13.1.2 无穷区间上积分收敛性的一般判别法

为了给出更一般的判别法, 需要引进类似级数的 Abel 引理.

引理 1 (第二积分中值定理) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负. 若 $g(x)$ 单调递减, 则必存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx.$$

若 $g(x)$ 单调递增, 则必存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)dx.$$

证明 我们只证 g 单调递减的情形. 首先注意到, $g(x)$ 是单调的, 所以是可积的, 因此 fg 也是可积的, 上式左边的积分有意义.

对区间 $[a,b]$ 做分割 $T:\ a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$
则 fg 在 $[a,b]$ 上的积分可以表示

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(g(x)-g(x_{i-1}))dx\end{aligned}$$

如果用 $\omega_i=\sup\{|g(x)-g(x')|:\ x,\ x'\in[x_{i-1},\ x_i]\}$ 表示 g 在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅. K 表示 f 在 $[a,b]$ 的一个上界（因为可积所以有界）. 那

返回 全屏 关闭 退出

么, 上式右端第二个和数的绝对值不超过

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)||g(x)-g(x_{i-1})|dx \leqslant K\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$$

因为 g 可积, 所以

$$\lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0.$$

于是, 我们有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)dx.$$

记

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \text{所以} \quad F(x_k) = \sum_{i=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(t)dt$$

则 $F(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的一个连续函数, 故有最大值和最小值, 分别记为 M 和 m, 即

$$m \leqslant F(x) = \int_a^x f(t)dt \leqslant M$$

注意到 $g(x_0) \geqslant g(x_1) \geqslant \cdots \geqslant g(x_n) \geqslant 0$, 利用 Abel 引理, 就有

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + F(b)g(x_{n-1}).$$

所以

$$mg(a) = mg(x_0) \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \leqslant Mg(x_0) = Mg(a)$$

令 $|T| \to 0$, 得

$$mg(a) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant Mg(a).$$

由于 $F(x)$ 是连续的, 根据连续函数的介值定理, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx.$$

推论 1 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调, 则必存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

定理 1 (Dirichlet) 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下面两个条件:

1° $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ 作为 b 的函数在 $(a, +\infty)$ 有界.

2° $g(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

证明 设 $|F(b)| \leqslant M$. 应用第二积分中值定理, 存在 $\xi \in [A, A']$, 使得

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)dx = g(A)\int_A^\xi f(x)dx + g(A')\int_\xi^{A'} f(x)dx$$

所以

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| = |g(A)|\left|\int_A^{\xi} f(x)dx\right| + |g(A')|\left|\int_{\xi}^{A'} f(x)dx\right|$$

根据条件 1°, 知

$$\left|\int_A^{\xi} f(x)dx\right| = |F(\xi) - F(A)| \leqslant 2M, \quad \left|\int_{\xi}^{A'} f(x)dx\right| \leqslant 2M$$

由条件 2°, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 一定存在 $X > 0$, 使得当 $A,\ A' > X$ 时, 有

$$|g(A)| < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad |g(A')| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

所以只要 $A,\ A' > X$, 就有

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| < \varepsilon.$$

根据 Cauchy 收敛准则, 我们就完成了定理的证明.

用类似的方法可以证明

定理 2 (Abel) 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下面两个条件:

1° 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

2° $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界.

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

证明 由 1° 可知 $F(b)=\int_a^b f(x)\,dx$ 有界. 由 2° 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ 收敛, 设其值为 M, 即, $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-M)=0$. 根据 Dirichlet 定理,

$$\int_a^{+\infty} f(x)(g(x)-M)\,dx$$

收敛. 于是

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx=\int_a^{+\infty} f(x)(g(x)-M)\,dx+M\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

收敛.

例 1 设 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义, 并且当 $x \to +\infty$ 时 $g(x)$ 单调趋于零, 则积分

$$\int_a^{+\infty} g(x)\sin x dx, \quad \int_a^{+\infty} g(x)\cos x dx$$

都收敛.

证明 由于对任意 $b > a$, 都有

$$\left|\int_a^b \sin x dx\right| \leqslant 2, \quad \left|\int_a^b \cos x dx\right| \leqslant 2,$$

由 Dirichlet 定理可知, 原积分都收敛.

例 2 设 $a>0$, $0<p\leqslant 1$, 求证: $\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 和 $\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$ 都为条件收敛.

证明 由分部积分法可得

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx &= -\frac{\cos x}{x^p}\Big|_a^{+\infty} - p\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{1+p}}dx\\ &= \frac{\cos a}{a^p} - p\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{1+p}}dx.\end{aligned}$$

由于 $1+p>1$, 故上式右边的积分绝对收敛, 因而积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 收敛.

又由于 $|\sin x|\geqslant \sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$, 由比较判别法可知, 只需证明

$$\int_a^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx=\int_a^{+\infty}\frac{dx}{2x^p}-\int_a^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^p}dx$$

发散即可. 上式右端第一个积分发散, 第二个积分收敛, 故左边积分也是发散的.

类似, 可以证明 $\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$ 条件收敛.

例 3 求 Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 的值.

解 在和式

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

的两边积分得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

考虑函数

$$\phi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2} - x}{2x\sin\frac{x}{2}}, \quad 0 < x \leqslant \pi.$$

易证

$$\lim_{x\to 0} \phi(x) = 0.$$

令 $\phi(0) = 0$. 则 $\phi(x)$ 在闭区间 $[0, \pi]$ 上连续.

因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x-0}&=\lim_{x\to0^+}\frac{2\sin\frac{x}{2}-x}{2x^2\sin\frac{x}{2}}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{2\sin\frac{x}{2}-x}{x^3}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\frac{x}{2}-1}{3x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{6x}\\&=-\frac{1}{24}.\end{aligned}$$

故 $\phi(x)$ 在 0 可导, 且导函数 $\phi'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有界可积. 因此,

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^\pi\phi'(x)\frac{1-\cos(kx)}{k}\,dx=0.$$

因而

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^\pi\phi(x)\sin(kx)\,dx=0.$$

取 $k = n + \frac{1}{2}$, 得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,dx = 0.$$

结合 (1) 得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

作变换 $u = (n+\frac{1}{2})x$, 得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

13.1.3 无界函数积分的收敛判别法

设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有定义. a 是 $f(x)$ 的瑕点, 是指

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty,$$

此时, 函数在 a 无界. 按照 Riemann 积分的定义, 这样的函数当然不可积. 如果 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 内的任何一个闭区间上可积, 则定义

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

只要右边的极限存在就称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

例如, 对于 $f(x)=\frac{1}{(x-a)^p}$, 有

1° 当 $0<p<1$ 时, $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx=\frac{1}{1-p}(x-a)^{1-p}\Big|_a^b=\frac{1}{1-p}(b-a)^{1-p}$, 收敛.

2° 当 $p\geqslant 1$ 时, $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$ 发散.

如果做变量代换

$$y = \frac{1}{x-a}$$

则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f\left(a+\frac{1}{y}\right)}{y^2}dy.$$

所以, 瑕积分转化成了无穷区间上的广义积分. 因此, 瑕积分具有和无穷区间上广义积分完全相应的结论. 我们将这些结论直接罗列出来, 不再证明.

定理 3 (Cauchy **收敛准则**) 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $0 < \delta', \delta'' < \delta$, 就有

$$\left|\int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

定理 4 如果积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛, 那么积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛.

定理 5 如果对于充分接近 a 的 $x\,(>a)$ 有不等式 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, 那么

1° 若 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

2° 若 $\int_a^b f(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 发散.

根据上述定理, 我们选择 $f(x) = \frac{1}{(x-a)^p}$ 作为一个标准, 在 a 的右边附近, 将函数 $f(x)$ 和它进行比较并得出对 $f(x)$ 收敛性的判别.

定理 6 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $(a,b]$ 上的非负连续函数, 且

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

那么

1° 若 $0 < k < +\infty$, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 和 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛散;

2° 若 $k = 0$, 则当 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛时, $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

3° 若 $k = +\infty$, 则当 $\int_a^b g(x)dx$ 发散时, $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

例 4 研究下列椭圆积分的收敛性

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad 0 < k < 1$$

这里被积函数以积分上限 $x = 1$ 为瑕点.

解 由于

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}},$$

又 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ 收敛, 根据上面的定理知, 椭圆积分收敛.

例 5 研究积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$ 的敛散性.

解 看上去似乎 $x=0, x=1$ 都是瑕点, 但实际上, 因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x^2}=-\frac{1}{2},$$

所以 $x=1$ 并非真瑕点(可以说是可去瑕点).

考虑 $x=0$ 附近的情况, 对充分小的 x, 恒有 $1-x^2\geqslant\frac{1}{2}$, 所以

$$\left|\frac{\ln x}{1-x^2}\right|\leqslant 2|\ln x|,$$

而积分

$$\int_0^1|\ln x|dx=-\int_0^1\ln x dx=-x\ln x\Big|_0^1+\int_0^1 dx=1$$

是收敛的, 因此原积分收敛.

例 6 研究积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta}dx\ (\beta \geqslant 0)$ 的收敛性.

解 当 $\alpha < 0$ 时, $x = 0$ 是瑕点, 但它又是无穷积分, 所以把积分拆成两部分来考虑:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta}dx = \int_0^{1} \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta}dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta}dx.$$

当 $x \to 0^+$ 时,

$$\frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} \sim \frac{1}{2}x^{\alpha+1},$$

故当 $\alpha + 1 > -1$, 即 $\alpha > -2$ 时, 第一个积分收敛. 当 $x \to +\infty$ 时,

$$\frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}.$$

故当 $\beta - \alpha > 1$ 时, 第二个积分收敛. 所以原积分当 $\alpha > -2$ 且 $\beta > 1 + \alpha$ 时收敛.