

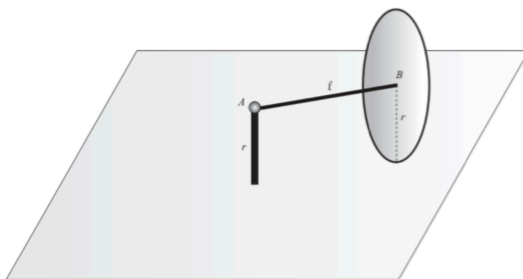
《理论力学 A》(2023 年秋季) 平时作业十三¹

期末考试前提交。

1. 证明对对称陀螺 ($I_1 = I_2 \neq I_3$), 刚体绕定点转动时, 角动量 \vec{L} 、角速度 $\vec{\omega}$ 和坐标轴 z 三者共面, 即: $(\vec{L} \times \vec{\omega}) \cdot \vec{e}_z$ (参见秦敢、向守平《力学与理论力学》第四章习题)。
2. 一个半径为 r 的均质盘绕其质心旋转, 开始时角速度为 ω_0 , 轴与盘面法线夹角为 α , 求盘的进动角速度及进动角与盘面法线的夹角 (参见秦敢、向守平《力学与理论力学》第四章习题)。
3. 拉格朗日陀螺 (也称为重对称陀螺) 为在重力场中的对称陀螺。系统的拉格朗日量为:

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta \quad (1)$$

- (a) 写出系统的哈密顿量, 并根据哈密顿正则方程得到系统的运动方程。
- (b) 通过哈密顿-雅可比方程, 求哈密顿主函数 $S(\varphi, \theta, \psi, t; C_1, C_2, C_3)$, 并得到积分形式的运动方程。
4. 如图所示, 质量为 m , 半径为 r 的匀质圆盘竖直放置于水平面上, 圆盘中心 B 通过长为 l 并垂直于盘面的轻杆光滑连接到固定点 A , A 点高出水平面的距离也为 r , 这样 A, B 始终平行于水平面, 盘面始终保持竖直。当圆盘在水平面上作无滑动滚动时, 其中心 B 绕着 A 点作圆周运动。如果圆盘中心 B 围绕 A 点以大小为 ω_0 , A 的角速度作匀速圆周运动, 求圆盘对水平面施加的力 (只需求出力的大小即可)。



5. 拉格朗日陀螺也能均匀进动 (章动角 θ 和进动角速度 $\dot{\varphi}$ 保持不变)。以圆锥顶点为固定点, 求该重对称陀螺可以均匀进动的角速度, 并给出均匀进动的存在性条件。

¹© 中国科学技术大学物理学院天文学系袁业飞