

《理论力学 A》(2023 年秋季) 平时作业六¹

10 月 25 日(星期四)交。

1. 质点在引力场 $V(r) = -k/r$ 内沿着抛物线运动, 能量 $E = 0$, 试求质点坐标与时间的关系: $r = r(t)$ (参见朗道《力学》第三章习题 1)。
2. 质点在有心力场 $V(r) = \alpha/r^2$ 内运动, 试积分运动方程, 得到: $r = r(\theta)$ 以及 $r = r(t)$ (参见朗道《力学》第三章习题 2)。
3. 在势能 $V(r) = -k/r$ 上增加一个小的修正项: δV , 有限运动的轨道不再封闭, 发生轨道进动。试求如下两种情况下轨道在一个周期内的进动角 $\delta\theta$: a) $\delta V = \beta/r^2$; b) $\delta V = \gamma/r^3$ (参见朗道《力学》第三章习题 3)。
4. 行星在太阳引力场中作椭圆轨道, 但是行星运动的速度图是圆。所谓的速度图就是将行星在轨道上任一点的速度矢量都平移到坐标的原点而构成的图。试利用角动量 \vec{L} 与 Laplace-Runge-Lenz 矢量 \vec{A} 的叉乘来证明行星运动的速度的确是圆, 并得到速度图的半径大小, 以及原点偏离圆心的大小。
5. **选做题。**现有一绕共同质心 C 相互绕转, 作圆轨道运动的双星系统, 两个星体的质量分别为 m_1, m_2 , 它们之间的距离假设为 a , 显然两个星体相互绕转的角速度为: $\omega = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a^3}}$ 。下面我们在双星的共转参考系中讨论。这里共转参考系的转轴经过质心 C 且垂直于轨道平面, 转动参考系的角速度为 ω 。因此, 在共转参考系中, 两个双星是静止不动的。

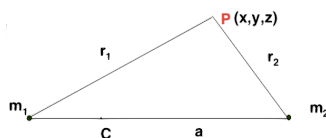


图 1: 双星共转参考系。其中 C 点为质心的位置。 P 点是检验粒子的位置。

- (a) 在转动参考系中, 存在一些平衡点, 即在哪些平衡点, 检验粒受到两个星体的万有引力与离心力大小相等, 方向相反。试找出所有的平衡点(拉格朗日点)。
- (b) 如图, 在转动参考系中, 我们不妨选择 m_1 所在的点为坐标原点, m_1, m_2 的连线方向为 x 轴方向, 选择合适的势能原点, 我们可得在转动参考系中, 某参考点 $P(x, y, z)$ 的势能为:

$$V = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} - \frac{\omega^2}{2} [(x - x_c)^2 + y^2], \quad (1)$$

其中 x_c 为质心 C 的 x -坐标, 其中 r_1 和 r_2 为参考点 P 分别到 m_1 和 m_2 之间的距离。试用计算机绘制出势能 $V(x, y, z)$ 的等势图, 并标出所有的拉格朗日点。

¹© 中国科学技术大学物理学院天文学系