第 11 章　曲线积分和曲面积分

§11.1　数量场在曲线上的积分

11.1.1　曲线的弧长

设 L 是空间中一条光滑曲线, 其参数方程为

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)):\ [\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3.$$

此曲线切向量为

$$\vec{r}\,'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t)).$$

这段曲线的弧长为

$$s(L)=\int_\alpha^\beta|\vec{r}\,'(t)|dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt. \tag{11.1}$$

弧长微元是

$$ds=|\vec{r}\,'(t)|dt=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt.$$

11.1.2 第一型曲线积分的定义

线材质量 设曲线 L 是放在 $\mathbb{R}^3$ 中一个非均匀的线材, 其质量分布 (线密度) 为连续函数 $\rho(x, y, z)$. 求此线材的质量.

一个合理的方法是先将线材 L 分割成有限个充分小的线材段:

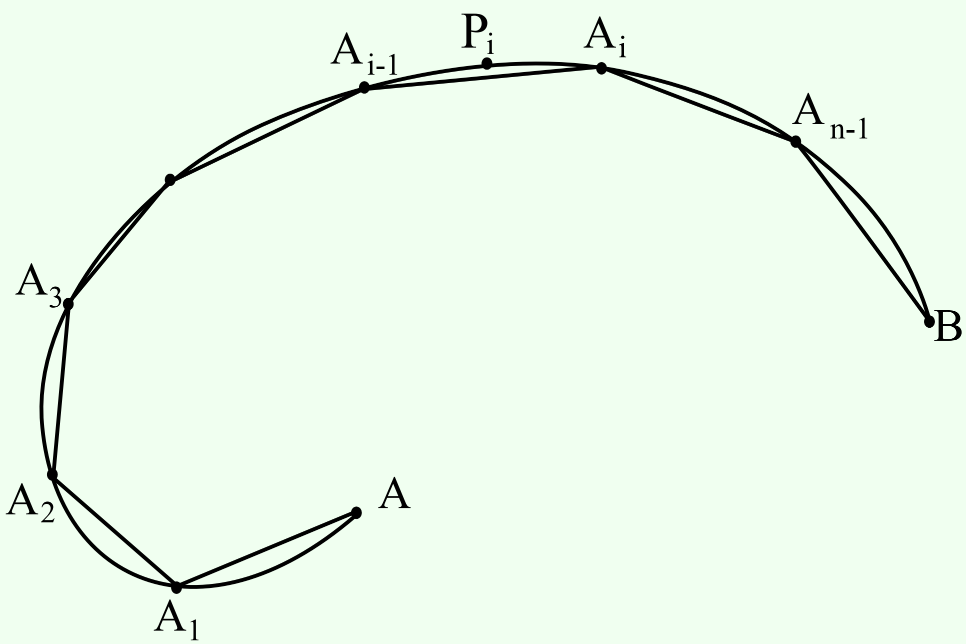
$$L_1, L_2, \cdots, L_n,$$

每一段上的质量密度近似为一个常数 $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 这里 (ξ_i, η_i, ζ_i) 为小段 L_i 上的一点, 所以小段的质量近似为 $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i$, 其中 Δs_i 是小段 L_i 的长度. 将所有这样的近似值相加就是线材总的质量的近似值:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i.$$

当分割越分越细时, 这个和式的极限值应该就是线材的质量.

定义 1 设 L 是 $\mathbb{R}^3$ 中一条可求长的曲线, 起点和终点分别为 A 和 B. f 是定义在 L 上的一个函数. 从 A 到 B 在 L 上依次取点 $A = A_0, A_1, \cdots, A_n = B$, 它们将曲线 L 分成 n 小段, 形成 L 的一个分割 T, 记第 i 个小段 $L_i = \overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 的弧长为 Δs_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 并记 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta s_i$, 称为分割 T 的宽度. 在 L_i 上任取一点 $P_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$,



作和式

$$S(f,T)=\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i. \tag{11.2}$$

如果存在一个数 I, 使得对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 只要 $\lambda<\delta$, 不论 $P_i\in L_i$ 如何选择都有

$$|S(f,T)-I|<\varepsilon,$$

则称 f 在曲线 L 上可积, 数 I 称为 f 在 L 上的第一型曲线积分, 记为

$$\int_L f(x,y,z)\,ds \quad 或 \quad \int_L f\,ds$$

注 常值函数 c 在 L 上可积, 且

$$\int_L c\,ds=cs(L),$$

其中 $s(L)$ 是 L 的弧长.

11.1.3 曲线积分的性质

定理 1 设 L 是 $\mathbb{R}^3$ 中一条光滑曲线, 其参数表示为

$$\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta).$$

如果 f 是 L 上的连续函数, 那么有

$$\int_L f ds = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t) |\varphi'(t)| \, dt. \tag{11.3}$$

证明 设

$$T_1: \ \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$$

是 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割. 在映射 φ 之下诱导出 L 的一个分割

$$T: \ A_0, A_1, \cdots, A_n,$$

其中 $A_i = \varphi(t_i), (i = 1, 2 \cdots, n)$. 沿用定义 1 的记号, 根据弧长公式和积分

中值定理, 有

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(t)|\, dt = |\varphi'(\tilde{t_i})|\Delta t_i,$$

其中 $\tilde{t_i} \in (t_{i-1}, t_i)$. 取 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = \varphi(\tilde{t_i})$. 因此

$$S(f, T) = \sum_{i=1}^{n} f \circ \varphi(\tilde{t_i})|\varphi'(\tilde{t_i})|\Delta t_i.$$

这是函数 $f \circ \varphi(t)|\varphi'(t)|$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的一个 Riemann 和. 令 $\|T_1\| \to 0$, 就得到第一型曲线积分的计算公式 (11.3).

推论 1 设 L 是 $\mathbb{R}^3$ 中一条光滑曲线, 其参数表示为 $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$. 则 L 的弧长是

$$s(L) = \int_L ds = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)|\, dt.$$

定理 2 如果 f 在 L 上可积, 那么 f 在 L 上有界.

定理 3 若 f 和 g 都在 L 上可积, c_1, c_2 是常数, 则 $c_1 f + c_2 g$ 也在 L 上可积, 且

$$\int_L (c_1 f + c_2 g)\, ds = c_1 \int_L f\, ds + c_2 \int_L g\, ds.$$

定理 4 设 f 和 g 都在 L 上可积.

(1) 若 $f \geqslant 0$, 则 $\int_L f\, ds \geqslant 0$;

(2) 若 $f \geqslant g$, 则 $\int_L f\, ds \geqslant \int_L g\, ds$.

定理 5 设 L_1 和 L_2 是两条可求长的曲线段, L_1 的终点是 L_2 的起点. 如果 f 在 L_1 和 L_2 上都可积, 那么 f 也在 $L = L_1 \cup L_2$ 上可积, 并且

$$\int_L f\,ds = \int_{L_1} f\,ds + \int_{L_2} f\,ds.$$

定义 2 集合 $E \subset \mathbb{R}^3$ 称为一维零测集, 若存在光滑曲线 $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ 使得 φ 的像覆盖 E, 而且 E 在 φ 下的原像是 $[0,1]$ 中的零测集.

定理 6 设 L 是一条可求长的曲线段, f 是 L 上有界函数, 如果 f 在 L 上的间断点全体是一个一维零测集, 则 f 在 L 上可积.

定理 7 设 L 是一条可求长的曲线段. 若 f 是 L 上连续函数, 则存在 $P_0 \in L$ 使得

$$\int_L f\,ds = f(P_0)s(L).$$

例 1 求曲线积分 $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, 其中 L 是圆周 $x^2+y^2=ax\ (a>0)$.

解 设曲线 L 的参数方程为

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t,\quad y=\frac{a}{2}\sin t,\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

则切向量为

$$\vec{r}'(t)=\left(-\frac{a}{2}\sin t,\frac{a}{2}\cos t\right).$$

弧长微元是

$$ds=\left|\vec{r}'(t)\right|dt=\frac{a}{2}dt.$$

因此,

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds=\int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}\,dt$$
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=a^2\int_0^{\pi}|\cos t|\,dt=2a^2.$$

例 2 设曲线 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0, b>0)$ 在第一象限的弧段, 计算曲线积分 $\int_L xyds$.

解 L 的方程可写成

$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}\int_L xyds &= ab\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,d\theta\\ &=\frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta}\,d\sin^2\theta\\ &=\frac{ab}{3(a^2-b^2)}\left(b^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta\right)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2}\\ &=\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.\end{aligned}$$

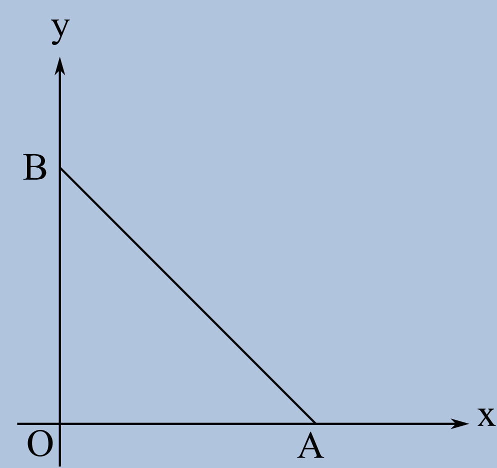
例 3 求曲线积分 $\int_L xds$, 其中 L 是以平面上 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ 为顶点的三角形的边界.

解 曲线 L 是分段光滑的, 它由三条直线 $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BO}$ 构成, 三条直线的方程以及弧长元 ds 可分别表示为

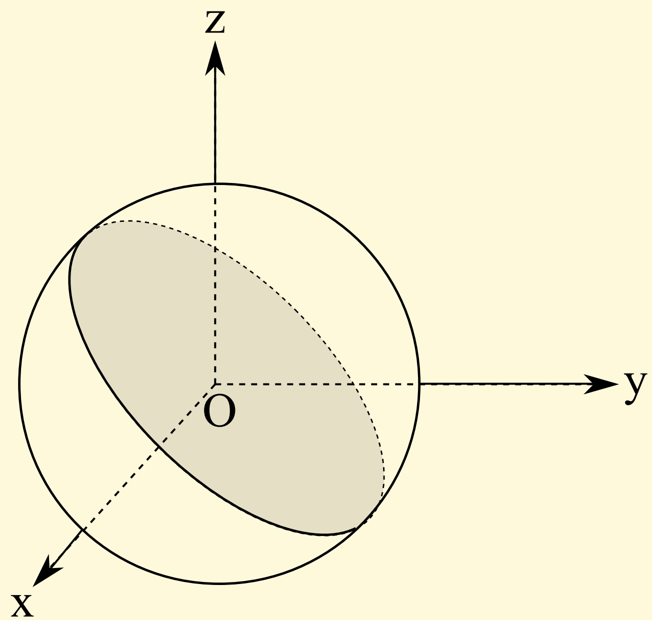
$$\overline{OA}: \quad x=t,\ y=0,\ ds=dt, t\in[0,1];$$
$$\overline{AB}: \quad x=1-t,\ y=t,\ \ ds=\sqrt{2}dt,\ \ t\in[0,1]$$
$$\overline{BO}: \quad x=0,\ y=1-t,\ \ ds=dt,\ \ t\in[0,1]$$

所以分段进行积分有

$$\begin{aligned}\int_L xds &= \int_{\overline{OA}} xds+\int_{\overline{AB}} xds+\int_{\overline{BO}} xds\\ &= \int_0^1 t\,dt+\int_0^1 (1-t)\sqrt{2}\,dt+\int_0^1 0\,dt\\ &= \frac{1+\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$



例 4 求曲线积分 $\int_L xyds$, 其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 交成的圆周.



解 先求 L 的参数方程. 显然 L 所在平面的法向为 $(1,1,1)$. 取

$$\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1),\ \vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\ \vec{e}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),$$

这是三个构成右手系的相互垂直的单位向量, 且 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 张成 L 所在平面.

因此, 可以设 L 的方程为

$$\vec{r}=\vec{r}(\theta)=a(\cos\theta\vec{e}_1+\sin\theta\vec{e}_2),\ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

由此可得 L 的参数方程的展开式

$$\begin{aligned} x&=a\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right),\\ y&=a\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\cos\theta\right),\\ z&=a\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right). \end{aligned}$$

由弧长微元公式可得 $ds=|\vec{r}\,'(\theta)|d\theta=ad\theta$. 于是

$$\begin{aligned} \int_L xyds&=a^3\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}\cos^2\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta\right)d\theta\\ &=-\frac{1}{3}a^3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta=-\frac{1}{3}\pi a^3. \end{aligned}$$

方法 2 根据对称性, 有

$$\int_L xyds = \int_L yzds = \int_L zxds.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_L xyds &= \frac{1}{3}\int_L (xy + yz + zx)ds \\ &= \frac{1}{6}\int_L \left((x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)\right)ds \\ &= -\frac{1}{6}\int_L a^2 ds \\ &= -\frac{1}{6}a^2\int_L ds \\ &= -\frac{1}{6}a^2 2\pi a \\ &= -\frac{1}{3}\pi a^3.\end{aligned}$$