九字頭力學的獨立性：不依賴 L 直接构造出 H.

作用量：$S=\int_{t_1}^{t_2}(\vec{p}\dot{\vec{r}}-H(\vec{p},\vec{r},t))dt$ ①

下面首先考虑自由粒子的 H 的形式，取惯性系 K，并为了简便，我们不妨取三维笛卡尔坐标 (x,y,z) 进行研究.

令 $L(\vec{r},\vec{v},t)=\vec{p}\cdot\vec{v}(\vec{r},\vec{p},t)-H(\vec{r},\vec{p},t)$ ②

注意到此时我们只知道 $\vec{p}$ 是一种测量运动的物理量，但我们并未定义 $\vec{p}=m\vec{v}$ 或 $\vec{p}=\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}$ 一类的关系，也即 $\vec{p}$ 的数学形式我们尚未定义.

由空间处处均匀，即体系具有空间不变性，且体系显然有时间平移不变性，故而态函数 L 中应该不含 $\vec{r}$ 和 t，即：

$L=L(\vec{p})=\vec{p}\cdot\vec{v}(\vec{p})-H(\vec{p})$ ③

当然，存在可能使 $\vec{v}$ 中含 $\vec{r},t$，H 中含 $\vec{r},t$ 然后互相抵消的情况，但这样的东西自然是没有意义的.

下面考虑伽利略变换，假设有一惯性系 K，以 $-\vec{v}\sim 0(\vec{v})$ 相对于 K 运动.（$\vec{v}$ 是常量），则有：

$\vec{v}(\vec{p}+m\vec{v})=\vec{v}+\vec{v}$ ④

将此式展成分量形式避免数学处理上的头疼：

$$\begin{cases} v_x+\nabla_p v_x\cdot m\vec{v}=v_x+v_x \\ v_y+\nabla_p v_y\cdot m\vec{v}=v_y+v_y \\ v_z+\nabla_p v_z\cdot m\vec{v}=v_z+v_z \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \nabla_p v_x\cdot m\vec{v}=v_x \\ \nabla_p v_y\cdot m\vec{v}=v_y \\ \nabla_p v_z\cdot m\vec{v}=v_z \end{cases}$$ ⑤

其中 $\nabla_p=\frac{\partial}{\partial p_x}\vec{x}+\frac{\partial}{\partial p_y}\vec{y}+\frac{\partial}{\partial p_z}\vec{z}$

注意任意给定 $\vec{v}$，④与 v_x,v_y,v_z 的大小全然无关.

随手提出其中一个式子来，有：

对 $v_x(\vec{p})$，对给定的 $d\vec{p}=dp_x\vec{x}+dp_y\vec{y}+dp_z\vec{z}$，无论 $\vec{p}$ 取何值，总有：

$\frac{\partial v_x}{\partial p_x}dp_x+\frac{\partial v_x}{\partial p_y}dp_y+\frac{\partial v_x}{\partial p_z}dp_z=\varepsilon_x$ ⑥

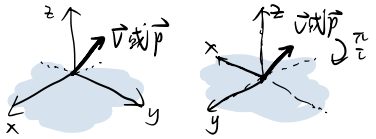
那么必有 $\frac{\partial v_x}{\partial p_x}$，$\frac{\partial v_x}{\partial p_y}$，$\frac{\partial v_x}{\partial p_z}$ 恒为常数对 $\forall\vec{v}$，此即 $\vec{v}$ 与 $\vec{p}$ 呈线性关系，此即有：

$$\begin{bmatrix} \lambda_{x1} & \lambda_{x2} & \lambda_{x3} \\ \lambda_{y1} & \lambda_{y2} & \lambda_{y3} \\ \lambda_{z1} & \lambda_{z2} & \lambda_{z3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$ ⑦ 其中 λ 均为常数.

而又空间各向同性，x,y,z 三个方向没有什么根本区别，故⑦应该长成这种形式：

$$\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$ ⑧

注意到空间是各向同性的，那么如果将 x 和 y 轴互换后，则矩阵应该不变，而 $\vec{p}$ 和 $\vec{v}$ 的部分分量发生改变，故而有：



$$\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -p_y \\ p_x \\ p_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -v_y \\ v_x \\ v_z \end{bmatrix}$$ ⑨

则有：$\begin{cases} -bp_y+ap_x+bp_z=v_x \\ ap_x+bp_y+cp_z=v_x \end{cases}$ ⑩ 则立即可得 $b=0$，故而整个矩阵可以约化为一个常数，即 $\vec{v}=\lambda\vec{p}$ ⑪ $\lambda=const$

将⑪代入③得：$L(\vec{p})=\lambda p^2-H(\vec{p})$，由于空间是各项同性的，态函数 L 中不应该有 $\vec{p}$ 的方向的有关信息，即 $L\equiv L(p)$，即：

$L(\vec{p})=\lambda p^2-H(p)$ ⑫

下面我们来考虑 H(p) 的形式，此形式应满足运动方程在伽利略变换下不变.

必要性：不妨取上文中的 k_1 系，则有：

$L(\vec{v}+d\vec{v})=\lambda p^2-H(p)+2\lambda\vec{v}\cdot\vec{p}\left(\lambda-\frac{\partial H}{\partial p}\right)$

$=L(\vec{p})+2\lambda\vec{v}\cdot\vec{p}\left(\lambda-\frac{\partial H}{\partial p}\right)$ ⑬

注意到若想运动方程不变，$L(\vec{p}+d\vec{p})$ 和 $L(\vec{p})$ 间至多相差一个量 $f(\vec{r},\vec{p},t)$，故而应有：

$\frac{\partial H}{\partial p}=\lambda-\mu$ ⑭ $\mu=const$，亦即 $H=(\lambda-\mu)p^2$

充分性：取一惯性系 k_2 使 k_2 以 $-\vec{v}\sim\vec{v}$ 的速度相对于 K 运动，可得：

$L\left(\frac{\vec{p}}{m}+\vec{v}\right)^2=L(\vec{p})+2\mu\vec{v}\cdot\vec{p}+\frac{\mu}{m}v^2$ ⑮

显然二者相差的是一个 $f(\vec{r},\vec{p},t)$ 的项，说明⑭是合理的.

而又由最小作用量原理得到运动方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial\vec{r}}=-\dot{\vec{p}} & ⑯ \\ \frac{\partial H}{\partial\vec{p}}=\vec{v} & ⑰ \end{cases}$$

注意到⑰式有：

$2(\lambda-\mu)\vec{p}=\lambda\vec{p}\Leftrightarrow\mu=\frac{1}{2}\lambda$ ⑱

故而可以得：

$H=\frac{1}{2}\lambda p^2$，$L=\lambda p^2-\frac{1}{2}\lambda p^2=\frac{1}{2}\lambda p^2$ ⑲

代入⑭⑰并引入⑪得 $\vec{v}=const$，这显然合理. 故⑰即为所求. 并且由最小作用量原理，知 $\lambda>0$（否则 S 可以到 $-\infty$ 而无极小值）

而考虑有外场的情况，观察⑭⑰，我们认为，在 H 后面添加一项 $U(\vec{r},\vec{p},t)$ 来表示相互作用是可以自洽的（去掉外场后回⑰式），故而有：

$H=\frac{1}{2}\lambda p^2+U(\vec{r},\vec{p},t)$ ⑳ 此即为哈密顿量的形式，当然，实际上是：$H=\frac{p^2}{2m}+U(\vec{r},\vec{p},t)$ ㉑.