中国科学技术大学

2022 年春季 量子力学 C 习题集

说明

- 采用 Dirac (1958) 书中的写法, 以 [ ] 表示 Poisson 括号, 那么对易关系

$$uv - vu = i\hbar\,[u, v]\,.$$

1. (Chen, 1982, p.220) 求下列矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

的本征值和归一化本征矢量. 这些本征矢量正交吗? 试加以评论.

2. (Constantinescu 等, 1983, 1.1) 试推导 Schwarz 不等式

$$|\langle u|v\rangle| \le \sqrt{\langle u|u\rangle}\sqrt{\langle v|v\rangle},$$

其中 $|u\rangle$ 和 $|v\rangle$ 是 Hilbert 空间 H 中的任意两个矢量.

3. (Constantinescu 等, 1983, 1.2) 试推导三角不等式

$$\sqrt{\langle u+v|u+v\rangle} \le \sqrt{\langle u|u\rangle} + \sqrt{\langle v|v\rangle}.$$

4. (Constantinescu 等, 1983, 1.3) 求证, 正交归一化矢量系 $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$, $\cdot$, $|u_\nu\rangle$, $\cdots$ 为完备系的必要充分条件是: 对任意两个矢量 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$, 关系式

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \sum_\nu \langle\alpha|u_\nu\rangle\,\langle u_\nu|\beta\rangle$$

成立.

5. (Constantinescu 等, 1983, 1.4) 设 S_1 是 Hilbert 空间 H 的一个子空间, S_2 是它的正交补空间. 任一矢量 $|u\rangle$ 可以写成它在两个子空间的投影之和, $|u\rangle = |u_{S_1}\rangle + |u_{S_2}\rangle$. 求证, 满足 $|u_{S_1}\rangle = P_{S_1}|u\rangle$ 的投影算符 P_{S_1} 是Hermite算符, 且满足方程 $P_{S_1}^2 = P_{S_1}$.

6. (Constantinescu 等, 1983, 1.5) 求证, 如果前一问题的子空间 S_1 取为单个的归一化矢量 $|a\rangle$ 张成的子空间, 则相应的投影算符由下式给出,

$$P_a = |a\rangle\,\langle a|\,.$$

7. (Constantinescu 等, 1983, 1.6) 求证, 如果 $|nr\rangle$ 表示一可观察量的本征矢, 则下列封闭关系成立:

$$\sum_{n,r} |nr\rangle \langle nr| = 1.$$

8. (Constantinescu 等, 1983, 1.7) 如果子空间 N 包含在 M 里, 则称投影算符 P_M 大于或等于另一个投影算符 P_N, 即 $P_M \geq P_N$, 求证:
   i. 关系式 $P_M \geq P_N$ 满足任何不等式所要求的公理.
   ii. $[P_M, P_N] = 0$.
   iii. 关系式 $P_M \geq P_N$ 等于说对 Hilbert 空间的任一矢量 $|u\rangle$, $\langle u|P_M|\rangle \geq \langle u|P_N|u\rangle$.

9. (Constantinescu 等, 1983, 1.8) 考虑矢量系 $|\nu\rangle$, 其中 ν 是连续角标, 可以取间隔 (ν_1, ν_2) 内的所有值. 求证, 如果矢量 $|\nu\rangle$ 在下述意义上是正交归一化的, 即 $\langle \nu'|\nu\rangle = \delta(\nu' - \nu)$, 则算符

$$P = \int_{\nu_1}^{\nu_2} |\nu\rangle \, d\nu \, \langle \nu|$$

   是投向由矢量系 $|\nu\rangle$ 张成的子空间的投影算符.

10. (Constantinescu 等, 1983, 1.9) 求证, 如果幺正算符 U 可写成 $U = 1 + i\epsilon F$ 的形式, 式中 ϵ 是一个无穷小的实数, 则算符 F 是 Hermite 算符.

11. (Constantinescu 等, 1983, 1.10) Hermite 算符 A 称为正定算符, 如果对任何矢量 $|u\rangle$, 有 $\langle u|A|u\rangle \geq 0$. 求证, 算符 $A = |a\rangle\langle a|$ 是 Hermite 正定算符.

12. (Constantinescu 等, 1983, 1.11) 如果 A 是一 Hermite 正定算符, 则

$$|\langle u|A|v\rangle| \leq \sqrt{\langle u|A|u\rangle}\sqrt{\langle v|A|v\rangle}.$$

   求证, $\mathrm{Tr}(A) \geq 0$, 而等号当且仅当 $A = 0$ 时成立.

13. (Constantinescu 等, 1983, 1.12) 求证, 由关系式

$$F = \int\int |s\rangle \, k(s,t) \, \langle t| \, dtds$$

   定义的算符 F 是线性 Hermite 算符, 其中核 $k(s,t)$ 是实函数.

14. (Constantinescu 等, 1983, 1.13) 求证, 微分算符

$$p = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$$

   在所有可微波函数 [比如说, $\langle x|\phi\rangle = \phi(x)$] 的空间中是线性 Hermite 算符. 这些可微波函数在间隔 (a, b) 的两端点都为零.

15. (Constantinescu 等, 1983, 1.14) 平移算符 $\Omega(a)$ 是如下定义的,

$$\Omega(a)\phi(x) = \phi(x+a).$$

求证,

i. $\Omega(a)$ 可以通过算符 $p = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ 表示.
ii. $\Omega(a)$ 是幺正算符.

16. (Constantinescu 等, 1983, 1.15) 给出 3 个算符 A, B 和 C, 试用对易关系 $[A, C]$ 和 $[B, C]$ 表示对易关系 $[AB, C]$.

17. (Constantinescu 等, 1983, 1.16) 设 $H(r)$ 是一个作用于波函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 上的算符, 而 O 是一坐标变换算符, 它作用在波函数上, 使 $O\psi(\boldsymbol{r}) = \psi(\boldsymbol{r}')$. 求证, 在坐标变换 O 下如果 $H(r)$ 是不变的, 即 $H(\boldsymbol{r}') = H(\boldsymbol{r})$, 则 $[H, O] = 0$.

18. (Constantinescu 等, 1983, 1.17) 设算符 A 的逆算符 A^{-1} 存在, 试将算符 $(A - \lambda B)^{-1}$ 展开成 λ 的幂级数.

19. (Constantinescu 等, 1983, 1.18) 求证, 如果 A 和 B 是两个满足关系式 $[[A, B], A] = 0$ 的算符, 则对于所有的正整数 m, 关系式 $[A^m, B] = mA^{m-1}[A, B]$ 成立.

20. (Constantinescu 等, 1983, 1.19) 求证

$$\begin{aligned}
[p, x] &= -1, \\
[p, x^n] &= -nx^{n-1}, \quad n > 1, \\
[p, A] &= -\frac{dA}{dx},
\end{aligned}$$

式中 $p = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$, 而 $A = A(x)$ 是 x 的可微函数.

21. (Constantinescu 等, 1983, 1.20) 如果给出可观察量 A 的特征方程 $f(\lambda) = 0$, 求证 $f(A) = 0$.

22. (Constantinescu 等, 1983, 1.21) 设 $|u\rangle$ 和 $|v\rangle$ 是两个具有有限模方的矢量, 求证,

$$\mathrm{Tr}\left(|u\rangle\langle v|\right) = \langle v|u\rangle.$$

23. (Constantinescu 等, 1983, 1.22) 如果 A 是任一线性算符, 求证 $\bar{A}A$ 是正定的 Hermite 算符, 它的迹等于 A 在任何表象中的矩阵元的模方之和. 试推导, 当且仅当 $A = 0$ 时, $\mathrm{Tr}(\bar{A}A) = 0$ 才成立.

24. (Constantinescu 等, 1983, 1.23) 求证, 如果 A 和 B 是两个正定的可观察量, 则 $\mathrm{Tr}(AB) \geq 0$.

25. (Constantinescu 等, 1983, 1.24) 试将 Hermite 矩阵

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Tr}(\rho) = 1.$$

对角化, 方法是利用形式为

$$U = e^{\frac{1}{2}i\phi\sigma_2} e^{\frac{1}{2}i\psi\sigma_3}$$

的幺正矩阵, 式中

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

26. (Constantinescu 等, 1983, 1.25) 明显依赖于参量 λ 的算符 $A(\lambda)$ 的导数定义为

$$\frac{dA(\lambda)}{d\lambda} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{A(\lambda+\epsilon) - A(\lambda)}{\epsilon}.$$

求证,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(AB) =& \frac{dA}{d\lambda}B + A\frac{dB}{d\lambda}, \\ \frac{d}{d\lambda}(A^{-1}) =& -A^{-1}\frac{dA}{d\lambda}A^{-1}. \end{aligned}$$

27. (Constantinescu 等, 1983, 1.26) 求证, 由表达式

$$B(t) = e^{iAt} B_0 e^{-iAt}$$

所定义的算符 $B(t)$, 是积分方程

$$B(t) = B_0 + i\left[A, \int_0^t B(\tau) d\tau\right]$$

的解, 式中 A 和 B_0 是与参量 t 无关的算符.

28. (Constantinescu 等, 1983, 1.27) 求证, 对任何两个算符 A 和 L,

$$e^L A e^{-L} = A + i\hbar\,[L, A] + \frac{1}{2!}(i\hbar)^2\,[L,[L,A]] + \frac{1}{3!}(i\hbar)^3\,[L,[L,[L,A]]] + \cdots.$$

29. (Constantinescu 等, 1983, 1.28) 求证, 如果 $[[A,B],A]\,[[A,B],B]=0$, 则

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2} i\hbar [A,B]}$$

30. (Constantinescu 等, 1983, 1.29) 求证久保恒等式

$$\left[A, e^{-\beta H}\right] = e^{-\beta H} \int_0^\beta e^{\lambda H} \left[A, H\right] e^{-\lambda H} d\lambda,$$

式中 A 和 H 是任何两个算符.

31. (Constantinescu 等, 1983, 1.30) 求证, 两个线性算符A和B相等(可以相差一个相因子), 即$A=Be^{i\alpha}$的必要和充分条件是

$$\left|\langle u \left|A\right| v\rangle\right| = \left|\langle u \left|B\right| v\rangle\right|$$

对于任一对线性无关的右矢$|u\rangle$和$|v\rangle$都能成立.

32. (Constantinescu 等, 1983, 1.31) 求证, 线性算符 U 为幺正算符的必要和充分条件是在给定的表象中, 这个算符的矩阵元 $\langle i|U|k\rangle$ 必须满足下列方程,

$$\sum_i \left|\langle i|U|k\rangle\right|^2 = 1,$$

$$\sum_i \langle i|U|h\rangle\, \overline{\langle i|U|k\rangle} = 0, \quad h \neq k.$$

假设求和是收敛的.

33. (Constantinescu 等, 1983, 3.2) 设 u 和 v 是两个可观测量算符, 记 u 的测量平均值为 $\langle u\rangle$, 定义下列均方偏差

$$\Delta u = \sqrt{\langle u^2\rangle - \langle u\rangle^2}$$

$$\Delta v = \sqrt{\langle v^2\rangle - \langle v\rangle^2}$$

则成立不确定性关系

$$\Delta u \Delta v \geq \frac{1}{2}\hbar \left|\langle w\rangle\right|,$$

其中

$$w = -\frac{i}{\hbar}(uv - vu).$$

34. 对线性算符 α, β, γ, 证明,

$$\overline{\alpha\beta\gamma} = \overline{\gamma}\,\overline{\beta}\,\overline{\alpha}$$

35. 证明,

$$\overline{|A\rangle\langle B|} = |B\rangle\langle A|$$

36. 如果 ξ 是实线性算符, 而且对某一特定的右矢 $|P\rangle$ 有

$$\xi^m|P\rangle = 0,$$

式中 m 是正整数, 证明

$$\xi|P\rangle = 0.$$

37. 考虑一个实线性算符 σ, 它满足方程

$$\sigma^2 = 1,$$

那么, σ 有两个本征值 $+1$ 与 -1. 证明任意的右矢 $|P\rangle$ 能被表示为

$$|P\rangle = \frac{1}{2}(1+\sigma)|P\rangle + \frac{1}{2}(1-\sigma)|P\rangle.$$

并验证, 上式右边的两项都是 σ 的本征右矢, 分别属于本征值 $+1$ 与 -1, 只要它们不为零.

38. 对算符 α 和 β, 设 α 存在逆算符 α^{-1}, c 是一个数, 且是一个小量, 证明

$$(\alpha - c\beta)^{-1} = \alpha^{-1} + c\alpha^{-1}\beta\alpha^{-1} + c^2\alpha^{-1}\beta\alpha^{-1}\beta\alpha^{-1} + \cdots$$

39. 函数 $\delta(x)$ 由一个参量 x 决定, 并满足下列条件:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = 1, & \\ \delta(x) = 0, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

证明下列方程

$$\delta(-x) = \delta(x),$$

$$x\delta(x) = 0,$$
$$\delta(ax) = a^{-1}\delta(x), \qquad (a > 0),$$
$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2}a^{-1}\{\delta(x-a) + \delta(x+a)\}, \qquad (a > 0),$$
$$\int \delta(a-x)dx\delta(x-b) = \delta(a-b),$$
$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a).$$

40. 可观察量算符 α, β 的本征值分别为 a_n, b_n, 在任一态 $|P\rangle$ 中, 先测得 α 的值 a_n, 再测 β 值 b_n 的概率为 $P(a_n, b_n)$; 而先测 β 值为 b_n, 再测 α 值 a_n 的概率为 $P(b_n, a_n)$. 问: $P(a_n, b_n) = P(b_n, a_n)$ 的条件是什么?
41. 一个可观察量 α 有两个本征本征值 α_1' 和 α_2', 对应的本征右矢分别是 $|\alpha_1'\rangle$ 和 $|\alpha_2'\rangle$. 而可观察量 β 有两个本征右矢 $|\beta_1'\rangle$ 和 $|\beta_2'\rangle$, 两种本征态有如下关系
$$|\alpha_1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}}\{2|\beta_1'\rangle + 3|\beta_2'\rangle\}, \quad |\alpha_2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}}\{3|\beta_1'\rangle - 2|\beta_2'\rangle\}$$
当测量 α 后得到 α_1', 若再测量 β, 以后再测量 α, 证明第二次得到 α_1' 的概率是 $\frac{97}{169}$.
42. 证明以下定理
    i. 与可观察量ξ对易的线性算符, 必定也与ξ的任意函数对易.
    ii. 线性算符如果与对易可观察量完全集之中的每一个可观察量相对易, 则它是这些可观察量的函数.
    iii. 如有一可观察量ξ及一线性算符g, 如果与ξ对易的任意线性算符也与g对易, 那么, g就是ξ的函数.
43. 对于 4 阶排列, 共有多少个类? 列出每个类的所有元素.
44. 设 $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2$, 在 $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$ 态下, 对称态与反对称态
$$(|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \pm |j_2, m_2, j_1, m_1\rangle),$$
计算 $|\boldsymbol{j}|^2$ 和 $m_z = m_{1z} + m_{2z}$ 作用于上述态的结果.
45. (修改自 Goldstein et al., 2005, 7.28) 描述二维晶体的模型中, 采用直角坐标系统, 其基矢量为 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$, 而该晶体的晶格矢量为 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, 即可以用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 取代 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$, 作为新的基矢量, 来表示晶体的物理参量. 试确定这两个晶格矢量的对偶矢量.
46. (马涛 等, 1986, p.2, 1-1) 设ψ_1, ψ_2为体系的两个可能实现的状态, 现做如下三种线性叠加
    i. $\psi_A = \psi_1 + e^{i\delta}\psi_2$,

ii. $\psi_B = e^{i\delta}(\psi_1 + \psi_2)$,

iii. $\psi_C = \psi_1 + \psi_2$.

δ为实的常数. 试问ψ_A, ψ_B和ψ_C是否表示相同的态?

47. (马涛 等, 1986, p.2, 1-12) 设ψ_1和ψ_2是某一系统的两个波函数, C_1和C_2是常数. 现在构成以下的函数

i. $\psi_a = C_1\psi_1 + C_2\psi_2^2$,

ii. $\psi_b = C_1^2\psi_1 + C_2\psi_2$,

iii. $\psi_c = e^{C_1\psi_1 + C_2\psi_2}$.

这些函数是不是该系统的波函数? 为什么?

48. (潘必才, 2014, Ex.3-6) 证明任何一个 Hermite 矩阵都能被一个幺正矩阵对角化.

49. (曾谨言, 1998, Ex 2.1) 设质量为 m 的粒子在势场 $V(\boldsymbol{r})$ 中运动.

i. 证明粒子的能量平均值为 $E = \int w d^3 r$,

$$w = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + \psi^* V \psi \quad \text{(能量密度)};$$

ii. 证明能量守恒公式

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{s} = 0, \quad \boldsymbol{s} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\nabla\psi + \frac{\partial \psi}{\partial t}\nabla\psi^*\right) \quad \text{(能量密度)}.$$

50. (曾谨言, 1998, Ex 2.2) 考虑单粒子的 Schrödinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\boldsymbol{r}, t) + \{V_1(\boldsymbol{r} + iV_2(\boldsymbol{r})\}\,\psi(\boldsymbol{r}, t),$$

V_1 与 V_2 为实函数.

i. 证明粒子的几率 (粒子数) 不守恒.

ii. 证明粒子在空间体积 τ 内的几率随时间的变化为

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \psi^*\psi d^3 r = -\frac{\hbar}{2im}\oint_S (\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \cdot d\boldsymbol{s} + \frac{2}{\hbar}\int_\tau V_2(\boldsymbol{r})\psi^*\psi d^3 r.$$

51. (曾谨言, 1998, Ex 2.3) 设 ψ_1 和 ψ_2 是 Schrödinger 方程的两个解, 证明

$$\frac{d}{dt}\int \psi_1^*(\boldsymbol{r},t)\psi_2(\boldsymbol{r},t)d^3r = 0.$$

52. (曾谨言, 1998, Ex 2.4) 设一维自由粒子的初态 $\psi(x,0) = e^{ip_0x/\hbar}$, 求 $\psi(x,t)$.

53. (曾谨言, 1998, Ex 2.5) 设一维自由粒子的初态 $\psi(x,0) = \delta(x)$, 求 $|\psi(x,t)|^2$.
提示: 利用复参数 α 的广义 Gauss 积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

54. (曾谨言, 1998, Ex 2.6) 设一维自由粒子的初态 $\psi(x,0)$, 证明在足够长时间后,

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{m}{\hbar t}}\exp(-i\pi/4)\exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar t}\right)\varphi\left(\frac{mx}{\hbar t}\right),$$

式中

$$\varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x,0)e^{-ikx}dx$$

是 $\psi(x,0)$ 的 Fourier 变换.
提示: 利用

$$\lim_{\alpha\to\infty}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{i\pi/4}e^{-i\alpha x^2} = \delta(x).$$

55. (曾谨言, 1998, Ex 2.7) 设一维自由粒子的初态是一个 Gauss 波包,

$$\psi(x,0) = e^{\frac{ip_0x}{\hbar}}\frac{1}{(\pi\alpha^2)^{1/4}}e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}.$$

i. 证明初始时刻, $\langle x\rangle = 0$, $\langle p\rangle = p_0$ (这里 $\langle f\rangle$ 表示变量 f 的平均值),

$$\Delta x = \sqrt{\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}},$$
$$\Delta p = \sqrt{\langle(p-\langle p\rangle)^2\rangle} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\alpha},$$
$$\Delta x\Delta p = \frac{\hbar}{2}.$$

ii. 计算 t 时刻的波函数[1]

$$\psi(x,t) = \left\{\sqrt{\pi}\left(\alpha + \frac{i\hbar t}{m\alpha}\right)\right\}^{-1/2} \exp\left\{\frac{ip_0 x}{\hbar}\left(1 - \frac{p_0 t}{2mx} + \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\alpha p_0}\frac{\hbar t}{m\alpha^2}\frac{x}{\alpha}\right)\right\} \exp\left\{-\frac{(x-p_0t/t)^2}{2\alpha\left(1+\frac{i\hbar t}{m\alpha^2}\right)}\right\},$$

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\left(\alpha^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2\alpha^2}\right)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(x-p_0t/m)^2}{\alpha^2+\frac{\hbar^2t^2}{m^2\alpha^2}}\right\},$$

由此

$$\langle x(t)\rangle = \frac{p_0 t}{m},$$

与经典粒子比较. 而

$$\Delta x(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\hbar^2t^2}{m^2\alpha^2}\right)^{1/2} \approx \frac{\hbar t}{\sqrt{2}m\alpha} \qquad (t\to\infty).$$

考虑一个宏观粒子, $m=1\mathrm{g}$, 初始时刻位置准确到 $1\mathrm{fm}=10^{-13}\mathrm{cm}$, 即 $\Delta x(t=0)=\alpha/\sqrt{2}=10^{-13}\mathrm{cm}$, 计算 $t=300,000$ 年时 $\Delta x(t)=?$ 由此你可以得出什么结论?

56. (曾谨言, 1998, Ex 3.1) 设粒子处于二维无限深势阱中

$$V(x,y)=\begin{cases}0, & 0<x<a, 0<y<b;\\ \infty, & \text{其余区域.}\end{cases}$$

求粒子的能量本征值和本征波函数. 如 $a=b$, 能级的简并度如何?

57. (曾谨言, 1998, Ex 3.2) 设粒子限制在矩形匣子中运动, 即

$$V(x,y,z)=\begin{cases}0, & 0<x<a, 0<y<b, 0<z<c;\\ \infty, & \text{其余区域.}\end{cases}$$

求粒子的能量本征值和本征波函数. 如 $a=b=c$, 讨论能级的简并度.

[1] 原题红色部分为 $\exp\left\{\frac{ip_0}{\hbar}\left(x-\frac{p_0t}{m}\right)\right\}$.

58. (曾谨言, 1998, Ex 3.3) 设粒子处于一维无限深方势阱中,

$$V(x)=\begin{cases}0, & 0<x<a;\\ \infty, & \text{其余区域}.\end{cases}$$

证明处于定态 $\psi_n(x)$ 的粒子, $\langle x\rangle=\frac{a}{2}$,

$$\langle (x-\langle x\rangle)^2\rangle=\frac{a^2}{12}\left(1-\frac{6}{n^2\pi^2}\right).$$

讨论 $n\to\infty$ 的情况, 并与经典力学计算结果比较.

59. (曾谨言, 1998, Ex 3.4) 设粒子处于一维无限深方势阱中,

$$V(x)=\begin{cases}0, & |x|<a/2;\\ \infty, & \text{其余区域}.\end{cases}$$

处于基态 $(n=1)$. 求粒子的动量分布.

60. (曾谨言, 1998, Ex 3.5) 设粒子 (能量 $E>0$) 从左入射, 碰到下列势阱

$$V(x)=\begin{cases}0, & x>0;\\ -V_0, & x<0.\end{cases}$$

求阱壁处的反射系数.

61. (曾谨言, 1998, Ex 3.6) 利用 Hermite 多项式的递推关系或算符 $\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p+im\omega x)$ 的性质, 证明谐振子波函数满足下列关系

$$\begin{aligned}x\psi_n(x)=&\frac{1}{\alpha}\left\{\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x)+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x)\right\},\\ x^2\psi_n(x)=&\frac{1}{2\alpha^2}\left\{\sqrt{n(n-1)}\psi_{n-2}(x)+(2n+1)\psi_n(x)+\sqrt{(n+1)(n+2)}\psi_{n+2}(x)\right\},\end{aligned}$$

其中 $\alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$. 并由此证明, 在$\psi_n$态下, $\langle x\rangle=0$, $\langle V\rangle=E_n/2$.

62. (曾谨言, 1998, Ex 3.7) 同上题, 利用 Hermite 多项式的求导公式或算符 $\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p+im\omega x)$ 的性质, 证明

$$\frac{d}{dx}\psi_n(x)=\alpha\left\{\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x)-\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x)\right\},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\psi_n(x) =&\frac{\alpha^2}{2}\Big\{\sqrt{n(n-1)}\psi_{n-2}(x)-(2n+1)\psi_n(x)\\&+\sqrt{(n+1)(n+2)}\psi_{n+2}(x)\Big\}.\end{aligned}$$

并由此证明, 在 ψ_n 态下, $\langle p\rangle = 0$, $\langle T\rangle = \frac{1}{2m}\langle p^2\rangle = E_n/2$.

63. (曾谨言, 1998, Ex 3.8) 谐振子处于ψ_n态下, 计算

$$\Delta x =\sqrt{\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle},\quad \Delta p = \sqrt{\langle(p-\langle x\rangle)^2\rangle},\quad \Delta x\Delta p.$$

64. (曾谨言, 1998, Ex 3.9) 荷电q的谐振子, 受到外电场$\mathcal{E}$的作用,

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - q\mathcal{E}x,$$

求能量本征值和本征函数.

65. (曾谨言, 1998, Ex 3.10) 求不对称势阱

$$V(x) = \begin{cases} V_1, & x<0,\\ 0, & 0<x<a,\\ V_2 & x>a\end{cases}$$

中粒子的能量本征值.

66. (曾谨言, 1998, Ex 3.11) 设粒子在下列势阱中运动, 求粒子能级,

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x<0,\\ \frac{1}{2}m\omega^2x^2, & x>0.\end{cases}$$

67. (曾谨言, 1998, Ex 3.12) 设粒子处于半壁无限高的势场中

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x<0,\\ -V_0, & 0<x<a,\\ 0, & x>a.\end{cases}$$

求粒子能量本征值, 以及至少存在一条束缚能级的条件.

68. (曾谨言, 1998, Ex 4.1) 设 ξ 与 η 为实线性算符, 则 $\frac{1}{2}(\xi\eta+\eta\xi)$ 和 $\frac{1}{2i}(\xi\eta-\eta\xi)$ 也是实线性算符. 由此证明, 任何一个算符 α 均可分解为 $\alpha_+ + i\alpha_-$,

$$\alpha_+ = \frac{1}{2}(\alpha+\bar{\alpha}), \quad \alpha_- = \frac{1}{2i}(\alpha-\bar{\alpha}),$$

其中 $\bar{\alpha}$ 为算符 α 的共轭算符. α_+ 与 α_- 均为实算符.

69. (曾谨言, 1998, Ex 4.2) 设 $F(x,p)$ 是 x 和 p 的整函数, 证明,

$$[p,F] = -\frac{\partial}{\partial x}F, \quad [x,F] = \frac{\partial}{\partial p}F.$$

整函数是指$F(x,p)$可以展开成

$$F(x,p) = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{mn}x^m p^n.$$

70. (曾谨言, 1998, Ex 4.3) 定义反对易式 $[A,B]_+ \equiv \frac{1}{i\hbar}(AB+BA)$. 证明,

$$\begin{aligned}[AB,C] =& A[B,C]_+ - [A,C]_+B,\\ [A,BC] =& [A,B]_+C - B[A,C]_+.\end{aligned}$$

71. (曾谨言, 1998, Ex 4.4) 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 为矢量算符, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的标量积和矢量积定义为,

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \sum_{\alpha} A_\alpha B_\alpha, \quad (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_\gamma = \sum_{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}A_\alpha B_\beta,$$

$\alpha,\beta,\gamma = x,y,z$, $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 为 Levi-Civita 符号 (排列符号)

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1, & \alpha\beta\gamma \text{ 是 } xyz \text{ 的偶排列} \\ -1, & \alpha\beta\gamma \text{ 是 } xyz \text{ 的奇排列} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试验证,

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \sum_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}A_\alpha B_\beta C_\gamma,$$

$$\{\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\}_\alpha = \boldsymbol{A}\cdot(B_\alpha\boldsymbol{C}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})C_\alpha,$$

$$\{(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}\}_\alpha = \boldsymbol{A}\cdot(B_\alpha\boldsymbol{C}) - A_\alpha(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}).$$

72. (曾谨言, 1998, Ex 4.5) 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为矢量算符, F 为标量算符. 证明,

$$
\begin{aligned}
&[F, \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}] = [F, \boldsymbol{A}] \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot [F, \boldsymbol{B}], \\
&[F, \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}] = [F, \boldsymbol{A}] \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times [F, \boldsymbol{B}].
\end{aligned}
$$

73. (曾谨言, 1998, Ex 4.6) 设 F 是由坐标 $\boldsymbol{r}$ 与动量 $\boldsymbol{p}$ 构成的标量算符, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ 是角动量算符, 证明,

$$
[\boldsymbol{l}, F] = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{p} - \boldsymbol{r} \times \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{r}}.
$$

74. (曾谨言, 1998, Ex 4.7) 证明,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{l} + \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{p} &= 2i\hbar \boldsymbol{p}, \\
\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{l} - \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{p} &= [\boldsymbol{l}^2, \boldsymbol{p}].
\end{aligned}
$$

75. (曾谨言, 1998, Ex 4.8) 证明,

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{l}^2 = r^2 p^2 - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p})^2 + i\hbar \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}, \\
&(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{p})^2 = (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{l})^2 = -(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{p}) \cdot (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{l}) = \boldsymbol{l}^2 p^2, \\
&-(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{l}) \cdot (\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{l}^2 p^2 + 4\hbar^2 p^2, \\
&(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{p}) \times (\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{p}) = -i\hbar \boldsymbol{l} p^2.
\end{aligned}
$$

76. (曾谨言, 1998, Ex 4.9) 定义径向动量算符

$$
p_r = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}\frac{1}{r}\right),
$$

证明

i. $\bar{p_r} = p_r$;

ii. $p_r = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)$;

iii. $[r, p_r] = 1$;

iv. $p_r^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) = -\hbar^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}$;

v. $p^2 = \frac{1}{r^2} l^2 + p_r^2$.

77. (曾谨言, 1998, Ex 4.10) 利用不确定性原理估算谐振子的基态能量.

78. (曾谨言, 1998, Ex 4.11) 利用不确定性原理估算类氢原子中电子的基态能量.

79. (曾谨言, 1998, Ex 4.12) 证明在分立的能量本征态下动量平均值为零.

80. (曾谨言, 1998, Ex 4.13) 证明在 l_z 的本征态 $|l_z'\rangle$ 下, $\langle l_z'|l_x|l_z'\rangle = \langle l_z'|l_y|l_z'\rangle = 0$.

81. (曾谨言, 1998, Ex 4.14) 设粒子处于 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 状态下, 求$(\Delta l_x)^2$和$(\Delta l_y)^2$.

82. (曾谨言, 1998, Ex 4.15) 设粒子处于 $\psi = c_1 Y_{11} + c_2 Y_{20}$ 状态 (已归一化, 即 $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$). 求

 i. l_z 的可能测量值及平均值;
 ii. $\boldsymbol{l}^2$ 的可能测量值及相应的几率;
 iii. l_x 的可能测量值及相应的几率.

83. (曾谨言, 1998, Ex 4.16) 设属于能级 E 的三个简并态 ψ_1, ψ_2 和 ψ_3, 彼此线性独立, 但不正交. 试利用它们构成一组彼此正交归一的波函数.

84. (曾谨言, 1998, Ex 4.17) 设有矩阵 A, B, C, S 等. 证明，

$$
\begin{aligned}
\det(AB) &= \det A \cdot \det B, \quad \det(S^{-1}AS) = \det A, \\
\mathrm{tr}(AB) &= \mathrm{tr}(BA), \quad \mathrm{tr}(S^{-1}AS) = \mathrm{tr} A, \\
\mathrm{tr}(ABC) &= \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA).
\end{aligned}
$$

$\det A$ 表示与矩阵 A 对应的行列式的值, $\mathrm{tr}A$ 代表矩阵 A 的对角元素之和.

85. (曾谨言, 1998, Ex 4.18) 处于势场$V(\boldsymbol{r})$中的粒子, 在坐标表象中其能量本征方程表示成

$$
\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r})\right\}\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}),
$$

试在动量表象中写出相应的能量本征方程.

86. (曾谨言, 1998, Ex 5.1) 设力学量A不显含t, H为体系的Hamilton量, 证明

$$
\frac{d^2}{dt^2}\overline{A} = \hbar\overline{[[A, H], H]}.
$$

87. (曾谨言, 1998, Ex 5.2) 设力学量A不显含t, 证明在束缚定态下

$$\frac{d\overline{A}}{dt} = 0.$$

88. (曾谨言, 1998, Ex 5.3) $D_x(a) = \exp\left(-a\frac{\partial}{\partial x}\right) = \exp(-iap_x/\hbar)$表示沿$x$方向平移距离$a$的算符. 证明下列形式波函数(Bloch波函数)

$$\psi(x) = e^{ikx}\phi_k(x), \qquad \phi_k(x+a) = \phi(x),$$

是$D_x(a)$的本征态, 相应本征值为e^{-ika}.

89. (曾谨言, 1998, Ex 5.4) 设$|m_z'\rangle$表示m_z的本征态(本征值为$m_z'\hbar$). 证明

$$e^{-im_x\varphi/\hbar}e^{-im_y\theta/\hbar}\left|m_z'\right\rangle$$

是角动量$\boldsymbol{m}$沿空间(θ,φ)

$$m_x\sin\theta\cos\varphi + m_y\sin\theta\sin\varphi + m_z\cos\theta$$

的本征态.

90. (曾谨言, 1998, Ex 5.5) 设 Hamilton 量 $H = p^2/2\mu + V(\boldsymbol{r})$, 证明下列求和规则

$$\sum_n (E_n - E_m)\left|x_{nm}\right|^2 = \hbar^2/2\mu,$$

x 是 $\boldsymbol{r}$ 的一个分量, $\sum_n$ 是对一切定态求和, E_n 是对应于 n 态的能量本征值, $H\left|n\right\rangle = E_n\left|n\right\rangle$.
提示: 计算 $[[H,x],x]$, 求 $\langle m|[[H,x],x]|m\rangle$.

91. (曾谨言, 1998, Ex 5.6) 设 $F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ 为 Hermite 算符, 证明在能量表象中的求和规则

$$\sum_n (E_n - E_k)\left|F_{nk}\right|^2 = -\frac{\hbar^2}{2}\left\langle k|[F,[H,F]]|k\right\rangle.$$

92. (曾谨言, 1998, Ex 6.1) 利用公式

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2},$$
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2,$$

$$
\begin{aligned}
M =& m_1 + m_2, \\
\mu =& \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}
\end{aligned}
$$

证明下列关系式

$$
\begin{aligned}
\text{相对动量} \quad \boldsymbol{p} =& \mu \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{M}(m_2 \boldsymbol{p}_1 - m_1 \boldsymbol{p}_2), \\
\text{总动量} \quad \boldsymbol{P} =& M \dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2, \\
\text{总轨道角动量} \quad \boldsymbol{L} =& \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{p}_2 \\
=& \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}, \\
\text{总动能} \quad T =& \frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\boldsymbol{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}.
\end{aligned}
$$

93. (曾谨言, 1998, Ex 6.2) 同上题. 求坐标表象中$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{L}$的算符表示式

$$
\boldsymbol{p} = -i\hbar\nabla_r, \quad \boldsymbol{P} = -i\hbar\nabla_R, \qquad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}.
$$

94. (曾谨言, 1998, Ex 6.3) 利用氢原子能级公式, 讨论下列体系的能谱
    i. 电子偶素 (positronium, 指 $e^+ - e^-$ 束缚体系),
    ii. μ 原子 (muonic atom),
    iii. μ 子偶素(muonium, 指 $\mu^+ - \mu^-$ 束缚体系).
95. (曾谨言, 1998, Ex 6.4) 对氢原子基态, 计算 $\Delta x \Delta p_x$.
96. (曾谨言, 1998, Ex 6.5) 对于氢原子基态, 求电子处于经典禁区($r > 2a$)(即$E - V < 0$)的几率.
97. (曾谨言, 1998, Ex 6.6) 对于类氢原子(荷电荷Ze)的"圆轨道"(指$n_r = 0$, 即$l = n - 1$的轨道), 计算
    i. 最可几半径;
    ii. 平均半径;
    iii. 涨落$\Delta r = \left\{ \left\langle r^2 \right\rangle - \left\langle r \right\rangle^2 \right\}^{1/2}$.
98. (曾谨言, 1998, Ex 6.7) 设电荷为Ze的原子核突然发生β^-衰变, 核电荷变成$(Z+1)e$. 求衰变前原子Z中一个K电子($1s$轨道上的电子)在衰变后仍然保持在新的原子$(Z+1)$的K轨道的几率.

99. (曾谨言, 1998, Ex 6.8) 设碱金属原子中的价电子所受原子实(原子核+满壳电子)的作用近似表示为

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} - \lambda\frac{e^2 a}{r^2} \quad (0 < \lambda \ll 1),$$

a为Bohr半径, 上式右边第2项为屏蔽Coulomb势. 求价电子的能级.

提示: 令$l(l+1) - 2\lambda = l'(l'+1)$, 解出

$$l' = -\frac{1}{2} + (l+1/2)\left\{1 - \frac{8\lambda}{(2l+1)^2}\right\}^{1/2}.$$

100. (曾谨言, 1998, Ex 6.9) 设粒子处于中心势$V(r) = \frac{1}{2}Kr^2 + D\boldsymbol{l}^2$, ($K$, D为常数, $K > 0$), $\boldsymbol{l}$为轨道角动量. 求粒子能级.

101. (曾谨言, 1998, Ex 7.1) 荷电 q 质量为 M 的粒子在均匀外磁场 $\boldsymbol{B}$ 中运动, Hamilton量表示为

$$H = \frac{1}{2M}\left(\boldsymbol{P} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 = \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}^2,$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{M}\left(\boldsymbol{P} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right),$$

速度算符 $\boldsymbol{v}$ 的三个分量满足对易关系式

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = i\hbar\frac{q}{M^2c}\boldsymbol{B}.$$

假设 $\boldsymbol{B}$ 沿 z 轴方向, 只考虑粒子在 xy 平面中的运动, 则有

$$[v_x, v_y] = \frac{q}{M^2c}B.$$

设 $q > 0$, 令

$$Q = \sqrt{\frac{M^2c}{\hbar qB}}v_x, \quad P = \sqrt{\frac{M^2c}{\hbar qB}}v_y,$$

则

$$[Q, P] = 1/\hbar,$$

而

$$H = \frac{1}{2}M(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}(Q^2 + P^2)\hbar\omega_c,$$

式中 $\omega_c = qB/Mc$ 为 cyclotron 角频率. 上式与谐振子 Hamilton 量相似. 由此求出其能量本征值 (Landau 能级)

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega_c.$$

102. (曾谨言, 1998, Ex 7.2) 求相互垂直的均匀电场和磁场中的带电粒子的能量本征值.

提示: 设电场沿 y 方向 $\mathcal{E}=(0,\mathcal{E},0)$, 磁场沿 z 方向, 选 Landau 规范, $\boldsymbol{A}=(-By,0,0)$, 则粒子在 xy 平面内运动的 Hamilton 量为

$$H=\frac{1}{2M}\left\{\left(P_x+\frac{qB}{c}y\right)^2+P_y^2\right\}-q\mathcal{E}y.$$

103. (曾谨言, 1998, Ex 8.1) 解答下列问题

i. 在 σ_z 表象中, 求 σ_x 的本征态.

ii. 求 σ_z 表象到 σ_x 表象的变换矩阵 S.

iii. 验证

$$S\sigma_x S^{-1}=S\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}S^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

104. (曾谨言, 1998, Ex 8.2) 在 σ_z 表象中, 求 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$ 的本征态, $\boldsymbol{n}=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$ 是方位角 (θ,φ) 方向的单位矢量.

105. (曾谨言, 1998, Ex 8.3) 在 s_z 本征态 $\chi_{1/2}(s_z)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 下, 求 $(\Delta s_x)^2$ 和 $(\Delta s_y)^2$.

106. (曾谨言, 1998, Ex 8.4) 在s_z本征态$\chi_{1/2}$下, 求$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$的可能测量值及相应的几率. 若电子处于$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}=+1$的自旋态下, 求$\boldsymbol{\sigma}$各分量的可能测量值及相应的几率以及$\boldsymbol{\sigma}$的平均值

107. (曾谨言, 1998, Ex 8.5) 证明

i. $e^{i\lambda\sigma_z}=\cos\lambda+i\sigma_z\sin\lambda$ (λ为常数).

ii. $e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A}}=\cos A+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\sin A$, $\boldsymbol{A}=A\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{A}$为常矢量, 大小为A, 方向的单位向量为$\boldsymbol{n}$

iii. 证明$\mathrm{Tr}\left(e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A}}\right)=2\cos A$, Tr为求矩阵的对角元之和.

108. (曾谨言, 1998, Ex 8.6) 证明$e^{i\lambda\sigma_z}\sigma_x e^{-i\lambda\sigma_z}=\sigma_x\cos(2\lambda)-\sigma_y\sin(2\lambda)$ (λ为常数).

109. (曾谨言, 1998, Ex 8.7) 电子的磁矩算符可表示为$\boldsymbol{\mu}=-\frac{e}{2mc}(\boldsymbol{l}+2\boldsymbol{s})$. 磁矩的观测值定义为$\mu=\langle ljm_j|\mu_z|ljm_j\rangle|_{m_j=j}=\langle ljj|\mu_z|ljj\rangle$, $|ljm_j\rangle$是$(\boldsymbol{l}^2,\boldsymbol{j}^2,j_z)$的共同本征态. 计算$\mu$.

提示: $\mu_z=-\frac{e}{2mc}(j_z+s_z)$. 利用式

$$\langle ljm_j|\sigma_z|ljm_j\rangle=\begin{cases}m_j/j, & j=l+1/2,\\ -m_j/(j+1), & j=l-1/2.\end{cases}$$

110. (曾谨言, 1998, Ex 8.8) 由两个非全同粒子(自旋均为$\hbar/2$)组成的体系, 设粒子间相互作用表示为$H = A\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2$(不考虑轨道运动). 初始时刻($t = 0$)粒子1自旋“向上”($s_{1z} = 1/2$), 粒子2自旋“向下”($s_{2z} = -1/2$). 求时刻$t(> 0)$时,

 i. 粒子1自旋向上的几率;
 ii. 粒子1和2的自旋均向上的几率;
 iii. 总自旋$S = 0$和1的几率;
 iv. $\boldsymbol{s}_1$和$\boldsymbol{s}_2$的平均值.

111. (曾谨言, 1998, Ex 8.9) 设有一个定域电子, 受到沿 x 方向均匀磁场 B 的作用, Hamilton 量 (不考虑轨道运动) 表示为 $H = \frac{eB}{mc}s_x = \frac{eB\hbar}{2mc}\sigma_x$. 设 $t = 0$ 时电子自旋“向上” ($s_z = \hbar/2$), 求 $t > 0$ 时 $\boldsymbol{s}$ 的平均值.

112. (曾谨言, 1998, Ex 8.10) 考虑自旋为$\hbar/2$的粒子, 具有磁矩μ, 在转动磁场$\boldsymbol{B}(t)$中运动. $\boldsymbol{B}(t) = (B_1\cos(2\omega_0 t), B_1\sin(2\omega_0 t), B_0)$, $\omega_0 = \mu B_0/\hbar$. Hamilton量表示为(σ_z表象)

$$H(t) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} = -\mu\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -\mu B_0 & -\mu B_1 e^{2i\omega_0 t} \\ -\mu B_1 e^{-2i\omega_0 t} & \mu B_0 \end{pmatrix},$$

含时Hamilton量具有周期性, $H(\tau) = H(0)$, $\tau = \pi/\omega_0$.

 i. 把t看成参数, 求$H(t)$的瞬时(instantaneous)本征态.
 ii. 设粒子初态$\psi(0) = \psi_-(0)$. 在绝热近似下(磁场转动极慢), 粒子自旋态保持在$\psi_-(t)$(忽略$\psi_+(t)$的混合), $\psi(t)$可表示为

$$\psi(t) = a_-(t)\exp\left(\frac{-iE_-t}{\hbar}\right)\psi_-(t),$$

代入含时Schrödinger方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi,$$

求解$a_-(t) = e^{i\beta_-(t)}$, 讨论经历一周期后的相位$\beta_-(\tau)$.

 iii. 不做绝热近似, $\psi(t)$一般解应表示成$\psi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$. 设初态为$\psi(0) = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$. 求$\psi(t)$.

113. (曾谨言, 1998, Ex 9.1) 一维势阱 $V(x)$ 中粒子的能量本征态方程为

$$H\psi_n(x) = \left\{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right\}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x).$$

设存在束缚态, 取基态能量 E_0 (有限, $E_0 \neq -\infty$)为参照点, 即 $E_0 = 0$, 则 $\psi_0(x)$ 满足

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right\}\psi_0(x) = 0.$$

$\psi_0(x)$ 无节点(边界点除外). 考虑如下能量本征方程,

$$H_-\psi_0(x) = \left\{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right\}\psi_0(x) = 0,$$

不妨设 $\psi_0(x)$ 为实的. 显然

$$V_-(x) = \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)},$$

因此 H_- 可以表示为

$$H_- = \frac{\hbar^2}{2\mu}\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)}\right\}.$$

定义算符

$$A = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu}}\left\{\frac{d}{dx} - \frac{\psi_0'}{\psi_0}\right\},$$

则

$$\bar{A} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu}}\left\{-\frac{d}{dx} - \frac{\psi_0'}{\psi_0}\right\},$$

i. 证明 $A\psi_0 = 0$;

ii. 证明 $\bar{A}A = H_-$;

iii. 证明 $A\bar{A} - \bar{A}A = -\frac{\hbar^2}{\mu}\left(\frac{\psi_0''}{\psi_0} + \frac{\psi_0'^2}{\psi_0^2}\right)$, 而

$$\begin{aligned} A\bar{A} \equiv H_+ &= -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2} + V_+(x), \\ V_+(x) &= -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\psi_0''}{\psi_0} + \frac{\hbar^2}{\mu}\frac{\psi_0'^2}{\psi_0^2}. \end{aligned}$$

iv. 除 H_- 的基态外, 证明 H_+ 与 H_- 的本征值有下列关系

$$E_n^{(+)} = E_{n+1}^{(-)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

v. 将以上讨论应用于谐振子(取 $\hbar = m = \omega = 1$, $\psi_0(x) \sim e^{-x^2/2}$), 计算出 A 和 $\bar{A}$.

114. (曾谨言, 1998, Ex 9.2) 对于氢原子的径向方程, 取$\hbar = e = \mu = 1$,

$$\chi_l'' + \left\{2\left(E + \frac{1}{r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right\}\chi_l = 0$$

可改写成

$$D(l)\chi_l(r) = \lambda_l \chi_l(r), \qquad \lambda_l = -2E,$$
$$D(l) = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2}{r}.$$

令

$$A_+(l) = \frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r} + \frac{1}{l+1},$$
$$A_-(l) = \frac{d}{dr} + \frac{l}{r} - \frac{1}{l}, \quad (l > 0).$$

证明

$$A_-(l+1)A_+(l) = D(l) - \frac{1}{(l+1)^2},$$
$$A_+(l-1)A_-(l) = D(l) - \frac{1}{l^2}, \quad (l > 0).$$

以及

$$D(l)A_+(l-1)\chi_{l-1} = \lambda_{l-1}A_+(l-1)\chi_{l-1},$$
$$D(l)A_-(l+1)\chi_{l+1} = \lambda_{l+1}A_-(l+1)\chi_{l+1}.$$

因此阐明A_+和A_-算符的作用是使角动量l增, 减1, 但保持能量E不变.

115. (曾谨言, 1998, Ex 9.3) 对于三维各向同性谐振子, $V(r)=\frac{1}{2}\mu\omega^2r^2$, 取$\hbar=\omega=\mu=1$, 径向方程为

$$\chi_l''+\left\{2E-r^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}\chi_l=0,$$

可以改写成

$$\begin{aligned}D(l)\chi_l(r)=&\lambda_l\chi_l(r),\\ D(l)=&\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}-r^2,\quad \lambda_l=-2E.\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}A_+(l)=&\frac{d}{dr}-\frac{l+1}{r}+r,\\ A_-(l)=&\frac{d}{dr}+\frac{l}{r}-r,\\ B_+(l)=&\frac{d}{dr}-\frac{l+1}{r}-r,\\ B_-(l)=&\frac{d}{dr}+\frac{l}{r}+r,\end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned}A_-(l+1)A_+(l)=&D(l)+(2l+3),\\ A_+(l-1)A_-(l)=&D(l)+(2l-1),\\ B_-(l+1)B_+(l)=&D(l)-(2l+3),\\ B_+(l-1)B_-(l)=&D(l)-(2l-1),\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}D(l)A_+(l-1)\chi_{l-1}=&(\lambda_{l-1}+2)A_+(l-1)\chi_{l-1},\\ D(l)A_-(l+1)\chi_{l+1}=&(\lambda_{l+1}-2)A_-(l+1)\chi_{l+1},\\ D(l)B_+(l-1)\chi_{l-1}=&(\lambda_{l-1}-2)B_+(l-1)\chi_{l-1},\\ D(l)B_-(l+1)\chi_{l+1}=&(\lambda_{l+1}+2)B_-(l+1)\chi_{l+1}.\end{aligned}$$

由此阐明算符$A_+(A_-)$的作用是使角动量l增(减)1, 能量减(增)1, 而$B_+(B_-)$的作用是使l增(减)1, 但能量增(减)1.

116. (曾谨言, 1998, Ex 9.4) 设两个全同粒子角动量$j_1 = j_2 = j$, 耦合成总角动量J,

$$\psi_{j^2 JM}(1,2) = \sum_{m_1 m_2} \langle jm_1 jm_2 | JM \rangle \, \psi_{jm_1}(1)\psi_{jm_2}(2),$$

利用CG系数的对称性, 证明

$$P_{12}\psi_{j^2 JM} = (-)^{2j-J}\psi_{j^2 JM}.$$

由此证明, 无论Bose子或Fermi子, J都必须取偶数.

117. (曾谨言, 1998, Ex 9.5) 设原子中有两个价电子, 处于E_{nl}能级上, 按LS耦合方案, $\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 = \boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} = \boldsymbol{J}$ (总角动量). 证明

i. $L + S$必为偶数.

ii. $J = L + S, \ldots, |L - S|$. 当$S = 0$时$J = L$ (偶). 而$S = 1$时, $J = L + 1, L, L - 1$, J可以为奇, 也可以为偶.

118. (曾谨言, 1998, Ex 9.6) 大小相等的两个角动量耦合成角动量为零的态, ψ_{jj00}. 证明$j_{1z} = -j_{2z} = j, j-1, \ldots, -j$的几率相等, 即$1/(2j+1)$.

提示: 利用$\langle jmj-m|00\rangle = (-)^{j-m}/\sqrt{2j+1}$.

119. (曾谨言, 1998, Ex 9.7) 设 $\boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2 = \boldsymbol{j}$, 在 $|j_1 j_2 jm\rangle$ 态下, 证明

$$\begin{aligned}
\langle j_{1x}\rangle &= \langle j_{1y}\rangle = \langle j_{2x}\rangle = \langle j_{2y}\rangle = 0,\\
\langle j_{1z}\rangle &= m\frac{j(j+1) + j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)}{2j(j+1)},\\
\langle j_{2z}\rangle &= m\frac{j(j+1) + j_2(j_2+1) - j_1(j_1+1)}{2j(j+1)}\\
&= m - \langle j_{1z}\rangle .
\end{aligned}$$

120. (曾谨言, 1998, Ex 9.8) 在 $(\boldsymbol{l}^2, l_z)$ 表象 (以 $|lm\rangle$ 为基矢) 中, $l = 1$ 的子空间的维数为三. 求 l_x 在此三维空间中的矩阵表示. 再利用矩阵方法求出 l_x 的本征值和本征态.

提示: 利用公式(曾谨言, 1998, pp.250-251, Eq. (26))

$$\begin{aligned}
\langle jm+1|j_+|jm\rangle &= \sqrt{(j+m+1)(j-m)}\\
&= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)},\\
\langle jm-1|j_-|jm\rangle &= \sqrt{(j-m+1)(j+m)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sqrt{j(j+1)-m(m-1)},\\
\langle jm+1|j_x|jm\rangle =&\frac{1}{2}\sqrt{(j+m+1)(j-m)},\\
\langle jm-1|j_x|jm\rangle =&\frac{1}{2}\sqrt{(j-m+1)(j+m)},\\
\langle jm+1|j_y|jm\rangle =&-\frac{i}{2}\sqrt{(j+m+1)(j-m)},\\
\langle jm-1|j_y|jm\rangle =&\frac{i}{2}\sqrt{(j-m+1)(j+m)}.
\end{aligned}
$$

求 l_x 的矩阵表示.

121. (曾谨言, 1998, Ex 10.1) 设非简谐振子的 Hamilton 量表示为 $H = H_0 + H'$,

$$
\begin{aligned}
H_0 =&-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2,\\
H' =&\beta x^3, \qquad (\beta\text{为实常数}).
\end{aligned}
$$

用微扰论求其能量本征值 (准确到二级近似) 和本征函数 (准确到一级近似).

122. (曾谨言, 1998, Ex 10.2) 考虑耦合谐振子, $H = H_0 + H'$,

$$
\begin{aligned}
H_0 =&-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)+\frac{1}{2}\mu\omega^2(x_1^2+x_2^2),\\
H' =&-\lambda x_1x_2, \qquad (\lambda\ \text{为实常数, 刻画耦合强度}).
\end{aligned}
$$

i. 求出 H_0 的本征值及能级简并度.
ii. 以第一激发态为例, 用简并微扰论计算 H' 对能级的影响 (一级近似).
iii. 严格求解 H 的本征值, 并与微扰论计算结果比较, 进行讨论.

提示: 做坐标变换, 令 $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+\eta)$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi-\eta)$, 则 H 可化为两个独立的谐振子, ξ 和 η 为其简正坐标.

123. (曾谨言, 1998, Ex 10.3) 一维无限深势阱$(0 < x < a)$中的粒子, 受到微扰H'作用

$$
H'(x) = \begin{cases} 2\lambda x/a, & 0 < x < a/2,\\ 2\lambda(1-x/a), & a/2 < x < a. \end{cases}
$$

求基态能量的一级修正.

124. (曾谨言, 1998, Ex 10.4) 实际原子核不是一个点电荷, 它具有一定大小, 可近似视为半径为R的均匀分布球体. 它产生的电势为

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Ze}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}\right), & r < R, \\ \frac{Ze}{r}, & r > R. \end{cases},$$

Ze为核电荷. 试把非点电荷效应看成微扰,

$$H' = \begin{cases} -\frac{Ze}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{Ze}{r}, & r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases},$$

计算原子的$1s$能级的一级微扰修正.

125. (曾谨言, 1998, Ex 10.5) 设氢原子处于$n = 3$能级. 求它的Stark分裂. (将原子置于外电场中, 它发射的光谱线会发生分裂, 此即Stark分裂).

126. (曾谨言, 1998, Ex 10.6) 设$H = H_0 + H'$,

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1^{(0)} & 0 \\ 0 & E_2^{(0)} \end{pmatrix}, H' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (a,\, b\text{为实数}).$$

用微扰论求能级修正(准确到二级近似), 并与严格解(把H矩阵对角化)比较.

127. (曾谨言, 1998, Ex 10.7) 对于一维谐振子, 取基态试探波函数形式为$e^{-\lambda x^2}$, λ为参数. 用变分法求基态能量, 并与严格解比较.

128. (曾谨言, 1998, Ex 10.8) 对于非谐振子, $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \lambda x^4$. 取试探波函数为

$$\psi_0(x) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi^{1/4}} e^{-\alpha^2 x^2/2}$$

(与谐振子基态波函数形式相同), α为参数. 用变分法求基态能量.

129. (曾谨言, 1998, Ex 10.9) 氢原子基态试探波函数取为$e^{-\lambda(r/a)^2}$, $a = \hbar^2/\mu e^2$ (Bohr半径), λ为参数. 用变分法求基态能量, 并与严格解比较.

130. (曾谨言, 1998, Ex 10.10) 设在氘核中的质子与中子的相互作用表示成$V(r) = -Ae^{-r/a}$ ($A = 32\text{MeV}$, $a = 2.2 \times 10^{-15}\text{m}$). 设质子与中子相对运动波函数形式取为$e^{-\lambda r/2a}$, λ为变分参数. 用变分法计算氘核的基态能量.

131. (曾谨言, 1998, Ex 10.11) 讨论二维Fermi气体

i. 设电子限制在边长为L的方框中, 单粒子能级由下式给出,

$$E(n) = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2, \quad n^2 = n_1^2 + n_2^2, \quad n_x, n_y = 1, 2, \ldots,$$

在大量子数($n \gg 1$)下, $(n, n + dn)$中的量子态数目(计及自旋态)为$dN = \pi n dn$. 计算态密度dN/dE.

ii. 求Fermi能量E_f和能量平均值E_{av}.

132. (曾谨言, 1998, p.161, 思考题 1) 设体系有两个粒子, 每个粒子可处于三个单粒子态φ_1, φ_2 和 φ_3 中的任何一个. 试求体系可能态的数目, 分三种情况讨论,

    i. 两个全同 Bose 子;
    ii. 两个全同 Fermi 子;
    iii. 两个可区分粒子.

133. (曾谨言, 1998, p.161, 思考题 2) 设体系有 3 个粒子组成, 每个粒子可处于三个单粒子态 φ_1, φ_2 和 φ_3 中的任何一个. 分析体系可能态的数目, 分三种情况,

    i. 不计及波函数的交换对称性;
    ii. 要求波函数对于交换是反对称的;
    iii. 要求波函数对于交换是对称的.

    试问 (ii) 反对称态和 (iii) 对称态的总数是多少? 与 (i) 的结果是否相同? 对此作出说明.

134. (曾谨言, 1998, p.222, 练习 1) 证明

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}),$$

    其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是与 $\boldsymbol{\sigma}$ 对易的两个任何矢量. 利用此式证明

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2=&\boldsymbol{p}^2,\\(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l})^2=&\boldsymbol{l}^2-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l},\end{aligned}$$

    这里 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{l}$ 分别为动量和轨道角动量.

135. (曾谨言, 1998, p.222, 练习 2) 设算符 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}$ 对易, 证明

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma}=i\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{\sigma}.$$

136. (曾谨言, 1998, p.223, 练习 3) 令$\sigma_\pm=\frac{1}{2}(\sigma_x\pm i\sigma_y)$. 在Pauli表象中

$$\sigma_+=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \sigma_-=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

用矩阵乘法证明

$$
\begin{aligned}
\sigma_x\alpha =&\beta, \quad \alpha_x\beta = \alpha, \quad \sigma_y\alpha = i\beta, \quad \sigma_y\beta = -i\alpha,\\
\sigma_+\alpha =&0, \quad \sigma_+\beta = \alpha, \quad \sigma_-\alpha = \beta, \quad \sigma_-\beta = 0,
\end{aligned}
$$

其中α和β分别是σ_z取特征值$+1$和-1的本征态.

137. (曾谨言, 1998, p.238, 练习 1) 令 $P_{12} = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$.

    i. 证明 $P_{12}^2 = 1$;
    ii. 证明 $P_{12} = \boldsymbol{S}^2 - 1$.

    并由此证明 $P_{12}\chi_{SM_S} = (-1)^{S+1}\chi_{SM_S}$, P_{12} 有何物理意义?

138. (曾谨言, 1998, p.238, 练习 2) 令[2] $P_3 = \frac{1}{4}(3 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) = \frac{1}{2}(1 + P_{12})$, $P_1 = \frac{1}{4}(1 - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) = \frac{1}{2}(1 - P_{12})$. 证明 $P_3\chi_{1M_S} = \chi_{1M_S}$, $P_3\chi_{00} = 0$, $P_1\chi_{1M_S} = 0$, $P_1\chi_{00} = \chi_{00}$.

139. (曾谨言, 1998, p.238, 练习 3) 利用

    $$\boldsymbol{S}^2 = \frac{\hbar^2}{2}(3 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2),$$

    证明 χ_{SM_S} 也是 $\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$ 的本征态, 即

    $$
    \begin{aligned}
    \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2\chi_{1M_S} =&\chi_{1M_S}\\
    \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2\chi_{00} =&-3\chi_{00}
    \end{aligned}
    $$

140. (张永德 等, 2005, Ex 9.9) 2 个无相互作用的粒子, 质量都为 m, 处于一维无限深方势阱中, 势阱宽度为 $2a$, 在阱中势为零, 阱外势无穷大.

    i. 求系统四个最低能级的能量值是多少;
    ii. 求这些能级的简并度. 如果这两个粒子
        (a) 是全同粒子, 自旋为$\frac{1}{2}$;
        (b) 不是全同粒子, 自旋为$\frac{1}{2}$;
        (c) 是全同粒子, 自旋为1.

[2]原题红色部分为 $1 + 3\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$

参考文献

CHEN M, 1982. 伯克利 物理考题及解答[M]. 洪晶, 译. 1st. 北京: 人民教育出版社.

CONSTANTINESCU F, MAGYARI E, 1983. 量子力学习题与解答[M]. 葛源, 喀兴林, 译. 1st. 北京: 高等教育出版社.

张永德, 柳盛典, 吴强, 等, 2005. 物理学大题典–量子力学[M]. 1st. 合肥/北京: 中国科学技术大学出版社/科学出版社.

曾谨言, 1998. 量子力学导论[M]. 2nd. 北京: 北京大学出版社.

潘必才, 2014. 量子力学导论[M]. 1st. 合肥: 中国科学技术大学出版社.

马涛, 倪致祥, 张德明, 等, 1986. 硕士研究生入学考试解题指南–量子力学[M]. 1st. 合肥: 安徽教育出版社.

DIRAC P A M, 1958. The principles of quantum mechanics[M]. 4th ed. Oxford: Oxford Univ. Press.

GOLDSTEIN H, POOLE C, SAFKO J, 2005. Classical mechanics[M]. 3rd ed. 北京: 高等教育出版社.