

# 《数字图像处理》习题课

---

## 第5章 图像复原与重建

2020-04-07



# 空间滤波 – 几种常用的滤波器

## □ 均值滤波器

- 算术平均  $\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)$

- 几何平均  $\hat{f}(x, y) = \left[ \prod_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t) \right]^{\frac{1}{mn}}$

## □ 次序统计滤波器

- 中值滤波器  $\hat{f}(x, y) = \text{median} \{g(s, t)\}_{(s,t) \in S_{xy}}$

- 最大最小滤波器 
$$\begin{cases} \hat{f}(x, y) = \max_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} \\ \hat{f}(x, y) = \min_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} \end{cases}$$

- 中点滤波器  $\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2} \left[ \max_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} + \min_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} \right]$

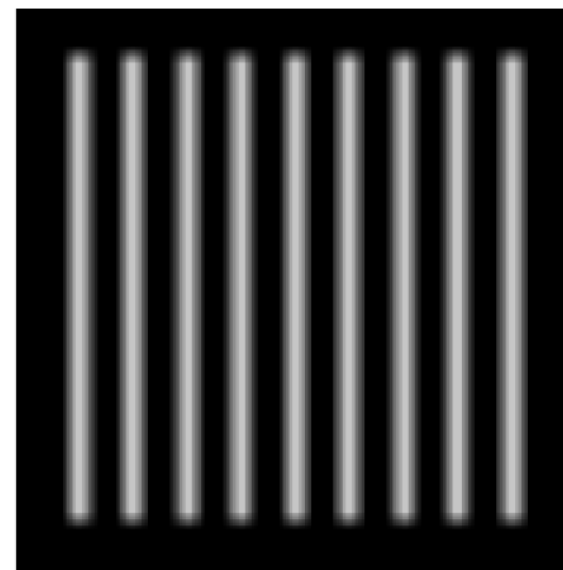
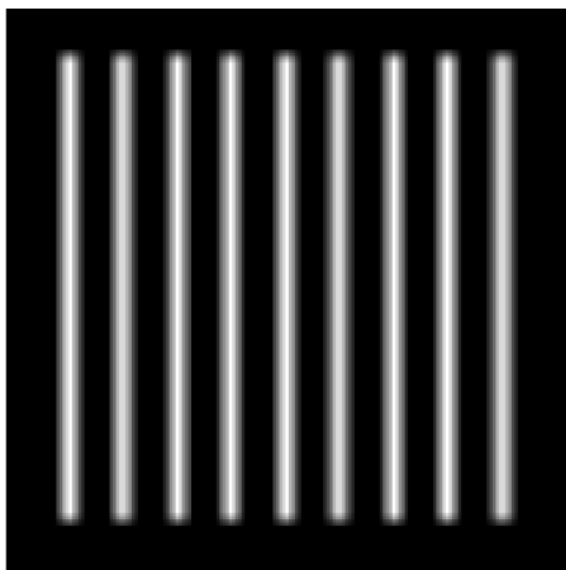
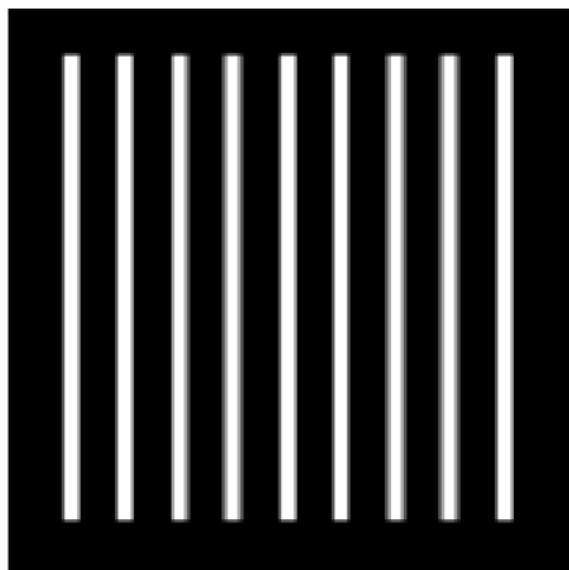
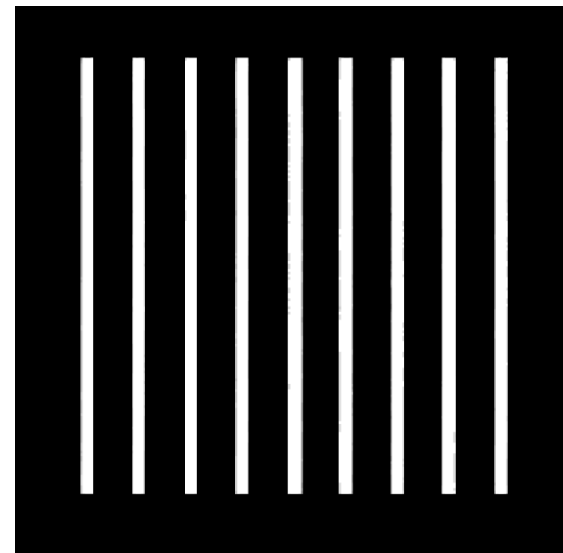
# 空间滤波 – 算术均值滤波器

## □ 测试图像：白色条带

- 7像素宽，210像素高，间距17像素

## □ 滤波

- $3 \times 3$  算术均值滤波器
  - ✓ e.g. 纯白(5px 宽, 208px高), 边缘渐变, 圆角
- $7 \times 7$  算术均值滤波器
- $9 \times 9$  算术均值滤波器



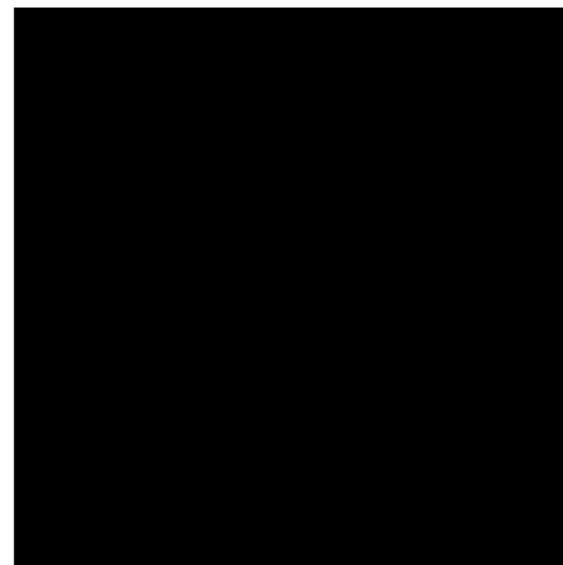
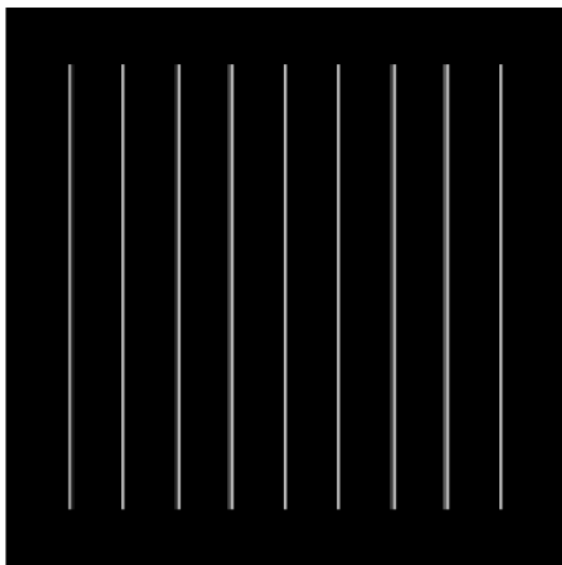
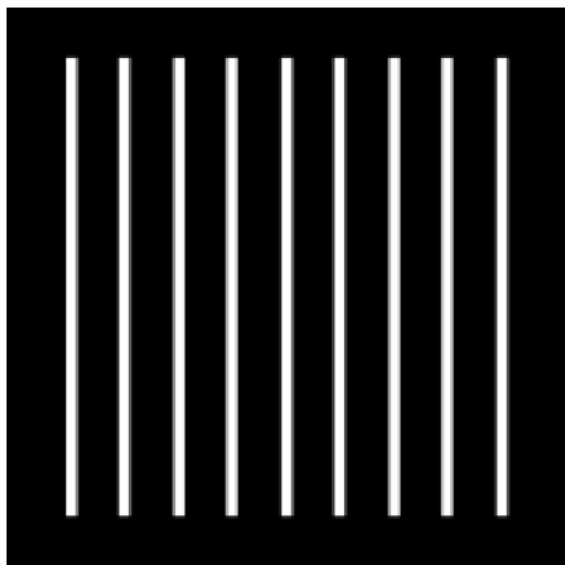
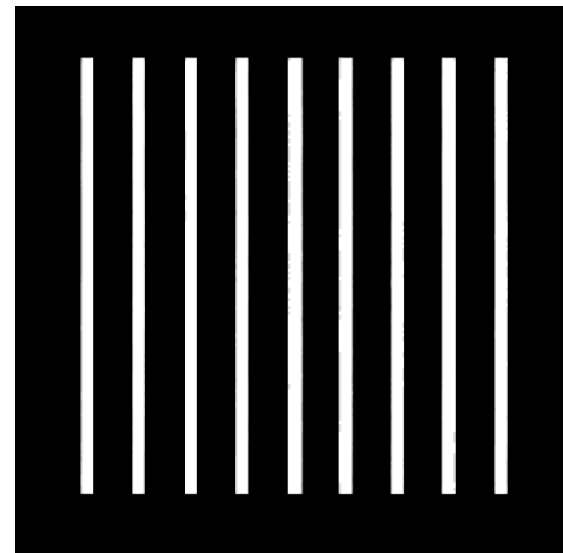
# 空间滤波 – 几何均值滤波器

## □ 测试图像：白色条带

- 7像素宽，210像素高，间距17像素

## □ 滤波

- $3 \times 3$  几何均值滤波器
  - ✓ e.g. 纯白(5px 宽, 208px高), 边缘突变, 直角
- $7 \times 7$  几何均值滤波器
- $9 \times 9$  几何均值滤波器



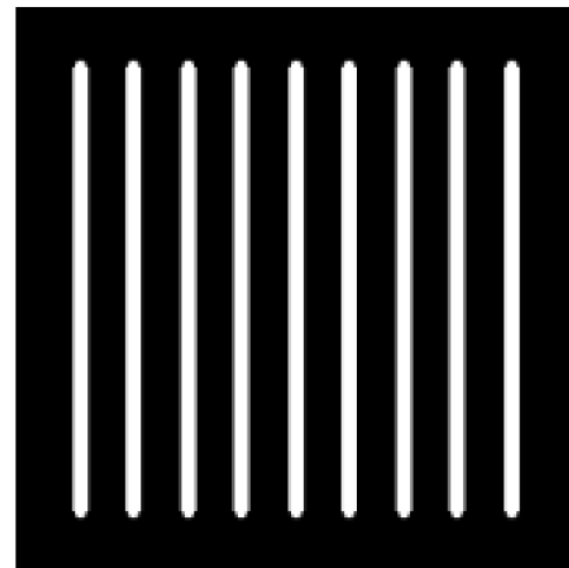
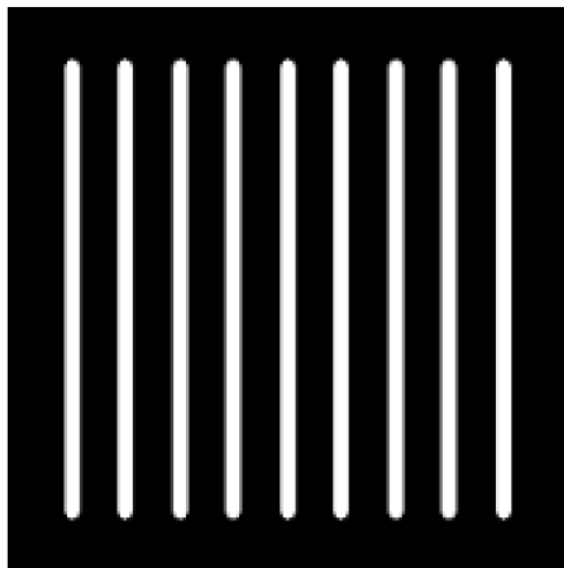
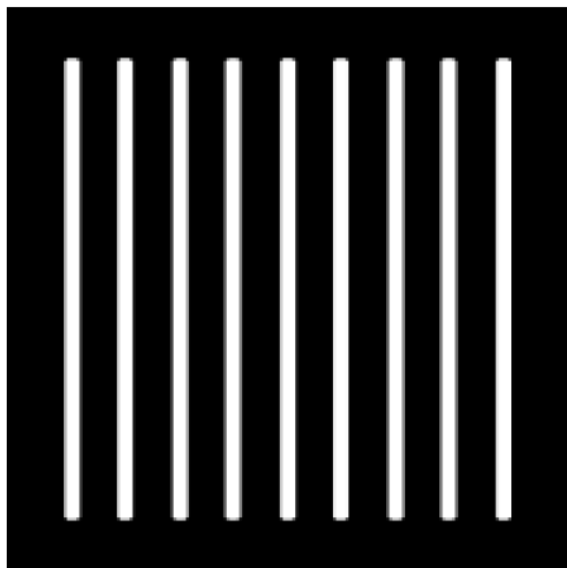
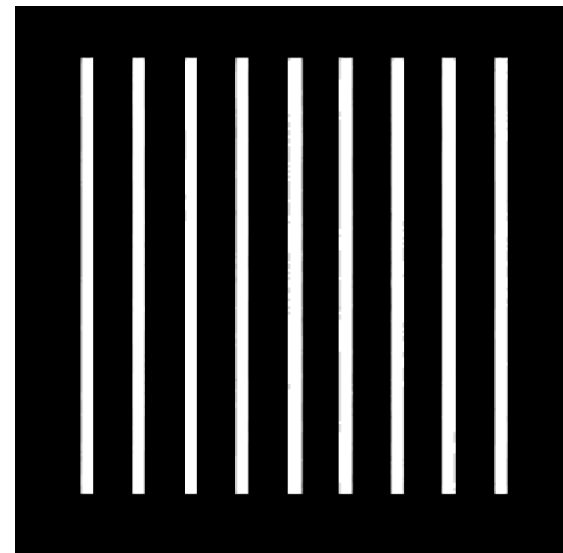
# 空间滤波 – 中值滤波器

## □ 测试图像：白色条带

- 7像素宽，210像素高，间距17像素

## □ 滤波

- $3 \times 3$  中值滤波器
  - ✓ e.g. 纯白(7px宽, 210px高), 边缘突变, 斜角
- $7 \times 7$  中值滤波器
- $9 \times 9$  中值滤波器



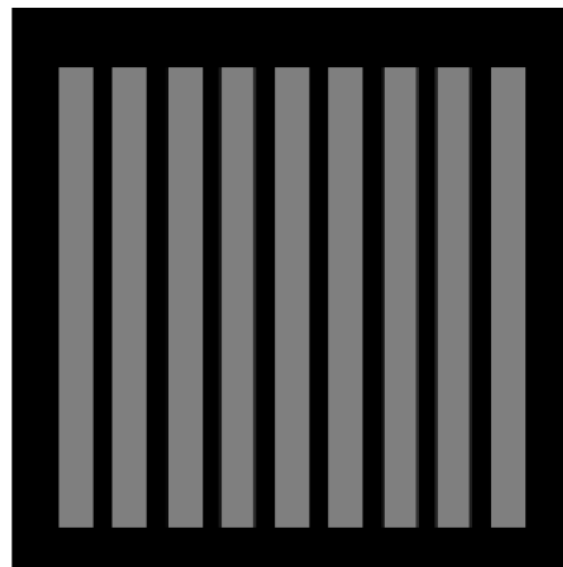
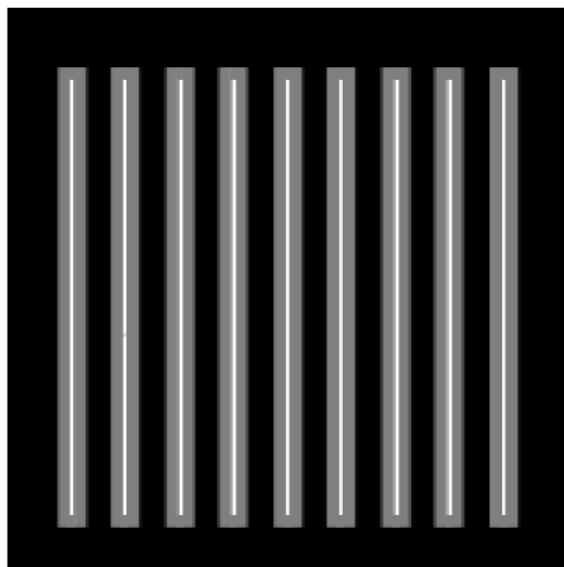
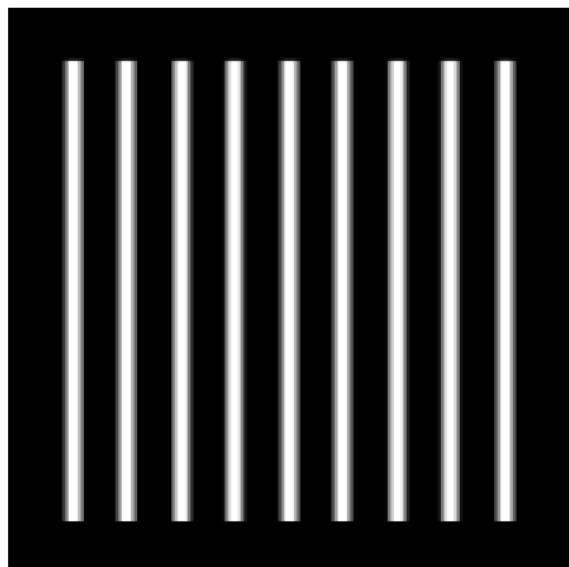
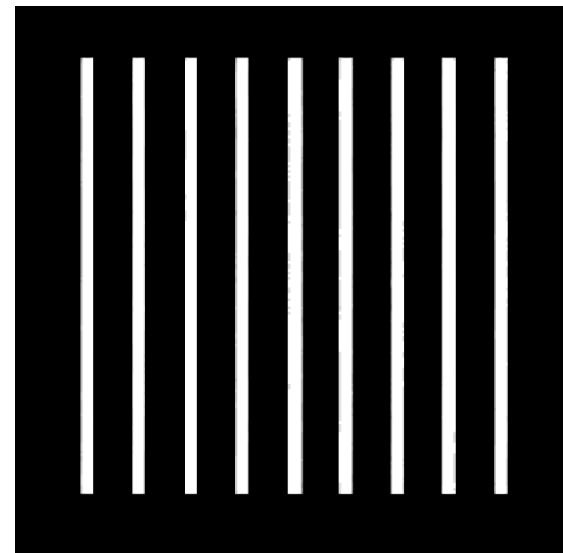
# 空间滤波 – 中点滤波器

## □ 测试图像：白色条带

- 7像素宽，210像素高，间距17像素

## □ 滤波

- $3 \times 3$  中点滤波器
  - ✓ e.g. 纯白(5px 宽, 208px高), 直角
- $7 \times 7$  中点滤波器
- $9 \times 9$  中点滤波器





# 频域滤波 – 退化函数估计

## □ 线性、位置不变的退化

### ■ 图像观察估计

- ✓ 寻找一个有很强信号内容的区域/子图（如高对比度区域），处理该子图像（锐化滤波器、手工方法/PS）以便得到尽可能不模糊的结果。
- ✓ 很麻烦，一般仅在特殊情况下使用，例如复原一幅有历史价值的老照片

### ■ 试验估计

- ✓ 使用与获得退化图像的设备相似的装置
- ✓ 概念：使用相同的系统对一个冲激（小亮点）成像，得到退化的冲激相应，线性空间不变系统完全由其冲激响应来表征

### ■ 数学建模估计

- ✓ 物理特性：大气湍流模型
- ✓ 基本原理：均匀线性运动模糊



# 频域滤波 – 逆滤波

- 最简单且粗糙的恢复方法
- 降质图像频谱直接除以降质函数：

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} \quad \hat{F}(u, v) = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

- 由于 $N(u, v)$ 未知，即使得到降质函数 $H(u, v)$ ，也难以精确重建
- $H(u, v)$ 在某些位置为0或者是非常小的值， $F(u, v)$ 被淹没
  - 解决方法：限制频谱范围





# 频域滤波 – 维纳滤波

- 确定未污染图像  $f$  的一个估计  $\hat{f}$ ，使得他们之间的均方误差最小

$$e^2 = E \{ (f - \hat{f})^2 \}$$

$$F(u, v) = \left[ \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v) / S_f(u, v)} \right] G(u, v)$$

$$F(u, v) = \left[ \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \right] G(u, v)$$

# 频域滤波

□ 如图所示的图像是心脏立体再现的一个模糊的二维投影。已知图像右侧底部十字线的每条线宽4像素、长20像素，且模糊前的灰度值为255。

■ 应该怎样修复图片？

1、测量背景黑色区域像素的平均值，将图像中的所有像素（除十字线区域外）设置为该平均亮度值。记该观测图像的傅里叶变换为 $G(u, v)$ 。

2、由于十字线的特征已经给出，可以重建一张同样位置含该十字线的图像，而背景区域的亮度与之前的估计值一致。记该重建图像的傅里叶变换为 $F(u, v)$ 。

3、得到  $H(u, v)$  的估计

4a、逆滤波得到重建图片

4b、维纳滤波，通过控制K值尽可能得到清晰的结果（通过傅里叶反变换实时观察改变K值时的滤波结果）。



（原图像由 GE 医学系统提供）



# 频域滤波

- 一位天文学家使用一台高倍望远镜观察到的图像有点模糊。
  - 望远镜镜头把图像聚焦到高分辨率 CCD 成像阵列上，然后望远镜使用电子学方法将图像转换为数字图像。
  - 由于望远镜部件的尺寸和重量太大，且精密度高，试图通过传导控制实验使用的镜头和成像传感器来改进这种情况是不现实的。
  - 该天文学家向你求助，希望能给出一些将图像变得清晰一些的数字图像处理方案。假设你能得到的图像仅仅是一些星体的图像，你会给出什么建议？
    - 1、尽可能寻找一颗明亮的、单独的星体，在该星体周围得到一幅只包含该星体的模糊的图片 (该星体希望尽可能得小以便尽可能用于模拟一个冲激)。
    - 2、通过对这幅图像做傅里叶变换即可得到退化函数  $H(u, v)$ 。
    - 3、使用维纳滤波器，并通过调整K值得到一幅尽可能清晰的星空图片。



# 频域滤波

## □ 考虑一个在接近着陆时从行星发送图像的空间探测器。

- 在着陆的最后阶段，一个控制推进器坏了，导致探测器沿其垂直轴旋转。在着陆期间的最后两秒钟发送的图像由于这种圆周运动而被模糊了。
- 摄像机位于探测器的底部中央，沿探测器的垂直轴并指向下方
- 幸运的是，探测器的转动也是沿着垂直轴的，因此图像是由均匀的旋转运动模糊的。在每幅图像的获取区间，探测器旋转  $\pi/12$  弧度。
- 假设图像获取期间的垂直运动可以忽略。请以公式形式给出复原图像的解决方案。
  - 1、数学建模估计：从直角坐标到极坐标（重建旋转运动模糊图像）
  - 2、匀速运动模糊只出现在  $\theta$  -axis 这一个维度上，运用之前的解决匀速运动模糊的方法即可解决该问题。
  - 3、将图像从极坐标转换回直角坐标即可得到最终的复原图像

### 公式形式

- 1、对原图的任意像素，在极坐标系中生成对应像素： $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$
- 2、旋转弧度已知： $\pi/12$ ，直接替换 Sec.5.6.3 中的  $x$  和  $y$  即可得到转移函数
- 3、Sec.5.7 – Sec.5.9 中的方法均可用于复原（逆滤波、维纳滤波、约束最小二乘方滤波）



# 频域滤波

## □ 某X射线成像几何产生了一种模糊退化

- 这种模糊退化可用空间圆对称函数与原本传感器得到图像的卷积来建模:

- ✓ 
$$h(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{\sigma^4} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}}$$

- 其频率域中的退化由如下表达式给出:

- ✓ 
$$H(u, v) = -8\pi^3 \sigma^2 (u^2 + v^2) e^{-2\pi^2 \sigma^2 (u^2 + v^2)}$$

- ✓ 可参考第四章中 Sec.4.9.4, 表4.3中性质13 以及 习题4.26结论 证明

- 假设噪声功率谱和未退化信号功率谱之比为常数, 试给出维纳滤波器的表达式?



# 频域滤波

$$F(u, v) = \left[ \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v) / S_f(u, v)} \right] G(u, v)$$
$$F(u, v) = \left[ \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \right] G(u, v)$$

$S_\eta(u, v) = |N(u, v)|^2 =$  噪声功率谱  
 $S_f(u, v) = |F(u, v)|^2 =$  未退化图像功率谱

维纳滤波器的表达式计算：

$$H_W(u, v) = \left[ \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \right]$$

where

$$\begin{aligned} |H(u, v)|^2 &= H^*(u, v)H(u, v) \\ &= H^2(u, v) \\ &= 64\pi^6 \sigma^4 (u^2 + v^2)^2 e^{-4\pi^2 \sigma^2 (u^2 + v^2)}. \end{aligned}$$

Then,

$$H_W(u, v) = - \left[ \frac{-8\pi^3 \sigma^2 (u^2 + v^2) e^{-2\pi^2 \sigma^2 (u^2 + v^2)}}{[64\pi^6 \sigma^4 (u^2 + v^2)^2 e^{-4\pi^2 \sigma^2 (u^2 + v^2)}] + K} \right].$$

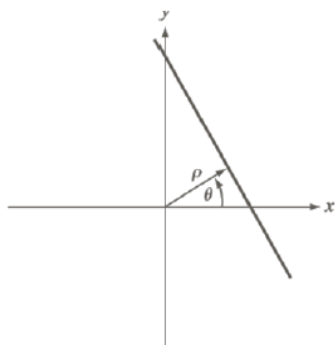
# 投影重建图像



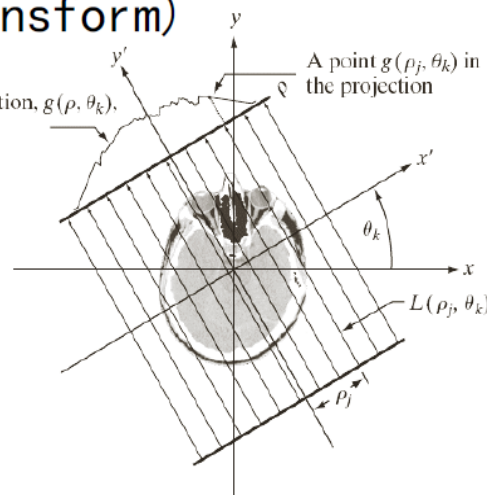
## 5.10 由投影重建图像

### 投影和雷登变换 (Radon Transform)

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \rho$$



Complete projection,  $g(\rho, \theta_k)$ , for a fixed angle



### 图像投影

将图像在某一方向上做线性积分（或理解为累加求和）

### 雷登变换

将数字图像矩阵在某一指定角度射线方向上做投影变换。

（可以理解为图像在空间的投影，空间上的每一点对应  $(x,y)$  空间中的一条直线。）

$$g(\rho_j, \theta_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k - \rho_j) dx dy$$

$$g(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) dx dy$$

$$g(\rho, \theta) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) dx dy$$



# 投影重建图像

## □ 雷登变换

$$g(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) dx dy$$

- (1) 证明单位冲激函数  $\delta(x, y)$  的雷登变换是  $\rho\theta$  平面中通过原点的一条垂直线。

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\{f(x, y)\} = g(\rho, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \times \delta(0 - \rho) dx dy \\ &= \begin{cases} 1 & \text{if } \rho = 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$





# 投影重建图像

## □ 雷登变换

$$g(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) dx dy$$

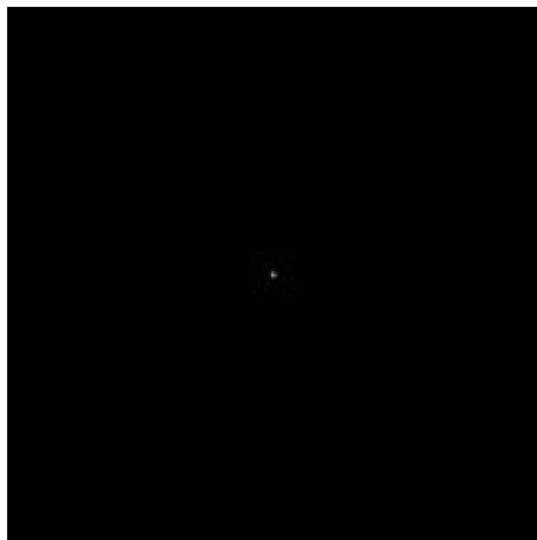
- (2) 证明冲激  $\delta(x - x_0, y - y_0)$  的雷登变换是  $\rho\theta$  平面中的一条正弦曲线

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\{f(x, y)\} = g(\rho, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0, y - y_0) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \times \delta(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - \rho) dx dy \\ &= \begin{cases} 1 & \text{if } \rho = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

# 投影重建图像

## □ 雷登变换

- 画出下列方形图像的雷登变换。在画出的图形中定量地标出所有的重要特性。
  - ✓ 图(a): 由中间的一个白点组成
  - ✓ 图(b): 沿对角线有两个点。



(a)



★(b)

# 投影重建图像

## □ 雷登变换

- 画出下列方形图像的雷登变换。在画出的图形中定量地标出所有的重要特性。
  - ✓ 图(a): 由中间的一个白点组成
  - ✓ 图(b): 沿对角线有两个点。
- 水平轴是  $\rho$  , 垂直轴是  $\theta$  , 底部是  $\theta = 0^\circ$  , 顶部是  $\theta = 180^\circ$ 
  - ✓ 图(a):  $\rho\theta$  平面中通过原点的一条垂直线。
  - ✓ 图(b): 顶点在  $\theta = 45^\circ$  处, 零点在  $\theta = 135^\circ$  处, 零点处的值是其它点处的2倍

