中国科学技术大学

2019—2020学年第二学期末考试试卷

考试科目: 数学分析B2　　　　得分＿＿＿＿＿＿

学生所在院系:＿＿＿＿　　姓名＿＿＿＿＿　　学号＿＿＿＿＿

一（10分）: 设$f(u,v)$在$\mathbb{R}^2$上有连续的偏导数, 令$F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha)\mathrm{d}x$, 求$F'(\alpha)$.

参考答案：按变上限公式求导，注意被积函数是二元函数$f(\xi,\eta)$，因此

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\alpha}+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\alpha}$$

二（10分）:

计算三重积分$\iiint_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中积分区域$V$由曲面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$与平面$z=8$ 所围成.

解

$$\int_0^8 \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2=2z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^8 \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}} r^3\mathrm{d}r=\frac{1024\pi}{3}$$

三（10分）:

计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin x\mathrm{d}x$, 其中$0<a<b$.

解

$$=\int_0^{\infty}\int_a^b \mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}u\sin x\mathrm{d}x=\int_a^b\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ux}\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}u=\int_a^b\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$$
$$=\arctan b-\arctan a.$$

或采取求导方式

$$F'(b)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-bx}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{1+b^2}$$

装订线 答题时不要超过此线

再积分.

要说明交换理由。

四（10分）:

设$n, m > 0$, 利用Euler 积分计算积分$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^m}}\mathrm{d}x$.

解 令$t = x^m$. $x = t^{1/m}$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{m}t^{1/m-1}$

$$= \frac{1}{m}\int_0^1 t^{\frac{n}{m}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{m}B\left(\frac{n}{m}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{m}+\frac{1}{2}\right)}$$

五（10分）:

计算曲面积分$I = \displaystyle\iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$ 为圆柱面$x^2+y^2=1$被$z=0$ 和$z=3$所截部分的外侧.

解

加盖和底并利用Gauss 公式$S = \Sigma + S_+ + S_-$

$$\int_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9\pi$$

$$\int_{S_-} = 0,\ \int_{S_+} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x^2+y^2=1} 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\pi$$

所以$I = 6\pi$. 或用其它方法.

六（10分）:

（1）将函数$f(x) = \begin{cases} 1\ , & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0\ , & \frac{\pi}{2} \le |x| \le \pi \end{cases}$ 展开成以2π为周期的Fourier级数(须讨论其收敛性).

（2）分别求级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 和$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的值.

解 利用奇偶性$b_n = 0$

(1)

$$a_0 = 1,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi} & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi}\cos(2k+1)x = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi \\ \frac{1}{2} & x = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

（2）令$x=0$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}=\frac{\pi}{4}$$

在$[0,\pi/2]$ 上积分，也可用Parseval 等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

七（6分）：

试定出正数λ, 使下列曲面

$$F(x,y,z)=xyz-\lambda=0,\quad G(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

在第一象限某一点相切, 即有共同的切平面.

解 根据相切条件

$$(F'_x,F'_y,F'_z)=t(G'_x,G'_yG'_z)$$

推得

$$yz=t\frac{2x}{a^2},\ xz=t\frac{2y}{b^2},\ xy=t\frac{2z}{c^2},$$

两边分别乘以x,y,z 得

$$\lambda=t\frac{x^2}{a^2}=t\frac{y^2}{b^2}=t\frac{z^2}{c^2},$$

相加得$3\lambda=t$, 因此切点（第一象限）

$$x_0=\frac{a}{\sqrt{3}},\ y_0=\frac{b}{\sqrt{3}},\ z_0=\frac{c}{\sqrt{3}},$$

代入第一个方程得

$$\lambda=x_0y_0z_0=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$$

八（10分）：讨论$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\ , & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在$(0,0)$处的连续性和可微性.

解 **连续性：**根据定义

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\to 0$$

可微性：

因在$(0,0)$
$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$
所以两个偏导数存在且$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$

若可微, 有
$$f(x,y)=f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y+o(\rho)$$
所以$\frac{f(x,y)}{\rho}=\frac{o(\rho)}{\rho}\to 0$ 但是
$$\frac{f(x,y)}{\rho}=\frac{xy}{x^2+y^2}$$
在$(0,0)$ 没有极限，所以不可微。

九（6分）：

设$f(x,y),g(x,y)$在单位圆盘$U=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1\}$上有一阶连续偏导数, 且$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$, 证明：在单位圆周上存在一点$(\xi,\eta)$, 使得$f(\xi,\eta)\eta=g(\xi,\eta)\xi$.

证明 利用Green 公式有
$$\begin{aligned}0&=\iint_D(g'_x-f'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint f(x,y)\mathrm{d}x+g(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}(-f(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta+g(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta)\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$
被积函数连续, 因此由积分中值公式, 存在$\theta_0\in(0,2\pi)$ 使得
$$-f(\cos\theta_0,\sin\theta_0)\sin\theta_0+g(\cos\theta_0,\sin\theta_0)\cos\theta_0=0,$$
记$(\xi,\eta)=(\cos\theta_0,\sin\theta_0)$, 它是圆周上一点，就有
$$f(\xi,\eta)\eta=g(\xi,\eta)\xi.$$

十（6分）：

设函数$f(x,y,z)$在区域$\Omega=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le 1\}$上具有连续的二阶偏导数, 且满足$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 计算
$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

解 对$0<r<1$, 球面$x^2+y^2+z^2=r^2$ 的法向量为$\vec{n}=\dfrac{\vec{r}}{r}$, $\vec{r}=(x,y,z)$,

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{\Omega}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}\vec{r}\cdot\nabla f\mathrm{d}V\\
&=\int_0^1\mathrm{d}r\iint_{x^2+y^2+z^2=r^2}\vec{r}\cdot\nabla f\mathrm{d}S=\int_0^1 r\mathrm{d}r\iint_{x^2+y^2+z^2=r^2}\nabla f\cdot\vec{n}\mathrm{d}S\\
&=\int_0^1 r\mathrm{d}r\iiint_{x^2+y^2+z^2\le r^2}\nabla\cdot\nabla f\mathrm{d}V=\int_0^1 r\mathrm{d}r\iiint_{x^2+y^2+z^2\le r^2}\Delta f\mathrm{d}V\\
&=\int_0^1 r\mathrm{d}r\iiint_{x^2+y^2+z^2\le r^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

利用球坐标$x=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=\rho\cos\theta$ 最后的积分为

$$
I=\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^r\rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{6}
$$

十一(12分)：1. 设$u=ax+by$, $v=cx+dy$, 其中$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$是正交常数矩阵.

证明：对平面上任意的光滑（至少有二阶连续偏导数）数量场f, 有

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
$$

2. 设变换$u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 有二阶连续的偏导数. 已知对平面的任意光滑数量场f, 下列等式成立

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.
$$

(1)证明：参数变换的Jacobi矩阵$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$是正交矩阵.

(2)证明：$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$是常值矩阵。

解答：

1 直接验证.

2(1) 直接计算可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}&=f_{uu}u_x^2+2f_{uv}u_xv_x+f_{vv}v_x^2+f_u\ u_{xx}+f_v\ v_{xx},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}&=f_{uu}u_y^2+2f_{uv}u_yv_y+f_{vv}v_y^2+f_uu_{yy}+f_vv_{yy}.
\end{aligned}
$$

所以条件就等价于对任意数量场f,

$$\begin{aligned}f_{uu}(u_x^2+u_y^2-1)+2f_{uv}(u_xv_x+u_yv_y)+f_{vv}(v_x^2+v_y^2-1)\\+f_u(u_{xx}+u_{yy})+f_v(v_{xx}+v_{yy})=0.\end{aligned}$$

分别取$f=u, f=v, f=u^2, f=v^2, f=uv$代入上式，就得

$$\begin{aligned}&u_{xx}+u_{yy}=0,\ \ v_{xx}+v_{yy}=0,\\&u_x^2+u_y^2-1=0,\ u_xv_x+u_yv_y=0,\ v_x^2+v_y^2-1=0,\end{aligned}$$

其中后三个等式就推出Jacobi矩阵是正交阵。

2（2） 对等式$u_x^2+u_y^2=1$求偏导，就得到

$$u_xu_{xx}+u_yu_{xy}=0,\ \ u_xu_{xy}+u_yu_{yy}=0.$$

所以向量$(u_{xx},\ u_{xy})\|(u_{xy},\ u_{yy})$, 这说明矩阵

$$\begin{pmatrix}u_{xx} & u_{xy}\\ u_{xy} & u_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{xx} & u_{xy}\\ u_{xy} & -u_{xx}\end{pmatrix}$$

的行列式等于0. 因此$u_{xx}=u_{yy}=u_{xy}=0$，这说明$u=u(x,y)$是$(x,\ y)$的一次函数。

同理可以证明v是$(x,\ y)$的一次函数。