

## 《理论力学 A》(2023 年秋季) 平时作业二

9 月 21 日(星期四) 交。

1. 根据定义, 作用量  $S$  的量纲为 [能量]×[时间]=[角动量]×[角度]=[动量]×[长度], 即角动量量纲。因此, 在真空中自由电子的作用量为:  $S = Et[\vec{x}]$ 。其中  $t[\vec{x}]$  为路径  $\vec{x}$  的泛函。试根据费曼路径积分的思想, 解释电子的杨氏双缝干涉实验结果。
2. 对应同一个力学系统, 可以有不同的拉格朗日量(函数), 但是它们都给出相同的动力学方程, 也就是系统的拉格朗日量并不唯一。例如,  $L = L(q(t), \dot{q}(t), t)$  与  $L(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{df(q, t)}{dt}$  就给出相同的动力学方程, 这里  $f(q, t)$  为任意的函数。试通过如下两种方法证明之。

(a) 通过最小作用量原理证明之;

(b) 直接将两个拉格朗日量分别代入欧拉-拉格朗日方程 (E-L Eqs.) 验证之。

3. 现讨论自由的相对论性粒子的拉格朗日量 (参见讲义 §1.3)。试根据狭义相对论中力学的相对性原理, 即洛伦兹对称性, 证明自由的相对论性粒子的拉格朗日量为:

$$L = \frac{1}{2} m \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (1)$$

其中:  $m$  为粒子的静止质量,  $x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{ct, x, y, z\}$ ,  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{-1, +1, +1, +1\}$  为 Minkowski 度规。

4. 接上题。假设时空间中存在电磁场, 将电磁场 ( $\vec{E}(\vec{x}, t)$  和  $\vec{B}(\vec{x}, t)$ ) 看做外场, 电磁场可以用四维的势函数  $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$  统一表示:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (3)$$

其中  $\varphi$  为静电势,  $\vec{A}$  为磁矢量势。试大胆猜测质量和电荷分别为  $m$  和  $q$  的带电粒子在电磁场中的拉格朗日量。

5. (思考题) 我们知道拉格朗日量  $L(q(t), \dot{q}(t), t)$  是坐标  $q(t)$  和速度  $\dot{q}(t)$  的函数, 坐标  $q(t)$  和速度  $\dot{q}(t)$  是独立的量。但是有同学这么反驳我: 坐标  $q(t)$  对时间求导, 不就得到速度  $\dot{q}(t) = dq(t)/dt$  了吗? 速度应该不是独立的量! 你是怎么理解的? (简要说明)