end{aligned}$$

注意到本题中 $F(x)$ 是连续的, 所以

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{3}\sin x + \frac{2}{3}, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ -\frac{1}{3}(1-x)^2 + 1, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

(3)

X 是连续型随机变量, $\forall x \in \mathbb{R}, P(X = x) = 0$.

$$P\left(-\frac{\pi}{4} < X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{11}{12} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

题目2

设随机变量 X 和 Y 均服从参数为 λ 的指数分布且相互独立, 记

$$Z = \frac{X}{X+Y}, U = \min\{X, Y\}, V = \max\{X, Y\} - \min\{X, Y\}.$$

(1) 求 Z 的密度函数;

(2) 给定 $U = u$ 时, 求 V 的条件密度函数;

(3) 证明 U 和 V 互相独立.

(1)

已知 $X \sim E(\lambda), Y \sim E(\lambda)$. 设 $W = X + Y$, 我们有

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X}{W}, \\ W &= X + Y, \\ 0 < Z < 1, W > 0. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} X(Z, W) &= ZW, \\ Y(Z, W) &= W - X = W - ZW. \end{aligned}$$

上述变换的Jacobian行列式是

$$J(z, w) = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(Z, W)} = \begin{vmatrix} w & z \\ -w & 1 - z \end{vmatrix} = w.$$

所以

$$\begin{aligned} f_{Z, W}(z, w) &= f_{X, Y}(X(Z, W), Y(Z, W)) |J(Z, W)| \\ &= \lambda \exp\{-\lambda zw\} \cdot \lambda \exp\{-\lambda(w - zw)\} \cdot w \\ &= \lambda^2 \exp\{-\lambda w\} w, \quad 0 < z < 1, w > 0 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^{+\infty} f_{Z,W}(z, w) \, dw \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda w} w \, dw \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda w \cdot e^{-\lambda w} \, d(\lambda w) \\
&= \Gamma(2) = 1, \quad 0 < z < 1.
\end{aligned}$$

也就是

$$Z \sim U(0, 1).$$

另一种解法

因为 $Z = \frac{X}{X+Y}$, 我们有

$$\begin{aligned}
X(X, Z) &= X, \quad Y(X, Z) = \frac{X(1-Z)}{Z} \\
J(x, z) &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-z}{z} & \frac{-x}{z^2} \end{vmatrix} = \frac{-x}{z^2}.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
f_{X,Z}(x, z) &= f_{X,Y}(x(x, z), y(x, z)) |J(x, z)| \\
&= \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda(\frac{x(1-z)}{z})} \cdot \frac{x}{z^2} \\
&= \lambda^2 \frac{x}{z^2} e^{-\frac{\lambda x}{z}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^{+\infty} f_{X,Z}(x, z) \, dx \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda^2 \frac{x}{z^2} e^{-\frac{\lambda x}{z}} \, dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda x}{z} e^{-\frac{\lambda x}{z}} \, d\left(\frac{\lambda x}{z}\right) \\
&= \Gamma(2) = 1, \quad 0 < z < 1.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
P(U = u, V = v) &= P(U = X, V = Y - X) \mathbf{I}(X \leq Y) + \\
&\quad P(U = Y, V = X - Y) \mathbf{I}(Y < X) \\
&= P(X = U, Y = V + U) \mathbf{I}(X \leq Y) + \\
&\quad P(X = V + U, Y = U) \mathbf{I}(Y < X)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
f_{V,U}(v, u) &= f_{X,Y}(X(U, V), Y(U, V)) |J(u, v)| \mathbf{I}(X \leq Y) \\
&\quad + f_{X,Y}(X(U, V), Y(U, V)) |J(u, v)| \mathbf{I}(Y < X)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} X(U, V) &= \begin{cases} U, & X \leq Y \\ V + U, & Y < X \end{cases} \\ Y(U, V) &= \begin{cases} V + U, & X \leq Y \\ U, & Y < X \end{cases} \end{aligned}$$

注意到 $|J(u, v)| = 1$ 始终成立, 又因为 X, Y 独立且 $f_X(x) = f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x}$, 所以

$$\begin{aligned} f_{V,U}(v, u) &= \lambda e^{-\lambda u} \cdot \lambda e^{-\lambda(v+u)} \cdot 2 \\ &= 2\lambda^2 e^{-\lambda(v+2u)}, \quad v \geq 0, u > 0 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_0^{+\infty} f_{V,U}(v, u) \, dv \\ &= \int_0^{+\infty} 2\lambda^2 e^{-\lambda(v+2u)} \, dv \\ &= (-2\lambda e^{-\lambda(v+2u)}) \Big|_0^{+\infty} \\ &= 2\lambda e^{-2\lambda u}, \quad u > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{V|U}(v|u) &= \frac{f_{V,U}(v, u)}{f_U(u)} \\ &= \frac{2\lambda^2 e^{-\lambda(v+2u)}}{2\lambda e^{-2\lambda u}} \\ &= \lambda e^{-\lambda v}, \quad v \geq 0. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_0^{+\infty} f_{V,U}(v, u) \, du \\ &= \int_0^{+\infty} 2\lambda^2 e^{-\lambda(v+2u)} \, du \\ &= (-\lambda e^{-\lambda(v+2u)}) \Big|_0^{+\infty} \\ &= \lambda e^{-\lambda v}, \quad v \geq 0. \end{aligned}$$

也就是说

$$f_V(v) = f_{V|U}(v|u).$$

所以 U 和 V 互相独立.

分布名称	参数	概率密度	期望	方差	特征函数
退化分布	c	$\binom{c}{1}$	c	0	e^{ict}
二点分布	p ($0 < p < 1$)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$	p	pq	$q + pe^{it}$
二项分布 $B(n, p)$	$n \geq 1$ $0 < p < 1$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $k = 0, \dots, n$	np	npq	$(q + pe^{it})^n$
几何分布	p ($0 < p < 1$)	$q^{k-1} p, k = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$
巴斯卡分布	r, p $r \in \mathbb{N}$ $0 < p < 1$	$\binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r},$ $k = r, r+1, \dots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	$(\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}})^r$
波松分布 $P(\lambda)$	$\lambda (\lambda > 0)$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$ $k = 0, 1, \dots$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
超几何分布	$M, N, n \in \mathbb{N}$	$\frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N} \frac{(N-M)}{N} \frac{N-n}{N-1}$	
均匀分布 $U(a, b)$	$a, b (a < b)$	$\frac{1}{b-a} I_{a < x < b}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
正态分布 $N(a, \sigma^2)$	a, σ^2	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	a	σ^2	$e^{iat - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
指数分布	$\lambda (\lambda > 0)$	$\lambda e^{-\lambda x} I_{x > 0}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$(1 - \frac{it}{\lambda})^{-1}$
χ^2 分布	$n (n \geq 1)$	$\frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}$ $x > 0$	n	$2n$	$(1 - 2it)^{-n/2}$

第八周作业

(习题集第四章-28题) 设随机变量 X 服从区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的均匀分布. 试求期望 $\mathbb{E}[\sin X]$, $\mathbb{E}[\cos X]$, $\mathbb{E}[X \cos X]$.

解:

随机变量函数的期望 教材 P109 - 110

$$E(g(X)) = \sum_j g(a_j) p_j \quad \left(\text{当 } \sum_i |g(a_i)| p_i < \infty \text{ 时} \right)$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \quad \left(\text{当 } \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) dx < \infty \text{ 时} \right)$$

因为 $X \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 所以

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

所以

$$\mathbb{E}[\sin X] = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} \sin x dx = 0.$$

(奇函数 $\sin x$ 在对称区间积分)

$$\mathbb{E}[\cos X] = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} \cos x \, dx = \frac{2}{\pi}.$$

$$\mathbb{E}[X \cos X] = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} x \cos x \, dx = 0.$$

($x \cos x$ 是奇函数)

(习题集第四章-34题) 假设有 n ($n \geq 3$)个不同的盒子与 m 个相同的小球, 每个小球独立地以概率 p_k 落入第 k 个盒子($k = 1, 2, \dots, n$). 分别以 X_1, X_2, \dots, X_n 表示落入各个盒子的球数. 试求

(1) $\mathbb{E}[X_2 | X_1 = k]$ 和 $\text{Var}(X_2 | X_1 = k)$.

(2) $\mathbb{E}[X_1 + X_2]$ 和 $\text{Var}(X_1 + \dots + X_k)$, $k = 1, \dots, n$.

解:

(1)

$$\begin{aligned} P(X_2 = i | X_1 = k) &= \frac{P(X_1 = k, X_2 = i)}{P(X_1 = k)} \\ &= \frac{\binom{m}{k} \binom{m-k}{i} p_1^k p_2^i (1-p_1-p_2)^{m-k-i}}{\binom{m}{k} p_1^k (1-p_1)^{m-k}} \\ &= \frac{\binom{m-k}{i} p_2^i (1-p_1-p_2)^{m-k-i}}{(1-p_1)^{m-k}} \\ &= \binom{m-k}{i} \left(\frac{p_2}{1-p_1} \right)^i \left(1 - \frac{p_2}{1-p_1} \right)^{m-k-i} \end{aligned}$$

也就是

$$(X_2 | X_1 = k) \sim B(m-k, \frac{p_2}{1-p_1})$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_2 | X_1 = k] &= (m-k) \frac{p_2}{1-p_1}, \\ \text{Var}(X_2 | X_1 = k) &= (m-k) \frac{p_2}{1-p_1} \frac{1-p_1-p_2}{1-p_1}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (X_1 + X_2) &\sim B(m, p_1 + p_2) \\ (X_1 + \dots + X_k) &\sim B(m, p_1 + \dots + p_k) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1 + X_2] &= m(p_1 + p_2), \\ \text{Var}(X_1 + \dots + X_k) &= m \sum_{i=1}^k p_i (1 - \sum_{i=1}^k p_i). \end{aligned}$$

(第三章 slides 93页 性质4) 设 a, b, c 是常数, $\mathbb{E}X_j = \mu_j, \text{Var}(X_j) < \infty, 1 \leq j \leq n$.

求证当 X_1, \dots, X_n 相互独立时,

$$\text{Var}\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = \sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j)$$

证明:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n X_j - \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n X_j\right]\right]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n \mathbb{E}X_j\right]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n (X_j - \mathbb{E}X_j)\right]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - \mathbb{E}X_i)(X_j - \mathbb{E}X_j)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j). \end{aligned}$$

最后一步成立因为 $\forall i \neq j, X_i, X_j$ 独立时, $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$.

一些经常使用的公式

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n X_j\right] = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}X_j$$

$$\mathbb{E}[X + c] = \mathbb{E}X + c$$

$$\mathbb{E}[cX] = c\mathbb{E}X$$

$$\mathbb{E}c = c$$

$$\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^n X_j\right] = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}X_j, \text{ 要求 } X_1, \dots, X_n \text{ 相互独立}$$

$$\text{Var}(X + c) = \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(c) = 0$$

$$\text{Var}\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = \sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j), \text{ 要求 } X_1, \dots, X_n \text{ 相互独立}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \text{Var}(X) + (\mathbb{E}X)^2$$

第九周作业

χ^2 分布

定义 5.4.1. 设 X_1, X_2, \dots, X_n *i.i.d.* $\sim N(0, 1)$, 令 $X = \sum_{i=1}^n X_i^2$, 则称 X 是自由度为 n 的 χ^2 变量, 其分布称为自由度为 n 的 χ^2 分布, 记为 $X \sim \chi_n^2$.

χ^2 变量具有下列性质:

- (1) 设随机变量 $X \sim \chi_n^2$ 则有 $E(X) = n$, $Var(X) = 2n$.
- (2) 设 $Z_1 \sim \chi_{n_1}^2$, $Z_2 \sim \chi_{n_2}^2$, 且 Z_1 和 Z_2 独立, 则 $Z_1 + Z_2 \sim \chi_{n_1+n_2}^2$.

t分布

定义 5.4.2. 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim \chi_n^2$, 且 X 和 Y 独立, 则称

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

为自由度为 n 的 t 变量, 其分布称为自由度为 n 的 t 分布, 记为 $T \sim t_n$.

t 变量具有下列的性质:

- (1) 若随机变量 $T \sim t_n$, 则当 $n \geq 2$ 时, $E(T) = 0$. 当 $n \geq 3$ 时, $Var(T) = \frac{n}{n-2}$.
- (2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, t 变量的极限分布为 $N(0, 1)$.

F分布

定义 5.4.3. 设随机变量 $X \sim \chi_m^2$, $Y \sim \chi_n^2$, 且 X 和 Y 独立, 则称

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

为自由度分别是 m 和 n 的 F 变量, 其分布称为自由度分别是 m 和 n 的 F 分布, 记为 $F \sim F_{m,n}$.

F 变量具有下列的性质:

- (1) 若 $Z \sim F_{m,n}$, 则 $1/Z \sim F_{n,m}$.
- (2) 若 $T \sim t_n$, 则 $T^2 \sim F_{1,n}$.
- (3) $F_{m,n}(1-\alpha) = 1/F_{n,m}(\alpha)$

正态总体样本均值和方差的分布

定理 5.4.1. 设 X_1, X_2, \dots, X_n *i.i.d.* $\sim N(a, \sigma^2)$, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 和 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 分别为样本均值和样本方差, 则有

- (1) $\bar{X} \sim N(a, \frac{1}{n}\sigma^2)$;
- (2) $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$;
- (3) \bar{X} 和 S^2 独立.

重要的推论

推论 5.4.1. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立相同分布 (*i.i.d.*) $\sim N(a, \sigma^2)$, 则

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - a)}{S} \sim t_{n-1}.$$

推论 5.4.2. 设 X_1, X_2, \dots, X_m *i.i.d.* $\sim N(a_1, \sigma_1^2)$, Y_1, Y_2, \dots, Y_n *i.i.d.* $\sim N(a_2, \sigma_2^2)$, 且假定 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, 样本 X_1, X_2, \dots, X_m 与 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 独立, 则

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (a_1 - a_2)}{S_w} \cdot \sqrt{\frac{mn}{n+m}} \sim t_{n+m-2},$$

此处 $(n+m-2)S_w^2 = (m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2$, 其中

$$S_1^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2.$$

(习题集第四章-63题) 设随机变量 X, Y 相互独立, 具有共同分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 设 α, β 为两个常数.

(1) 求 $\text{Cov}(\alpha X + \beta Y, \alpha X - \beta Y)$.

(2) 当 α, β 取何值时, $\alpha X + \beta Y$ 与 $\alpha X - \beta Y$ 相互独立.

解:

(1)

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(\alpha X + \beta Y, \alpha X - \beta Y) \\ &= \mathbb{E}[(\alpha X + \beta Y)(\alpha X - \beta Y)] - \mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] \mathbb{E}[\alpha X - \beta Y] \\ &= \mathbb{E}[\alpha^2 X^2 - \beta^2 Y^2] - \mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] \mathbb{E}[\alpha X - \beta Y] \\ &= \alpha^2 \mathbb{E}[X^2] - \beta^2 \mathbb{E}[Y^2] - (\alpha + \beta)\mu \cdot (\alpha - \beta)\mu \\ &= (\alpha^2 - \beta^2)(\mu^2 + \sigma^2) - (\alpha^2 - \beta^2)\mu^2 \\ &= (\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2. \end{aligned}$$

(2)

独立总是可以推出不相关, 但反过来一般不成立.

当 (X, Y) 是二维正态分布时, 不相关可以推出独立.

关于二元正态分布的一些结论:

1. $X \sim N(\mu, \sigma), Y = aX + b, a \neq 0$, 则 $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$
2. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, X 与 Y 独立, α 和 β 是不全为 0 的常数, 则 $\alpha X + \beta Y \sim N(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2, \alpha^2\sigma_1^2 + \beta^2\sigma_2^2)$.

令 $\text{Cov}(\alpha X + \beta Y, \alpha X - \beta Y) = (\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2 = 0$, 可以得到

$$\alpha = \pm\beta$$

(一般认为正态分布的方差满足 $0 < \sigma^2 < \infty$)

(习题集第六章-16题) 设 X_1, X_2, \dots, X_9 为独立同分布的正态随机变量, 记

$$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + \dots + X_6), \quad Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9), \quad S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=7}^9 (X_i - Y_2)^2.$$

试求 $Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$ 的分布.

解:

设

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

那么

$$Y_1 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{6}\right)$$

$$Y_2 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{3}\right)$$

且 Y_1 和 Y_2 独立.

所以

$$(Y_1 - Y_2) \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\frac{Y_1 - Y_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

又因为

$$\frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$$

所以

$$Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{\sigma} / \sqrt{\frac{2S^2}{2\sigma^2}} \sim t(2)$$

(习题集第六章-17题) 设 X_1, X_2, \dots, X_{15} 是独立同分布的随机变量, 服从正态分布 $N(0, 2^2)$. 试求

$$Y = \frac{X_1^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \dots + X_{15}^2)}$$

的概率分布.

解:

由题意,

$$(X_1^2 + \dots + X_{10}^2) \sim \chi^2(10)$$

$$(X_{11}^2 + \dots + X_{15}^2) \sim \chi^2(5)$$

所以

$$Y = \frac{X_1^2 + \cdots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \cdots + X_{15}^2)} = \left(\frac{X_1^2 + \cdots + X_{10}^2}{10} \right) / \left(\frac{X_{11}^2 + \cdots + X_{15}^2}{5} \right) \sim F(10, 5).$$

(习题集第六章-19题) 设 X_1, \dots, X_n 是从两点分布 $B(1, p)$ 中抽取的简单样本, $0 < p < 1$, 记 \bar{X} 为样本均值, 求 $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 的期望.

解:

由题意,

$$\begin{aligned} X &\sim B(1, p), \\ \mathbb{E}\bar{X} &= \mathbb{E}X = p, \\ \text{Var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} = \frac{p(1-p)}{n}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n \bar{X}^2 \right] \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X} \cdot n\bar{X} + n\bar{X}^2 \right] \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right] \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2] - n\mathbb{E}[\bar{X}^2] \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (\text{Var} X_i + (\mathbb{E}X_i)^2) - n(\text{Var} \bar{X} + (\mathbb{E}\bar{X})^2) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (p(1-p) + p^2) - n \left(\frac{p(1-p)}{n} + p^2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} (np - p(1-p) - np^2) \\ &= \frac{1}{n} ((n-1)(p - p^2)) \\ &= \frac{n-1}{n} p(1-p). \end{aligned}$$

(习题集第六章-20题) 设 X_1, \dots, X_n 为来自正态总体 $N(a, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本, \bar{X} 和 S_n^2 分别表示样本均值和样本方差, 又设 $X_{n+1} \sim N(a, \sigma^2)$ 且与 X_1, \dots, X_n 独立, 试求统计量 $\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S_n} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ 的分布.

解:

$$\begin{aligned}\bar{X} &\sim N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right), \\(X_{n+1} - \bar{X}) &\sim N\left(0, \frac{n+1}{n}\sigma^2\right), \\ \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{n+1}} &\sim N(0, 1), \\ \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} &\sim \chi^2(n-1), \\ \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S_n} \sqrt{\frac{n}{n+1}} &= \left(\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) / \left(\sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{(n-1)\sigma^2}}\right) \sim t(n-1).\end{aligned}$$

(习题集第六章-21题) 设 X_1, \dots, X_m 为来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本, Y_1, \dots, Y_n 为来自正态总体 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本, 且 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 相互独立, \bar{X} 和 \bar{Y} 分别表示它们的样本均值, S_{1m}^2 和 S_{2n}^2 分别表示它们的样本方差, α 和 β 是给定的实数, 试求

$$T = \frac{\alpha(\bar{X} - \mu_1) + \beta(\bar{Y} - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_{1m}^2 + (n-1)S_{2n}^2}{n+m-2} \cdot \left(\frac{\alpha^2}{m} + \frac{\beta^2}{n}\right)}}$$

的分布.

解:

由题意,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{m}\right), \bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\alpha\bar{X} + \beta\bar{Y} &\sim N\left(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2, \left(\frac{\alpha^2}{m} + \frac{\beta^2}{n}\right)\sigma^2\right) \\ U = \frac{\alpha(\bar{X} - \mu_1) + \beta(\bar{Y} - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{\alpha^2}{m} + \frac{\beta^2}{n}}} &\sim N(0, 1)\end{aligned}$$

又因为

$$\frac{(m-1)S_{1m}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1), \frac{(n-1)S_{2n}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

所以

$$V = \frac{(m-1)S_{1m}^2 + (n-1)S_{2n}^2}{\sigma^2} = \frac{(m-1)S_{1m}^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S_{2n}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2)$$

所以

$$T = \frac{\alpha(\bar{X} - \mu_1) + \beta(\bar{Y} - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_{1m}^2 + (n-1)S_{2n}^2}{n+m-2} \cdot \left(\frac{\alpha^2}{m} + \frac{\beta^2}{n}\right)}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$$