

《理论力学 A》(2020 年秋季) 平时作业六¹

10 月 30 日(星期五)交, 不接收电子版。

1. **Noether 定理**。考虑存在相互作用的两质点系统, 两质点的质量分别为: m_1, m_2 。假设该相互作用只与两质点间的距离有关, 即该系统的拉格朗日量为:

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 + V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \quad (1)$$

其中 V 为相互作用的势能。试根据 Noether 定理, 证明该系统的总能量、动量和角动量守恒。

2. 1995 年 10 月 6 日, Michael Mayor & Didier Queloz 发现恒星 51 Pegasi (飞马座) 周围存在一个行星! 据观测, 该恒星为 G5 型, 质量约为 1.06 太阳质量, 温度比太阳略低。下图是观测到的恒星 51 Peg 的视向速度随着轨道位相的变化。观测到的轨道约为: 4.23 天, 视向速度为: $\pm 57\text{m/s}$ 。假设我们的视线方向位于该恒星-行星系统的轨道平面内, 试估算恒星 51 Peg 的行星的质量(以木星的质量为单位)。

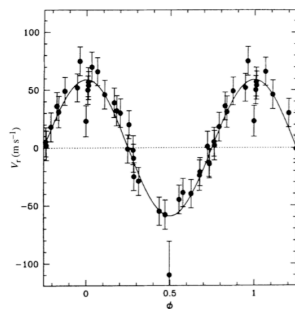


图 1: 恒星 51 Peg 的视向速度随着轨道位相的变化。观测到的轨道周期为: 4.23 天, 视向速度为: $\pm 57\text{m/s}$ 。

3. 在双星系统中, 试证明该系统的总能量和总角动量分别为:

$$E = -\frac{k}{2a}, \quad L = \sqrt{\mu k a (1 - e^2)} \quad (2)$$

其中: $k = Gm_1m_2$ 。

4. **Noether 定理 (小组讨论题)**。考虑一维相对论性的带电粒子在磁场中的作用量:

$$S = \int L(x, \dot{x}) dt = \int \left[-mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} - e\left(\varphi - \frac{1}{c}A\dot{x}\right) \right] dt \quad (3)$$

其中 m 、 e 分别为带电粒子的静止质量和电荷。电磁势 φ 和 A 为 x 与 t 的函数, 磁矢势 A 沿 x 方向。如果我们进行如下的坐标变换-洛伦兹变换:

$$\begin{pmatrix} ct_\varepsilon \\ x_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\varepsilon & -sh\varepsilon \\ -sh\varepsilon & ch\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中 ε 与速度 v 有关。这里我们将该坐标变换看作对位型空间(注意: 在四维空间中, t 也是广义坐标)的单参数的操作(operation), 如果在该操作下, 粒子的作用量不变,

¹© 中国科学技术大学物理学院 袁业飞

或者说该动力学系统满足洛伦兹不变性，试求 φ 和 A 之间满足的关系，并给出相应的守恒量-Noether 荷。

5. 阅读参考文献: Michel Mayor & Didier Queloz, 1995, Nature, **378**, 355, *A Jupiter-mass companion to a solar-type star*。不用提交。