

## 《理论力学 A》(2023 年秋季) 平时作业一

9 月 14 日(星期四) 交。

1. 讨论某质点在三维欧几里得空间运动。假设我们采用球坐标系:  $\{x^i\} = \{x^1, x^2, x^3\} = \{r, \theta, \phi\}$  (其中  $i = 1, 2, 3$ ) , 则该质点的运动轨迹为:  $\{x^i(t)\} = (r(t), \theta(t), \phi(t))$ 。

- 试画出在某点处三个单位矢量  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$  的示意图。
- 计算质点速度  $\vec{v}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t)$  的三个分量。
- 计算质点加速度  $\vec{a}(t) \equiv \dot{\vec{v}}(t)$  的三个分量。

2. 讨论在太阳系中行星、彗星的轨道。试用角动量守恒和万有引力定律, 证明天体在运动过程中,

$$\frac{dv}{d\theta} = \text{cont.} \quad (1)$$

给并出该常数值的具体值。这里  $dv \equiv |d\vec{v}|$ ,  $\theta$  为极坐标中轨道的极角。

3. 讨论彗星的轨道。

- (a) 试通过给定的一个圆及其圆外一点构造双曲线。
- (b) 假设有一个小天体(例如彗星)在无穷远处以速度  $v_\infty$  入侵太阳系, 掠过太阳之后, 又以速度  $v_\infty$  逃逸出太阳系。只考虑太阳对该小天体的引力作用, 并不考虑小天体的质量损失, 试证明或说明该小天体的轨道为双曲线, 并画出它的速度图和轨道图。
- (c) 讨论罗瑟福散射。 $\alpha$  粒子在无穷远处以速度  $v_\infty$  轰击很薄很薄的金箔,  $\alpha$  粒子掠过原子核之后, 又以速度  $v_\infty$  散射出去。只考虑原子核对  $\alpha$  粒子的库伦排斥力, 并假设原子核的质量远大于  $\alpha$  粒子的质量, 试证明或说明该  $\alpha$  粒子的轨道为双曲线, 并画出它的速度图和轨道图。

4. 根据广义相对论, 行星受到太阳的“万有引力”并不遵循严格的距离平方反比律, 即:  $F \propto -r^{-2}$ 。与经典的万有引力定律相比, 广义相对论给出一个非常非常小的修正项:

$$F^{(GR)} = -\frac{3(GM_\odot)^2 p}{r^4 c^2} \propto -\frac{1}{r^4}, \quad (2)$$

负号表示该力为吸引力,  $p = a\sqrt{1-e^2}$  为椭圆轨道的极轴, 其中  $e$  为轨道偏心率,  $c$  为光速。

$$a(1-e^2)$$

- (a) 试根据行星运动的速度图, 计算行星沿着轨道运行一圈之后近日点的进动值。
- (b) 水星是离太阳最近的行星, 受到太阳的引力最大, 水星轨道近日点的进动最显著。水星的轨道参数如下:  $a = 5.8 \times 10^7 \text{ km}$ ,  $e = 0.20$ ,  $T = 88 \text{ 天}$ 。试估算水星近日点的进动角(单圈), 数量级正确即可。可能用到的参数:  $\frac{GM_\odot}{c^2} = 1.5 \text{ km}$ 。