数学分析 A2 单元测试（一）

2016 年 4 月 22 日

1. 计算题:（每小题 10 分，共 40 分）

   (a) 把 $\dfrac{\cos x}{\cos y}$ 在点 $(0,0)$ 处 Taylor 展开到二阶。

   (b) 设 $u=f(x,y,z)$, $\varphi(x^2,e^y,z)=0$, $y=\sin x$, 其中 f,φ 都具有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\neq 0$, 求 $\dfrac{du}{dx}$.

   (c) 设 $\mathbf{f}(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$, 计算 $J\mathbf{f}^{-1}$.

   (d) 求出函数 $f(x,y)=x^2-3x^2y+y^3$ 的所有驻点，并判断是不是极值点。

2. 设 A 和 B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的子集。证明：$(A\cup B)'=A'\cup B'$. (10 分)

3. 设
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$$
定义了 $\mathbb{R}^3$ 中的一条隐式曲线。利用隐函数定理计算曲线在点 $\mathbf{P}_0=(2,1,2)$ 处的切线方程和曲率。(15 分)

4. 求椭圆 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2/9=0 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases}$ 的半轴的长度。(15 分)

5. 设 a,b,c 是非零常数，$f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上可微。求证：存在 $\mathbb{R}$ 上一元可微函数 $g(u)$ 使得 $f(x,y,z)=g(ax+by+cz)$ 的充要条件是 (10 分)
$$b\frac{\partial f}{\partial x}=a\frac{\partial f}{\partial y},\quad c\frac{\partial f}{\partial y}=b\frac{\partial f}{\partial z},\quad a\frac{\partial f}{\partial z}=c\frac{\partial f}{\partial x}.$$

6. 设 $f(x,y)$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上连续，关于 y 单调增加。
$$\lim_{y\to d^-} f(x,y)=f(x,d) \tag{1}$$
对任意 $x\in[a,b]$ 成立。证明：(10 分)

   (a) 对于任意 $\varepsilon>0$, 任意 $x_0\in[a,b]$, 存在 $\delta_1>0$, $\delta_2>0$, 当 $x\in[a,b]$, $|x-x_0|<\delta_1$, $0<d-y<\delta_2$, 就有
$$|f(x,d)-f(x,y)|<\varepsilon.$$

   (b) 式 (1) 中的极限收敛关于 $x\in[a,b]$ 是一致的，即对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<d-y<\delta$ 时，对所有的 $x\in[a,b]$, 都有
$$|f(x,y)-f(x,d)|<\varepsilon.$$