

基础物理中的天文学：案例分析

袁业飞

Email: yfyuan@ustc.edu.cn

中国科学技术大学物理学院天文学系

2023 年 10 月 9 日 @USTC



Part I

理论力学中的天文学

内容提要

- 1 行星运动：开普勒第二定律的几何证明
- 2 星体的结构：流体静力学平衡
- 3 Laplace-Roung-Lenz 矢量与 Lidov-Kozai 机制
- 4 引力几何化：球对称弯曲时空中粒子运动

内容提要

- ① 行星运动：开普勒第二定律的几何证明
- ② 星体的结构：流体静力学平衡
- ③ Laplace-Roung-Lenz 矢量与 Lidov-Kozai 机制
- ④ 引力几何化：球对称弯曲时空中粒子运动

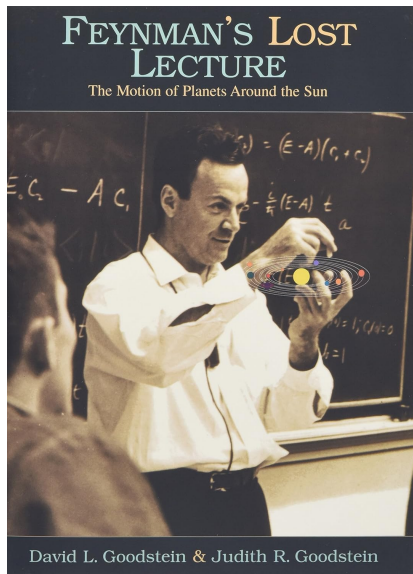
内容提要

- ① 行星运动：开普勒第二定律的几何证明
- ② 星体的结构：流体静力学平衡
- ③ Laplace-Roung-Lenz 矢量与 Lidov-Kozai 机制
- ④ 引力几何化：球对称弯曲时空中粒子运动

内容提要

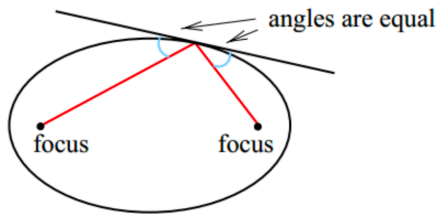
- ① 行星运动：开普勒第二定律的几何证明
- ② 星体的结构：流体静力学平衡
- ③ Laplace-Roung-Lenz 矢量与 Lidov-Kozai 机制
- ④ 引力几何化：球对称弯曲时空中粒子运动

费曼失落的讲义：行星围绕太阳的运动



椭圆的三种定义

- 到给定两个点（焦点）之间的距离为常数的曲线。
- 从一个给定点（焦点）发的光经曲线反射到另一个给定点（焦点）的曲线。



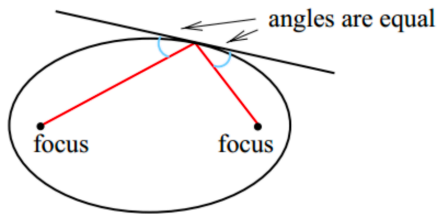
图：椭圆的光学性质

- 解析定义：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.1)$$

椭圆的三种定义

- 到给定两个点（焦点）之间的距离为常数的曲线。
- 从一个给定点（焦点）发的光经曲线反射到另一个给定点（焦点）的曲线。



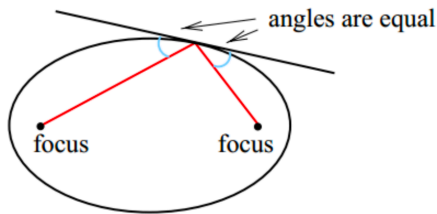
图：椭圆的光学性质

- 解析定义:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.1)$$

椭圆的三种定义

- 到给定两个点（焦点）之间的距离为常数的曲线。
- 从一个给定点（焦点）发的光经曲线反射到另一个给定点（焦点）的曲线。



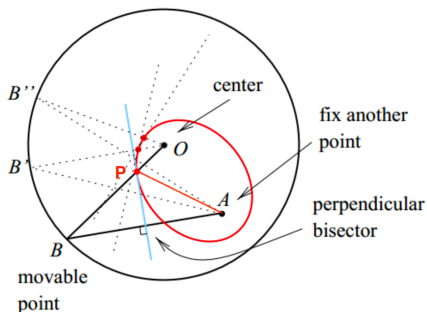
图：椭圆的光学性质

- 解析定义：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.1)$$

由圆构造椭圆

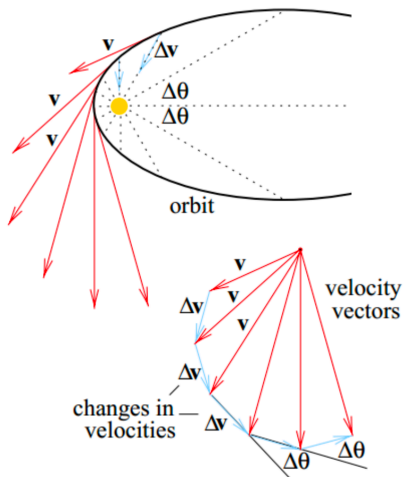
给定一个圆（圆心为 O ， B 为圆上的一个活动点）和圆内的一个点 A 。AB 的中垂线与 OB 的交点 P 就是新构造的椭圆上的一个点。沿着圆周移动 B 点就得到了一个椭圆。



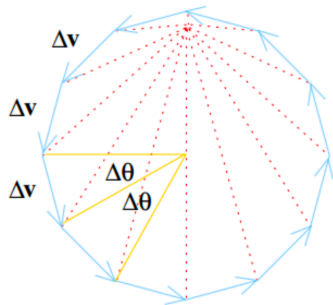
图：由圆构造椭圆

行星轨道的等角度剖分

将行星轨道等角度剖分。



行星轨道的速度图



$$\Delta v = F_g \Delta t = \frac{GM_{\odot} m_p \Delta t}{r^2}$$

$$l = \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \text{常数} \quad (1.2)$$

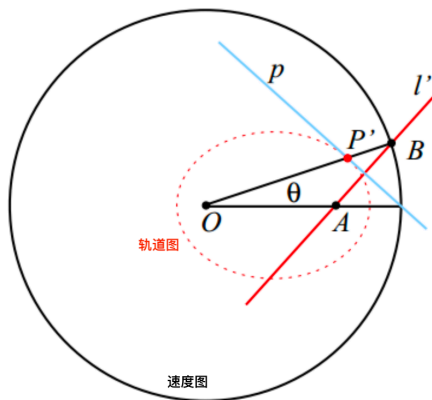
于是：

$$\Delta v \propto \Delta \theta \quad (1.3)$$

图：速度图

容易理解：彗星的轨道非闭合，速度图是圆的一部分。

开普勒第二定律的几何证明

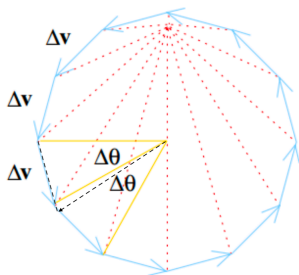


图：由经过顺时针 90 度旋转的速度图 (大圆) 构造椭圆一行星的轨道。
 PP' 就是原来速度图的方向。

水星近日点进动

与万有引力定律相比，广义相对论给出一个非常小的修正项：

$$F^{(GR)} = -\frac{3(GM_{\odot})^2 p}{r^4 c^2} \propto -\frac{1}{r^4}, \quad (1.4)$$



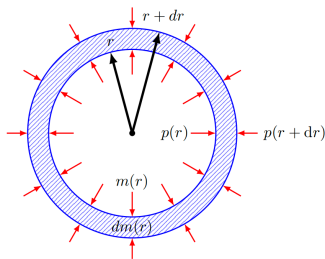
$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} \simeq \frac{F^{(GR)}}{F^{(New)}} \simeq \frac{3GM_{\odot}p}{c^2} \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \quad (1.5)$$

即：

$$\Delta\phi \simeq 6\pi \frac{GM_{\odot}/c^2}{p} \quad (1.6)$$

图：水星轨道进动的几何证明

流体静力学平衡



$$\begin{aligned}\frac{dp(r)}{dr} &= -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \\ \frac{dm(r)}{dr} &= 4\pi\rho(r)r^2\end{aligned}\quad (2.1)$$

图：球对称星体流体静力学平衡

流体静力学平衡：变分法

球对称天体的总能量 (Rosenbluth, M. N. *et al*, 1973, *ApJ*, 184, 907) :

$$E[\rho, \phi] = \int_0^R d^3r \left[\rho \epsilon + \rho \phi + \frac{(\nabla \phi)^2}{8\pi G} \right] \quad (2.2)$$

球对称天体的总质量 (静止质量) :

$$M_0 = \int_0^R d^3r \rho(r) \quad (2.3)$$

带约束条件的变分 $(\delta\rho, \delta\phi)$:

$$\delta E - \lambda \delta M_0 = 0 \quad (2.4)$$

动力学方程:

$$\begin{aligned} \epsilon + \frac{p}{\rho} + \phi - \lambda &= 0 \\ \rho - \frac{\nabla^2 \phi}{4\pi G} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

流体静力学平衡：变分法

λ 的物理含义：

$$\lambda = \frac{\delta E}{\delta M_0} = \phi_s \quad (2.6)$$

上式的物理意义是：假设某个星体已处于流体静力学平衡，如果再增加 δM_0 的物质，当该星体重新达到新的流体静力学平衡之后释放的总能量居然非常简单：等于 δM_0 的物质下落到星体表面释放的引力能。也就是说 δM_0 落到星体表面之后到星体重新调整流体静力学平衡的过程中，星体的总能量是守恒的！星体由于质量增加而收缩所释放的引力能恰好等于星体内部流体内能的增加。

上式结果已推广到广义相对论的情形 (Yuan, Y-F. ; Narayan, R. ; Rees, M. J., 2004, 606, 1112)：

$$\lambda = \frac{\delta E}{\delta M_0} = \frac{1}{1 + z_s(R^*)} = \sqrt{1 - \frac{2GM^*}{R^*}} \quad (2.7)$$

其中 $z_s(R_s)$ 为相对论星体表面的引力红移。

行星运动

双星系统：

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}_x^2 + \mathbf{p}_y^2) - \frac{k}{r} \quad (3.1)$$

行星单位质量的能量和角动量分别为：

$$E = -\frac{GM}{2a}, \quad L = \sqrt{GMa(1 - e^2)} \quad (3.2)$$

即椭圆轨参数 a, e 与两个运动积分 E, L 一一对应。
定义 Laplace-Runge-Lenz 矢量 \vec{A} ：

$$A_x = p_y L - \frac{mkx}{r}, \quad A_y = -p_x L - \frac{mky}{r} \quad (3.3)$$

行星运动

- ① 可证： $[L, H] = 0$, $[A_x, H] = 0$, $[A_y, H] = 0$, 即 L, \vec{A} 都为运动常数。
- ② 可证： $[A_x, L] = -A_y$, $[A_y, L] = A_x$, $[A_x, A_y] = -(2mH)L$ 。假设质点处于束缚态 $H = -|E|$ 。简单说明新“矢量”

$$\vec{R} \equiv \left(\frac{A_x}{\sqrt{2m|E|}}, \frac{A_y}{\sqrt{2m|E|}}, L \right)$$
 与三维角动量有完全一致的对易关系。
- ③ 可证我们新引进的“矢量” \vec{R} 大小为 $R^2 = \frac{mk^2}{2|E|}$ 。

Lidov-Kozai 机制

层级三体问题：Lidov-Kozai 机制 (Tremaine, S; Yavetz, T. 2013, arXiv:1309.5244)。无量纲化

$$\begin{aligned} [j_i, j_j] &= \frac{1}{\sqrt{GM_{\oplus}a}} \epsilon_{ijk} j_k, & [e_i, e_j] &= \frac{1}{\sqrt{GM_{\oplus}a}} \epsilon_{ijk} j_k, \\ [j_i, e_j] &= \frac{1}{\sqrt{GM_{\oplus}a}} \epsilon_{ijk} e_k. \end{aligned} \quad (3.4)$$

任何力学量 f 的演化：

$$\frac{df}{dt} = [f, H]. \quad \frac{df}{dt} = [f, \mathbf{j}] \nabla_{\mathbf{j}} H + [f, \mathbf{e}] \nabla_{\mathbf{e}} H, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{j}}{dt} &= - \frac{1}{\sqrt{GM_{\oplus}a}} (\mathbf{j} \times \nabla_{\mathbf{j}} H + \mathbf{e} \times \nabla_{\mathbf{e}} H), \\ \frac{d\mathbf{e}}{dt} &= - \frac{1}{\sqrt{GM_{\oplus}a}} (\mathbf{j} \times \nabla_{\mathbf{e}} H + \mathbf{e} \times \nabla_{\mathbf{j}} H). \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{j}^2 + \mathbf{e}^2 = 1. \quad (3.7)$$

平直欧几里德空间

- 笛卡尔坐标系: $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$,
则空间线元为:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (4.1)$$

其中度规 $g_{ij} = \text{diag}\{+1, +1, +1\}$

- 球坐标 $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \phi)$,
则空间线元为:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (4.2)$$

这时度规 $g_{ij} = \text{diag}\{+1, r^2, r^2 \sin^2 \theta\}$ 。空间的性质并不依赖于坐标系的选择。

平直闵可夫斯基 (Minkowski) 空间

- 笛卡尔坐标 (空间) : $\{x^\mu\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{t, x, y, z\}$,
则时空线元为 (已取 $c = 1$) :

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中度规 $g_{\mu\nu} = \text{diag}\{-1, +1, +1, +1\}$ 。

- 球坐标 (空间) : $\{x^\mu\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{t, r, \theta, \phi\}$
则时空线元为:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad (4.4)$$

这时度规 $g_{\mu\nu} = \text{diag}\{-1, +1, r^2, r^2 \sin^2 \theta\}$ 。

球对称弯曲空间

- Einstein 场方程 (1915 年 11 月)
- Schwarzschild 解

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \\
 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv -d\tau^2
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

即时空度规为：

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}\{- (1 - 2GM/r), + (1 - 2GM/r)^{-1}, r^2, r^2 \sin^2 \theta\}.$$

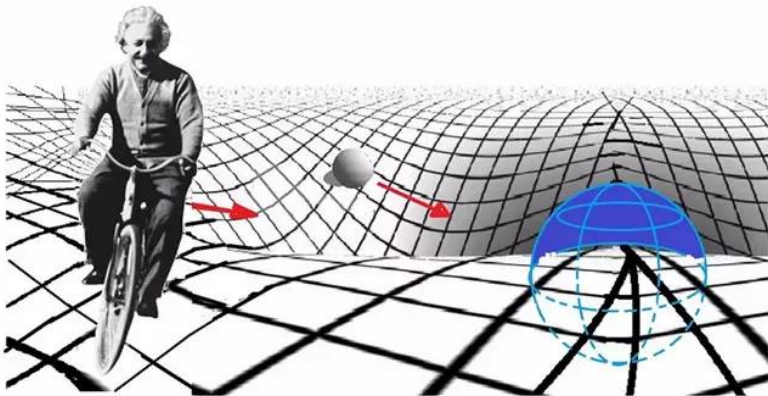
当 $r \rightarrow \infty$ 或者 $M = 0$ 时，回到平直空间。

- 度规 \sim 引力势

$$ds^2 = - (1 + 2\phi) dt^2 + (1 + 2\phi)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \tag{4.6}$$

球对称弯曲空间

物质告诉时空怎么去弯曲！ – 引力几何化



爱因斯坦场方程

- 度规： $g_{\mu\nu}(x^\lambda) \sim$ 引力势： $\phi(\vec{x}, t)$
- 泊松方程：

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho \quad (4.7)$$

- 爱因斯坦引力场方程

$$G_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}, \partial_\lambda g_{\mu\nu}, \partial_\lambda \partial_\sigma g_{\mu\nu}) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}(\rho, p) \quad (4.8)$$

弯曲空间中检验粒子的运动

- 在弯曲时空中，检验粒子走短程线（测地线）作用量为：

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda \quad (4.9)$$

- 等效拉格朗日量 L 为（只有“动能”项）：

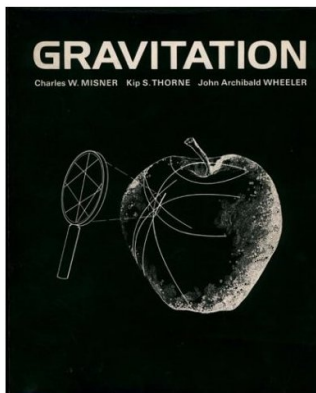
$$L_{eff} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (4.10)$$

- 动力学方程由欧拉-拉格朗日方程得到：

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad (4.11)$$

弯曲空间中检验粒子的运动

时空告诉物质如何去运动 – 引力几何化！



从分析力学的角度讨论检验粒子在强引力场中的运动

- 等效拉格朗日量（只有“动能”项）

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x^\lambda) \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} \quad (4.12)$$

- 欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (4.13)$$

- 测地线方程
- 分析力学（动能项）
 广义坐标： $\{q^\alpha\} = \{x^\mu\}$
 广义速度： $\dot{q}^\alpha = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}$
 “时间”（仿射参数）： λ （原时 τ 或一般的曲线参数）

球对称引力场中粒子的运动：弱场近似

- 等效拉格朗日量

$$2L_{\text{eff}} = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \quad (4.14)$$

- 弱场近似（有质量粒子为例）

$$2L_{\text{eff}} = -1 + \frac{2GM}{r} + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \quad (4.15)$$

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)^2 - \left(-\frac{GM}{r} \right) = T - V \quad (4.16)$$

- 弯曲时空告诉物质怎么去运动！

球对称引力场中粒子的运动：强场

- 欧拉-拉格朗日方程，得到粒子的动力学方程

$$\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} \quad (4.17)$$

- $\mu = \theta$ 方向的动力学方程：

$$r^2 \ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad (4.18)$$

$$\theta = \pi/2, \dot{\theta} = 0$$

- $\mu = t$ 方向的动力学方程：

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t} = E = \text{const.} \quad (4.19)$$

如果取 $\lambda = \tau$, $\dot{t} = 1$ 。 E 是无穷远处粒子单位质量的能量。

球对称引力场中粒子的运动：强场

- $\mu = \phi$ 方向的动力学方程：

$$r^2 \dot{\phi} = L = \text{const.} \quad (4.20)$$

L 的物理含义是粒子单位质量的有效角动量。

- $\mu = r$ 方向的动力学方程：

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \ddot{r} - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} \frac{M}{r^2} \dot{r}^2 + \frac{M}{r^2} \dot{t}^2 - r \dot{\phi}^2 = 0 \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \ddot{r} - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} \frac{M}{r^2} \dot{r}^2 \\ & + \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} E^2 - \frac{L^2}{r^3} = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

球对称引力场中粒子的运动：强场

积分上式，得到：

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = -\epsilon \quad (4.23)$$

其中：

$$\epsilon \equiv -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \begin{cases} 0 & (m = 0) \\ 1 & (m \neq 0) \end{cases} \quad (4.24)$$

球对称引力场中粒子的运动：强场

检验粒子在引力场中运动的四个运动积分都已经找到：

$$\theta = \frac{\pi}{2} . \quad (4.25)$$

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} = E , \quad (4.26)$$

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = L . \quad (4.27)$$

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = -\epsilon \quad (4.28)$$

四个运动积分： $E, L, \epsilon, \theta = \pi/2$ 。

球对称引力场中粒子的运动：径向运动

类似牛顿力学，我们采用等效势的分析方法：

$$r^2 \dot{\phi} = L \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{2} E^2 - V(r) \quad (4.30)$$

$$V(r) = \frac{1}{2} \epsilon - \epsilon \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3} \quad (4.31)$$

与牛顿力学的比较

$$r^2 \dot{\phi} = L \quad (4.32)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = E_N - V(r) \quad (4.33)$$

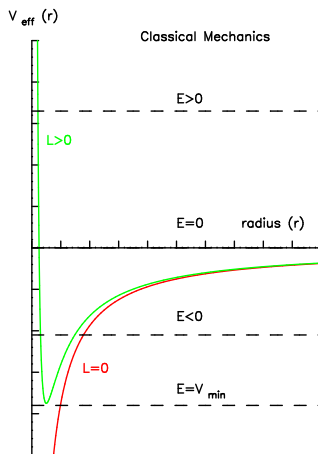
$$V(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} \quad (4.34)$$

L 为单位质量的角动量。

球对称引力场中粒子的运动：径向运动

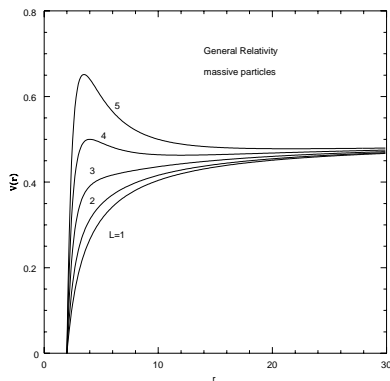
牛顿力学情形：

$$V(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2}$$



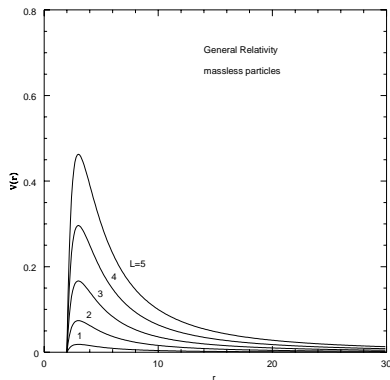
球对称引力场中粒子的运动：径向运动

广义相对论情形 ($m \neq 0$): $V(r) = \frac{1}{2} - \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}$

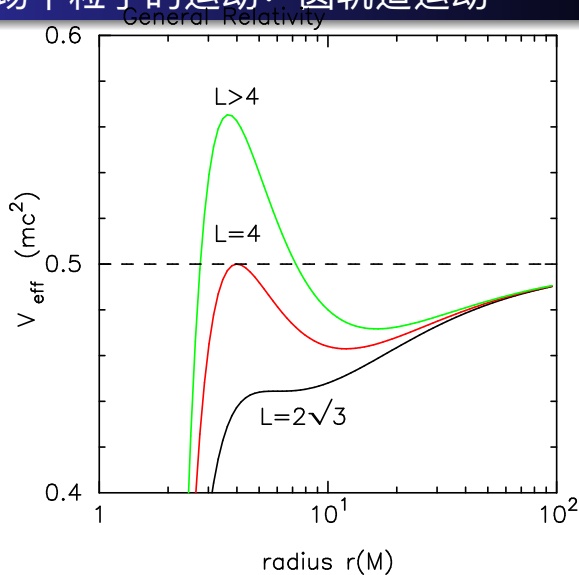


球对称引力场中粒子的运动：径向运动

广义相对论情形 ($m = 0$): $V(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}$



球对称引力场中粒子的运动：圆轨道运动



球对称引力场中粒子的运动：圆轨道远动

- 圆轨道条件

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{2} E^2 - V(r) = 0$$

$$\frac{dV(r)}{dr} = 0$$

- 稳定圆轨道条件： $d^2 V(r)/dr^2 > 0$

$$\epsilon G M r_c^2 - L^2 r_c + 3 G M L^2 = 0 \quad (4.35)$$

- 对光子：

$$r_c = 3 G M \quad (4.36)$$

- 对有质量粒子：

$$r_c = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12 G^2 M^2 L^2}}{2 G M} . \quad (4.37)$$

球对称引力场中粒子的运动：ISCO

- 最后稳定圆轨道的半径为：

$$r_{\text{ms}} = 6GM = 3r_g, \quad (4.38)$$

$$L_{\text{ms}} = \sqrt{12}GM$$

- 处于最小稳定圆轨道上粒子的能量

$$E^2 = E^2(r_{\text{ms}}) = 2V(r_{\text{ms}}) = \frac{8}{9} \quad (4.39)$$

- 吸积过程的产能率为：

$$\epsilon = \frac{1 - E}{1} = 5.7\% \quad (4.40)$$

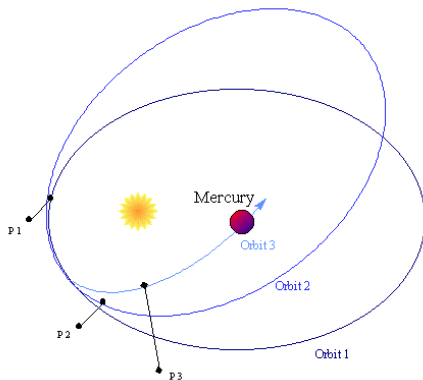
- 与核反应产能率对比：

$$\epsilon = \frac{4m_p - m_\alpha}{4m_p} = 0.69\% \quad (4.41)$$

广义相对论的四大检验

- 引力红移：检验的是等效原理
- 光线在引力场中的弯曲
- 水星近日点的进动
- 雷达回波延迟：Shapiro delay

水星近日点的进动



水星近日点的进动

推导微分形式的轨道方程：

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 = \frac{E^2 - 1}{2L^2} + \frac{GM}{rL^2} - \frac{1}{2r^2} + \frac{GM}{r^3} \quad (4.42)$$

无量纲化： $u = GM/r$ ，并对上式微分：

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \left(\frac{GM}{L} \right)^2 + 3u^2 \quad (4.43)$$

对太阳水星系统来说： $GM_{\odot} = 1.5 \times 10^3 \text{m}$, $r \sim 5 \times 10^{10} \text{m}$ 即：
 $u \sim 10^{-7}$ 。因此， $3u^3 \sim 10^{-14}$ ，可以作为微扰项处理。

水星近日点的进动

零级近似：

$$u_0 = \left(\frac{GM}{L} \right)^2 (1 + e \cos \phi) \quad (4.44)$$

代入轨道方程 ($e \ll 1$):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\phi^2} + u &= \left(\frac{GM}{L} \right)^2 + 3 \left(\frac{GM}{L} \right)^4 (1 + e \cos \phi)^2 \\ &\simeq \left(\frac{GM}{L} \right)^2 + 3 \left(\frac{GM}{L} \right)^4 + 6 \left(\frac{GM}{L} \right)^4 e \cos \phi \end{aligned}$$

右边第二项只是修正轨道轴的大小变化，非常小，可以略去。

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u \simeq \left(\frac{GM}{L} \right)^2 + 6 \left(\frac{GM}{L} \right)^4 e \cos \phi \quad (4.45)$$

方程的解： $u = u_0 + u_1$

水星近日点的进动

$$\frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 = 6 \left(\frac{GM}{L} \right)^4 e \cos \phi \quad (4.46)$$

解得：

$$u_1 = 3 \left(\frac{GM}{L} \right)^4 e \phi \sin \phi \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} u = u_0 + u_1 &= \left(\frac{GM}{L} \right)^2 \left(1 + e \cos \phi + 3 \left(\frac{GM}{L} \right)^2 e \phi \sin \phi \right) \\ &\simeq \left(\frac{GM}{L} \right)^2 \left\{ 1 + e \cos \left[1 - 3 \left(\frac{GM}{L} \right)^2 \right] \phi \right\} \end{aligned}$$

水星近日点的进动

对近日点，有：

$$\left[1 - 3 \left(\frac{GM}{L} \right)^2 \right] \phi = 2n\pi \quad (4.48)$$

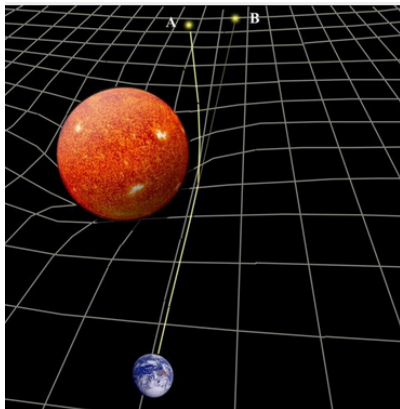
$$\phi = \frac{2n\pi}{1 - 3 \left(\frac{GM}{L} \right)^2} \simeq 2n\pi \left[1 + 3 \left(\frac{GM}{L} \right)^2 \right] \quad (4.49)$$

一个轨道之后的进动角为 (其中 $P = L^2/GM$ 为轨道的极轴)：

$$\Delta\phi = 6\pi \left(\frac{GM}{L} \right)^2 \simeq 6\pi \frac{GM}{P} \quad (4.50)$$

对水星来说，每百年进动角为： $\Delta\phi \simeq 43''$

光线在引力场中的弯曲



光线在引力场中的弯曲

基本方程

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} = E \quad (4.51)$$

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = L \quad (4.52)$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \quad (4.53)$$

轨道方程

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = \left(\frac{E}{L}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \quad (4.54)$$

令： $u = GM/r$:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3u^2 \quad (4.55)$$

光线在引力场中的弯曲

零级近似：

$$u = u_0 \cos(\phi) \quad (4.56)$$

一级近似：

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3u_0^2 \cos^2 \phi \quad (4.57)$$

$$u = u_0^2 (1 + \sin^2 \phi) \quad (4.58)$$

最终的解：

$$\begin{aligned} u &= u_0 \cos \phi + u_0^2 (1 + \sin^2 \phi) \\ &= u_0 \cos(\phi + \alpha) \\ &= u_0 \cos \phi + u_0 \sin \phi \cdot \alpha \end{aligned} \quad (4.59)$$

光线在引力场中的弯曲

$$\begin{aligned}\phi_{\infty} &= \pi/2 + 2u_0 \\ \phi_{\infty} &= -\pi/2 - 2u_0 \\ \Delta\phi &= 4u_0 = \frac{4GM_{\odot}}{R_{\odot}} = 1.75''(\text{SUN})\end{aligned}\quad (4.60)$$

其中太阳的半径 $R_{\odot} \simeq 7 \times 10^5 \text{km}$ 。

Part II

统计物理学中的天文学

内容提要

- 5 白矮星和中子星：强简并 & 相对论性费米气体
- 6 玻色星：宇观玻色-爱因斯坦系统
- 7 宇宙热历史

内容提要

- 5 白矮星和中子星：强简并 & 相对论性费米气体
- 6 玻色星：宇观玻色-爱因斯坦系统
- 7 宇宙热历史

内容提要

- 5 白矮星和中子星：强简并 & 相对论性费米气体
- 6 玻色星：宇观玻色-爱因斯坦系统
- 7 宇宙热历史

强简并自由电子气体

任意温度、任意简并度三维自由电子气体：

$$n = \int g \frac{d^3 p}{h^3} f(\epsilon, \mu), \quad (5.1)$$

$$u = \int g \frac{d^3 p}{h^3} f(\epsilon, \mu) \epsilon, \quad (5.2)$$

$$p = \int g \frac{d^3 p}{h^3} f(\epsilon, \mu) \left(\frac{p^2 c^2}{3\epsilon} \right), \quad (5.3)$$

零温近似（强简并）：

$$n = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3, \quad (5.4)$$

$$u = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} \epsilon(p) p^2 dp, \quad (5.5)$$

$$p = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2 c^2}{3\epsilon(p)} p^2 dp. \quad (5.6)$$

强简并自由电子气体

强简并非相对论电子：

$$p_F = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} \hbar n^{1/3} \sim n^{1/3}, \quad (5.7)$$

$$u = \frac{3^{5/3}}{40\pi^{2/3}} \frac{\hbar^2}{m} n^{5/3} \sim n^{5/3}, \quad (5.8)$$

$$p = \frac{3^{2/3}}{20\pi^{2/3}} \frac{\hbar^2}{m} n^{5/3} = \frac{2}{3} u \sim n^{5/3}. \quad (5.9)$$

强简并相对论电子：

$$\epsilon(p) \simeq pc. \quad (5.10)$$

$$u = \frac{2\pi c}{h^3} p_F^4 = \frac{3^{4/3}}{8\pi^{1/3}} \hbar c n^{4/3} \sim n^{4/3}, \quad (5.11)$$

$$p = \frac{1}{3} u = \frac{3^{1/3}}{8\pi^{1/3}} \hbar c n^{4/3} \sim n^{4/3}. \quad (5.12)$$

强简并自由电子气体

在任意密度情况下，白矮星的状态方程。

$$\xi_F \equiv 4 \sinh^{-1} \left(\frac{p_F}{m_e c} \right) = 4 \ln \left\{ \frac{p_F}{m_e c} + \left[1 + \left(\frac{p_F}{m_e c} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{3\pi^2} \frac{1}{\lambda_e^3} \mu_e m_B \sinh^3 \left(\frac{\xi_F}{4} \right), \\ p &= \frac{1}{2^5 \cdot 3\pi^2} \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3} \left(\sinh \xi_F - 8 \sinh \frac{1}{2} \xi_F + 3 \xi_F \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

详细推导，参见：袁业飞，《热力学与统计物理导论》，中国科学技术大学出版社，2023？

多方球理论：Lane-Emden 方程

质量密度就用星体中心的质量密度无量纲化：

$$\frac{\rho}{\rho_0} \equiv \theta^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (5.15)$$

半径用 α 参数无量纲化，即：

$$\frac{r}{\alpha} \equiv \xi, \quad (5.16)$$

其中

$$\alpha \equiv \left[\frac{K}{4\pi G} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \right]^{1/2} \rho_0^{(\gamma-2)/2}. \quad (5.17)$$

无量纲化的流体静力学平衡方程为：

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right] = -\theta^n, \quad (5.18)$$

这就是著名的 Lane-Emden 方程。

钱德拉塞卡极限

星体的半径为：

$$R = \alpha \xi_n^*. \quad (5.19)$$

则星体的总质量为：

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr = 4\pi \rho_0 \alpha^3 \int_0^{\xi^*} \xi^2 \theta^n d\xi \\ &= 4\pi \rho_0^{\frac{(3\gamma-4)}{2}} \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{3/2} M_n^*, \end{aligned} \quad (5.20)$$

钱德拉塞卡极限：

$$M_{\text{Ch}} = \frac{\sqrt{3\pi}}{2} M_3^* \frac{m_{\text{pl}}^3}{(\mu_e m_B)^2} = 5.83 \mu_e^{-2} M_{\odot}, \quad (5.21)$$

对氦白矮星、碳氧白矮星， $\mu_e = 2$ ，钱德拉塞卡质量为 $M_{\text{Ch}} = 1.46 M_{\odot}$ 。对铁白矮星， $\mu_e = 56/26 = 2.15$ ，钱德拉塞卡质量为 $M_{\text{Ch}} = 1.26 M_{\odot}$ 。

玻色星

宇观玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 系统:

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc} \quad (6.1)$$

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (6.2)$$

玻色星最大质量:

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc} \geq r_g = \frac{2GNm}{c^2} \quad (6.3)$$

$$N_{\max} \sim \frac{m_{\text{pl}}^2}{m^2} \quad (6.4)$$

$$M_{\max} \sim \frac{m_{\text{pl}}^2}{m} \quad (6.5)$$

严格求解 (Ruffini, R; Bonazzola, S., 1969, Phys. Rev. 187, 1767):

$$G_{\mu\nu} = \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (6.6)$$

相对论性正负电子对气体

光子与光子碰撞产生了大量的正负电子对，

$$\gamma + \gamma \leftrightarrow e^- + e^+. \quad (7.1)$$

正负电子对巨热力学势 J_{\pm} (Blinnikov, S. I. ; Dunina-Barkovskaya, N. V. ; Nadyozhin, D. K., 1996, ApJS, 106, 171):

$$J_{\pm}(T, V, \mu) = -\frac{8\pi}{12h^3 c^3} \left[\mu^4 + 2\pi^2 \mu^2 (k_b T)^2 + \frac{7\pi^4}{15} (k_b T)^4 \right] V. \quad (7.2)$$

利用 J_{\pm} 的全微分，易得正负电子对数密度和单位体积的熵：

$$n_{\pm} = n_- - n_+ = \left(\frac{\partial p_{\pm}}{\partial \mu} \right)_T = \frac{8\pi}{3h^3 c^3} [\mu^3 + \pi^2 \mu (k_b T)^2]. \quad (7.3)$$

$$s = \frac{S}{V} = \left(\frac{\partial p_{\pm}}{\partial T} \right)_{\mu} = \frac{8\pi^3}{3h^3 c^3} k_b^2 T \left[\mu^2 + \frac{7}{15} \pi^2 (k_b T)^2 \right]. \quad (7.4)$$

$$p_{\pm} = \frac{1}{3} u_{\pm}, \quad (7.5)$$

相对论性正负电子对气体

当相对论性电子和正电子的化学势都为零时：

$$n_-(T) = n_+(T) = \frac{8\pi}{h^3 c^3} (k_b T)^3 F_3(0) = \frac{8\pi}{h^3 c^3} (k_b T)^3 \left(1 - \frac{1}{4}\right) B_3(0). \quad (7.6)$$

以及能量密度为：

$$u_-(T) = u_+(T) = \frac{8\pi}{h^3 c^3} (k_b T)^4 F_4(0) = \frac{8\pi}{h^3 c^3} (k_b T)^4 \left(1 - \frac{1}{8}\right) B_4(0). \quad (7.7)$$

因此，它们与同温度的光子的数密度比值为：

$$\frac{n_-(T)}{n_\gamma(T)} = \frac{n_+(T)}{n_\gamma(T)} = \frac{F_3(0)}{B_3(0)} = \frac{3}{4}, \quad (7.8)$$

以及它们单位体积的内能与同温度的光子的内能比值为：

$$\frac{u_-(T)}{u_\gamma(T)} = \frac{u_+(T)}{u_\gamma(T)} = \frac{F_4(0)}{B_4(0)} = \frac{7}{8}. \quad (7.9)$$

宇宙热历史

宇宙起源于 137.5 ± 1.1 亿年前的大爆炸，从宇宙大爆炸开始的 38 万年之内，整个宇宙处于等温的平衡态，充满着相对论性的正反玻色子和费米子。热力学与统计物理在理解宇宙状态的相变与演化方面起着关键的作用 (Pathria, R.K.; Beale, P.D., 2011, Statistical Mechanics, Elsevier)!

阶段	时间	温度	简要描述
普朗克时期	$t < 10^{-43}\text{s}$	$T \sim 10^{32}\text{K}$	量子引力主导?
大统一时期	$t < 10^{-36}\text{s}$	$T > 10^{29}\text{K}$	强相互作用和电弱相互作用统一时期
宇宙暴胀期	$10^{-36} - 10^{-32}\text{s}$	$10^{28} - 10^{22}\text{K}$	宇宙真空相变，宇宙尺度因子暴增了 10^{26} 倍!
电弱相互作用结束	10^{-12}s	10^{15}K	电弱规范玻色子开始混合，光子开始出现
夸克阶段	$10^{-5} - 1\text{s}$	$10^{12} - 10^{10}\text{K}$	夸克凝聚为重子，中子数、质子数基本相当
中微子退耦期	1s	10^{10}K	中微子与重子物质退耦，产生背景中微子
轻子期	$1 - 10\text{s}$	$10^{10} - 10^9\text{K}$	$\gamma + \gamma \leftrightarrow e^+e^-$ ，宇宙中存在大量正负电子对
宇宙核合成期	$10 - 10^3\text{s}$	$10^9 - 10^7\text{K}$	氦等轻元素开始产生
光子阶段	$10\text{s} - 38 \text{ 万年}$	$10^9 - 3000\text{K}$	宇宙处于离子、电子和光子等离子态
氢的复合期	$1.8 - 38 \text{ 万年}$	$6000 - 3000\text{K}$	中性氢开始形成，光子与自由电子退耦

相变：比熵守恒

在宇宙相变过程中，宇宙相同共动体积中的熵是不是守恒的呢？

$$dJ = -SdT - pdV - Nd\mu,$$

$$dp = sdT + nd\mu. \quad (7.10)$$

因此根据热力学理论，易得：

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\epsilon + p}{T} + nT \frac{d}{dT} \left(\frac{\mu}{T} \right). \quad (7.11)$$

$$\frac{d}{dT} [(\epsilon + p)a^3] = a^3 \frac{dp}{dT}. \quad (7.12)$$

两式联立，得到：

$$d(sa^3) \equiv d \left\{ \frac{a^3}{T} (\epsilon + p - n\mu) \right\} = -\frac{\mu}{T} d(na^3). \quad (7.13)$$

参见：Padmanabhan T. 1993, Structure Formation in the Universe. Cambridge University Press

中微子背景

假设相变之前光子的温度为 T_i ，辐射场的总熵密度为：

$$s_i(T_i) = \left(1 + 2 \times \frac{7}{8}\right) s_\gamma(T_i) = \frac{11}{4} s_\gamma(T_i), \quad (7.14)$$

这里计及了正负电子对和光子的贡献。正负电子对湮灭之后，假设光子的温度跳变为 T_f ，这时候辐射场的总熵密度为：

$$s_f(T_f) = s_\gamma(T_f). \quad (7.15)$$

根据 $s_i = s_f$ ，得到：

$$\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3}. \quad (7.16)$$

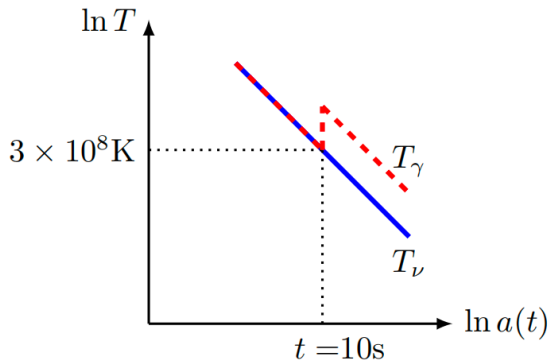
中微子的温度与光子场的温度比值在相变之后为：

$$\frac{T_\nu}{T_\gamma} = \frac{T_i}{T_f} = \left(\frac{11}{4}\right)^{-1/3}. \quad (7.17)$$

中微子背景

据此得到宇宙中微子目前的温度为：

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_{\text{CMB}} = 1.945 \text{ K}. \quad (7.18)$$



宇宙原初核合成

在宇宙年龄 $t \sim 1$ 秒之前，宇宙的温度 $T > 10^{10}\text{K}$ 。 β 平衡：

$$n + \nu_e \leftrightarrow p + e^- + \gamma, \quad (7.19)$$

$$n + e^+ \leftrightarrow p + \bar{\nu}_e + \gamma, \quad (7.20)$$

$$n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e + \gamma. \quad (7.21)$$

$$\mu_n = m_n c^2 + k_b T \ln(m_n \lambda_n^3) - k_b T \ln 2, \quad (7.22)$$

$$\mu_p = m_p c^2 + k_b T \ln(m_p \lambda_p^3) - k_b T \ln 2, \quad (7.23)$$

因此， β 平衡时，它们的数密度之比为：

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-\frac{Q}{k_b T}}. \quad (7.24)$$

中子衰变的半衰期 $\tau_n \simeq 886$ 秒，约为 14.8 分钟，即之后中子丰度不断减少：

$$q \sim 0.16 e^{-\frac{t-t_1}{\tau_n}}, \quad t > t_1 = 1 \text{秒}. \quad (7.25)$$

在 $t \sim 3.7 \text{ min}$ ，开始核合成， $q \simeq 0.12$ 。75% 的氢和 25% 的氦。

光子退耦：CMB

电离-复合平衡过程为：

$$p + e^- \leftrightarrow H + \gamma. \quad (7.26)$$

萨哈方程：

$$n_H = n_p n_e \lambda_e^3 e^{\frac{\chi_H}{k_b T}}, \quad (7.27)$$

$$f_H = \frac{n_H}{n_p + n_H} = (1 - f_H)^2 s, \quad (7.28)$$

$$s = 4\zeta(3) \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 - 2q) \eta \left(\frac{k_b T}{m_e c^2} \right)^{3/2} e^{\frac{\epsilon_H}{k_b T}}. \quad (7.29)$$

$$f_H = \frac{1 + 2s - \sqrt{1 + 4s}}{2s}. \quad (7.30)$$

氢复合发生时的温度：

$$k_b T_r \simeq \frac{\epsilon_H}{\ln \left[\frac{1}{n} \left(\frac{m_e c^2}{\epsilon_H} \right)^{3/2} \right]} \sim 3000\text{K}. \quad (7.31)$$

结束语

Thank you!



Email: yfyuan@ustc.edu.cn