

# 无动力飞行弹丸的运动分析与模拟

叶 荻

(中国科学技术大学生命科学学院, 安徽 合肥 230027)

**摘要:** 本文在考虑空气阻力、科里奥利力, 并考虑重力加速度变化的条件下, 对无动力飞行弹丸的弹道轨迹进行了分析和模拟, 求解在给定精度要求下能够到达目标点的一组初始条件, 通过计算机模拟手段作出弹道轨迹的图像, 并对其精度进行了简要分析。

**关键词:** 弹道; 动力学分析; 计算机模拟

## Analysis and Simulation of the Motion of Unpowered Missile

Ye Di

(School of Life Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230027)

**Abstract:** In this paper, considering the air resistance, Coriolis force, and the variation of the gravitational acceleration, we analyzed and simulated the trajectory of an unpowered missile, found a set of initial conditions able to reach the goal under given requirements of accuracy, plotted a graph of the trajectory using computer simulation, and evaluated its accuracy simply.

**Key Words:** trajectory; dynamic analysis; computer simulation

## 1. 引言

不同于理想化的抛体运动模型, 弹丸在无动力飞行的实际过程中, 还受到空气阻力的作用。同时, 由于地球是一个转动参考系, 在分析弹丸的运动状态时须考虑科里奥利力和惯性离心力。另外, 随着弹丸飞行过程中所处的海拔高度不断变化, 重力加速度也是变化的。

这些因素使得弹丸的运动不是简单的斜抛运动, 从而使得在考虑空气阻力和地球自转的影响, 以及飞行过程中重力加速度变化的基础上分析无动力飞行弹丸的弹道轨迹是极有必要的。因此, 本文以自安徽省合肥市中国科学技术大学西校区 ( $31^{\circ}50'N, 117^{\circ}15'E$ )<sup>[1]</sup>发射, 目标为安徽省池州市 ( $30^{\circ}40'N, 117^{\circ}29'E$ )<sup>[1]</sup>的弹丸为例, 对以上问题展开分析, 并进行计算机模拟。

## 2. 物理模型的建构

### (1) 对地球的模型建构

虽然地球的实际形状呈赤道略鼓、两极略扁的椭球体, 但由于地球的扁率非常小, 考虑到本问题所研究的距离尺度, 仍可将地球视作均匀球体处理。

本文将地球模型建构为一半径为  $R = 6371.012\text{km}$ <sup>[2]</sup>, 自转周期为  $T = 23\text{h } 56\text{min } 4\text{s}$ <sup>[2]</sup>, 自转角速度为  $\omega = 7.292 \times 10^{-5}\text{rad/s}$ <sup>[3]</sup> 的均匀球体。

### (2) 对地球大气的模型建构

为便于分析, 在本问题中, 不考虑风及其他空气扰动对弹丸飞行过程的影响, 并以年平均状况代表大气状态参数。

对地球大气进行分层处理, 已知以海平面上的值为参照的空气相对密度  $\frac{\rho}{\rho_{SL}}$  与海拔高度

$H$  (单位: km) 的关系为

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \begin{cases} (1 - \frac{H}{44.3308})^{4.2559}, & 0 \leq H \leq 11.0191 \\ 1.5895 \times 10^{-1} e^{\frac{14.9647-H}{6.3416}}, & 11.0191 < H \leq 20.0631 \\ 3.2722 \times 10^{-2} \times \left(1 + \frac{H-24.9021}{221.552}\right)^{-35.1629}, & 20.0631 < H \leq 32.1619 \\ 3.2618 \times 10^{-3} \times \left(1 + \frac{H-39.7499}{89.4107}\right)^{-13.2001}, & 32.1619 < H \leq 47.3501^{[4]}, \\ 9.4920 \times 10^{-4} e^{\frac{48.6252-H}{7.9223}}, & 47.3501 < H \leq 51.4125 \\ 2.5280 \times 10^{-4} \times \left(1 - \frac{H-59.4390}{88.2218}\right)^{11.2011}, & 51.4125 < H \leq 71.8020 \\ 1.7632 \times 10^{-5} \times \left(1 - \frac{H-78.0303}{100.2950}\right)^{16.0816}, & 71.8020 < H \leq 86.0000 \\ 3.6411 \times 10^{-6} e^{\frac{87.2818-H}{5.4700}}, & 86.0000 < H \leq 91.0000 \end{cases}$$

其中标准情况下海平面上的空气密度  $\rho_{SL}$  为  $1.2255 \text{ kg/m}^3$ <sup>[5]</sup>。

### (3) 对弹丸的模型建构

不妨设弹丸飞行稳定性良好, 则在飞行中弹丸轴线和弹丸速度矢量之间只有很小的攻角  $\delta$ , 可以忽略不计, 再加上弹丸轴对称的假设, 把弹丸的质量集中到弹丸质心, 则弹丸的运动就可以简化为弹丸质心的运动<sup>[6]</sup>。

设弹丸的形状为流线型, 且飞行稳定性良好, 其质量为  $m = 1000 \text{ kg}$ , 特征面积为  $S = 0.5 \text{ m}^2$ , 阻力系数为  $C = 0.04$ 。

### (4) 对运动过程的模型建构

弹丸从安徽省合肥市中国科学技术大学西校区 ( $31^{\circ}50'N, 117^{\circ}15'E$ ) 发射, 目标点为安徽省池州市 ( $30^{\circ}40'N, 117^{\circ}29'E$ ), 发射点和目标点间的海拔高度差忽略不计。由于发射点和目标点的海拔高度较低, 相对于地球半径可忽略, 因而近似认为发射点和目标点均处于海平面上。忽略弹丸由静止获得初速度的时间, 设其发射时即具有初速度  $v_0$ 。设弹丸发射后无动力飞行, 在飞行中受重力、空气阻力和科里奥利力的作用。弹丸因地球自转受到的惯性离心力已考虑在重力加速度的变化内, 不再单独讨论。

## 3. 坐标系的选取

### (1) 地心坐标系

以地心为原点, 地心与赤道和本初子午线的交点连线为  $x'$  轴正方向, 地心与赤道和  $90^{\circ}$  E 经线的交点连线为  $y'$  轴正方向, 地心与北极点的连线为  $z'$  轴正方向, 建立空间直角坐标系。经计算, 在此坐标系中, 发射点的坐标为  $(-2.4783 \times 10^6, 4.8120 \times 10^6, 3.3604 \times 10^6)$ , 目标点的坐标为  $(-2.5290 \times 10^6, 4.8616 \times 10^6, 3.2495 \times 10^6)$  (单位: m)。

### (2) 发射点坐标系

以发射点为原点, 发射点处经线切线的正南方向为  $x$  轴正方向, 纬线切线的正东方向为  $y$  轴正方向, 沿地球径向向外为  $z$  轴正方向, 建立空间直角坐标系。对地心坐标系中的位置坐标进行变换可得, 在发射点坐标系中, 目标点的坐标为  $(129721, 22362.6, -1309.05)$  (单位: m)。

## 4. 对弹丸运动的动力学分析

以下分析均在发射点坐标系中进行。设弹丸的初速度大小为  $v_0$ , 发射仰角为  $\theta$ , 发射方位角 (与正南方向的夹角, 南偏东记为正, 南偏西记为负) 为  $\sigma$ , 弹丸在  $t$  时刻的位矢为  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 。

### (1) 重力 $\mathbf{G}$

弹丸在飞行过程中所受重力为  $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ , 方向始终竖直向下。在发射点坐标系中, 地心

的坐标为 $(0, 0, -R)$ ，由地心指向弹丸的矢量为 $\mathbf{s} = (x, y, z + R)$ 。记 $\mathbf{s}$ 的模为 $s$ ，则重力加速度 $\mathbf{g}$ 的大小为 $g = g_0 \left(\frac{R}{s}\right)^2$ 。由此， $\mathbf{G} = -mg_0 \frac{R^2}{s^3} \mathbf{s}$ 。

已知海平面上的重力加速度大小 $g_0$ （单位： $\text{m/s}^2$ ）与纬度 $\varphi$ （单位： $^\circ$ ）存在关系 $g_0 = 9.7803185(1 + 0.005278895\sin^2\varphi + 0.000023462\sin^4\varphi)^{[7]}$ 。经计算，安徽省合肥市中国科学技术大学西校区（ $31^\circ 50' \text{N}$ ,  $117^\circ 15' \text{E}$ ）处海平面上的重力加速度约为 $9.7947 \text{m/s}^2$ ，安徽省池州市（ $30^\circ 40' \text{N}$ ,  $117^\circ 29' \text{E}$ ）处海平面上的重力加速度约为 $9.7938 \text{m/s}^2$ 。由此可见，海平面上重力加速度随纬度的变化很小，可以忽略弹丸经过的不同经纬点处海平面上重力加速度的变化，取为发射点和目标点海平面上重力加速度的平均值，即 $g_0 = 9.7942 \text{m/s}^2$ 。

### (2) 空气阻力 $\mathbf{f}$

记空气阻力 $\mathbf{f}$ 的大小为 $f$ ，其一般表达式为 $f = \frac{1}{2}C\rho v^2 S^{[8]}$ ，式中 $v$ 是弹丸相对于大气的速度大小， $\rho$ 是大气密度， $S$ 是弹丸的特征面积， $C$ 是阻力系数。则由上式和模型假设可知，弹丸所受空气阻力为 $\mathbf{f} = -\frac{1}{2}C\rho S v \dot{\mathbf{r}}$ ，其中 $\dot{\mathbf{r}}$ 表示弹丸的速度。

### (3) 科里奥利力 $\mathbf{F}_{cor}$

记地球自转角速度矢量为 $\boldsymbol{\omega}$ ，沿地轴指向北极点方向。弹丸所受的科里奥利力为 $\mathbf{F}_{cor} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$ ，其中 $\boldsymbol{\omega} = (-\omega \cos \varphi, 0, \omega \sin \varphi)$ ， $\varphi$ 是发射点的纬度。

### (4) 微分方程组

由牛顿第二定律，弹丸的运动满足方程 $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{G} + \mathbf{f} + \mathbf{F}_{cor}$ 。将方程中的力和加速度分解到各坐标轴方向，得到微分方程组

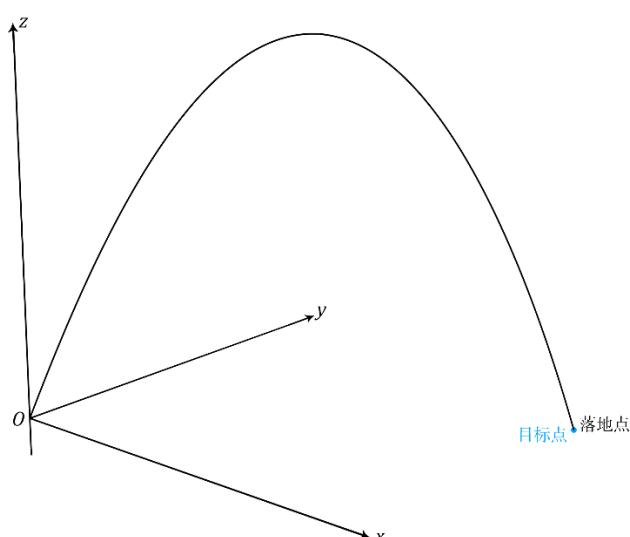
$$\begin{cases} m\ddot{x} = G_x + f_x + F_{cor_x} \\ m\ddot{y} = G_y + f_y + F_{cor_y} \\ m\ddot{z} = G_z + f_z + F_{cor_z} \end{cases}$$

由以上方程组以及一组初始条件 $x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0 \cos \theta \cos \sigma, \dot{y}(0) = v_0 \cos \theta \sin \sigma, \dot{z}(0) = v_0 \sin \theta$ ，可以求解弹丸发射后的运动状态。

## 5. 对弹丸运动的计算机模拟

由于对弹丸飞行的模拟是建立在初始条件已知的基础上的，因此首先选取一个初速度 $v_0 = 1500 \text{m/s}$ ，不断地将发射时的仰角和方位角改变一个微小量进行模拟，观察弹丸能否落在以目标点为中心、半径为 $25 \text{m}$ 的圆内，从而求出一组满足条件的瞄准角，再以所求的瞄准角作为初始条件，通过计算机模拟得到弹丸的弹道轨迹。模拟所用程序见本文附件中“HFLC.c”。

用以上方法求得一组瞄准角，仰角为 $\theta = 28.998470^\circ$ ，方位角为 $\sigma = 10.129762^\circ$ 。经过 $129.6542 \text{s}$ 后，弹丸落地，落地点与目标点的距离仅为 $0.031114 \text{m}$ ，符合本问题拟完成的目标。令程序在模拟过程中每间隔相同的极短时间输出弹丸所在位置的坐标，据此作图得到弹丸的弹道轨迹如右图所示。



## 6. 对模拟弹道的精度分析

考虑到弹丸发射的瞄准角难以精确控制，现以计算机模拟求得的瞄准角为基准，按一定梯度改变瞄准角，观察弹丸落地点与目标点之间距离的变化，从而分析此模型的精度。使用计算机模拟程序，每次只改变仰角或只改变方位角，得到以下数据：

仰角/°	方位角/°	落地点与目标点间的距离/m	仰角/°	方位角/°	落地点与目标点间的距离/m
28.992470	10.129762	25.022158	28.998470	10.117762	27.575102
28.993470		20.820273		10.119762	22.979468
28.994470		16.618458		10.121762	18.383341
28.995470		12.496299		10.123762	13.787394
28.996470		8.294635		10.125762	9.191590
28.997470		4.093233		10.127762	4.596067
28.998470		0.031114		10.129762	0.031114
28.999470		4.230521		10.131762	4.597090
29.000470		8.431925		10.133762	9.192093
29.001470		12.553464		10.135762	13.788432
29.002470		16.754743		10.137762	18.384816
29.003470		20.955914		10.139762	22.980146
29.004470		25.077307		10.141762	27.576478

由此不难看出，弹丸的飞行轨迹对初始条件非常敏感，仰角和方位角的微小偏离就可以使弹丸落地点与目标点间的距离产生较大的变化，甚至超出设定的精度要求。以上分析说明无动力飞行的弹丸在发射时需要相当精确的控制才能到达目标，而如此高精度的控制在实际的发射过程中是极难实现的，这很可能是无动力炮弹被当代部队淘汰的重要原因。

## 7. 结语

本文在考虑空气阻力、科里奥利力，并考虑重力加速度随海拔高度变化的基础上，将地面视作球面，对无动力飞行弹丸的运动进行了动力学分析，并通过计算机模拟的方法近似地作出了弹丸的弹道轨迹。与理想化的斜抛运动模型相比，本文所得的结果更加接近于弹丸的实际运动，其与斜抛运动所得结果的差异反映了当对实际问题构建模型时，所选择的物理模型与问题所涉及的时空尺度关系密切。在处理影响所研究问题的某个因素时，须考虑在此问题所涉及的时空尺度下，该因素能否仍按常规方法处理，即在应用某一方法时，务必注意该方法的外延。这一点对今后的学习和研究具有深刻的意义。

然而，本文忽略了风及其他空气扰动对弹丸飞行的影响，忽略了发射点和目标点的具体海拔高度及高度差，忽略了重力加速度随纬度的变化，忽略了大气温度、湿度等对空气密度的影响，忽略了地球的扁率，并将弹丸按照质点模型分析，没有考虑弹丸所受各力是否经过弹丸的质心（例如，攻角 $\delta$ 的存在意味着弹丸的轴线与速度方向并非共线的，使气流对弹丸的作用不呈轴对称分布，导致空气阻力作用线不经过弹丸的质心<sup>[6]</sup>）。而且，本文使用计算机模拟的方法求牛顿微分方程组的数值解和作弹道轨迹图，其精度也是有限的，增大了本文结果的误差。以上因素造成本文对弹丸弹道轨迹的模拟仍是粗略的，这也是应用构建物理模型的方法解决实际问题时经常发生的情况。若要更加精确地模拟弹丸的弹道轨迹，一方面需要改进物理模型，另一方面需要寻找提高计算机模拟精度的方法。因此，无动力飞行弹丸的外弹道问题仍有待进一步研究。

## 参考文献

- [1] 全国地理信息资源目录服务系统.
- [2] 汪新文. 地球科学概论[M]. 北京: 地质出版社, 1999.
- [3] [苏] A. A. 德米特里耶夫斯基. 外弹道学[M]. 孟宪昌译. 北京: 国防工业出版社, 1977.
- [4] 胡小平, 吴美平, 王海丽. 导弹飞行力学基础[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2006.
- [5] 钱学森. 星际航行概论[M]. 北京: 科学出版社, 1963.
- [6] 钱林方. 火炮弹道学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2009.
- [7] 中国大百科全书总编辑委员会《力学》编辑委员会, 中国大百科全书出版社编辑部. 中国大百科全书[M]. 力学. 北京, 上海: 中国大百科全书出版社, 1985.
- [8] 王宏力, 单斌, 杨波, 郭志斌, 王新国. 导弹应用力学基础[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2015.