# §9.4 空间曲线与曲面

## 9.4.1 参数曲线

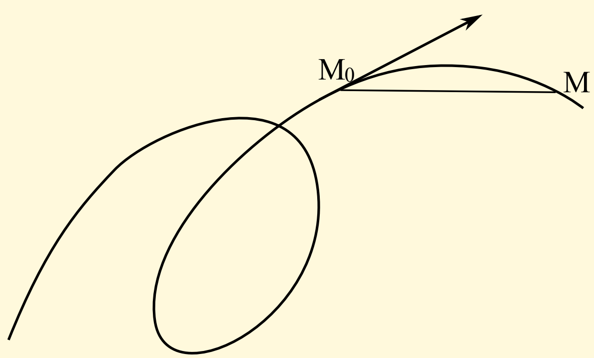
设空间中的一条曲线 $L$ 由参数方程

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

表示.

1° **切向量** 曲线上两点 $M_0$ 和 $M$, 它们的径向分别是 $\vec{r}(t_0)$ 和 $\vec{r}(t)$. 于是 $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$, 故 $\frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}$ 就与 $\overrightarrow{M_0M}$ 平行, 并指向参数的增加方向. 当 $t \to t_0$ 时, 如果弦向量 $\frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}$ 的极限值存在

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$$




则此极限就称为曲线在 $M_0$ 的切向量.

不难看出, 切向量的方向指向参数增加的方向. 曲线在 $t_0$ 的切向量存在, 等价于 $\vec{r}(t)$ 的各个分量 $x(t), y(t), z(t)$ 在 $t_0$ 可导, 且

$$\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$$

如果 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 都在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 且不同时为零, 则称曲线 $L$ 是 光滑曲线. 如果 $L$ 可以分成有限段, 且每一段都是光滑的, 则 $L$ 称为 逐段光滑的. 如果 $L$ 自身不相交, 即对任意 $\alpha \leqslant t_1 < t_2 < \beta$, 都有 $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$, 则称 $L$ 是简单曲线或 Jordan 曲线. 若 $\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\beta)$, 则称 $L$ 是闭曲线.

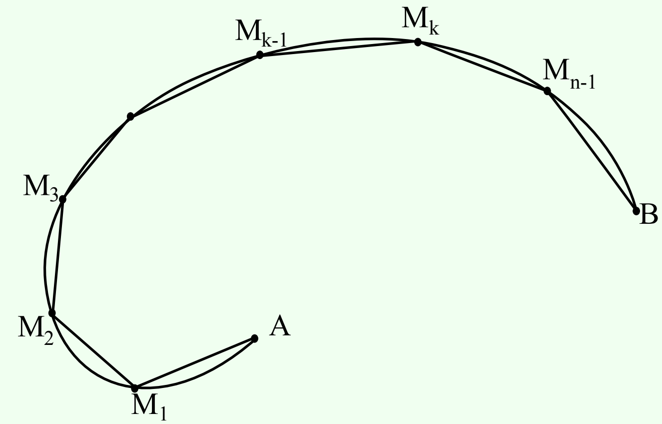
有了切向量, 就知道曲线在 $M_0$ 的切线方程为

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

曲线在 $M_0$ 的法平面方程为

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0.$$

$2^\circ$ **弧长** 与计算平面曲线的弧长方法一样, 确定空间曲线的弧长所使用的方法是: 以内接折线的长作为曲线弧长的一个近似值, 令内接折线的边数无限增加, 其极限就定义为曲线的弧长. 当曲线具有参数方程表示时, 这样的极限可以利用定积分进行计算.




具体过程如下. 在曲线 $L$ 上作内接折线 $AM_1M_2\cdots M_{n-1}B$, 分割:

$$T:\ \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

的各分点是各顶点所对应的参数值, 则这条折线的总长度为

$$\begin{aligned} l(T) &= \sum_{i=1}^{n} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [z(t_i) - z(t_{i-1})]^2}. \end{aligned}$$

对每一个分量分别使用微分中值公式可得

$$l(T)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\eta_i)+z'^2(\zeta_i)}\,\Delta t_i,$$

其中 $t_{i-1}<\xi_i,\eta_i,\zeta_i<t_i$, $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. 注意到上式并不是严格的 Riemann 和的形式, 因此我们需要做一点修正, 使其近似一个 Riemann 和.

因为 $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ 是连续的, 所以

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\sqrt{x'^2(\xi)+y'^2(\eta)+z'^2(\zeta)}$$

是定义在三维闭区间 $[\alpha,\beta]^3$ 上的连续函数, 因此一致连续, 故对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$. 当 $\|T\|:=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta t_i<\delta_1$ 时, 对任何 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in[t_{i-1},t_i]^3(i=1,2,\cdots,n)$ 都有

$$\left|\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\eta_i)+z'^2(\xi_i)}-\sqrt{x'^2(t_i)+y'^2(t_i)+z'^2(t_i)}\right|<\varepsilon.$$

因为 $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$, 故当 $\|T\| < \delta_1$ 时

$$\left| l(T) - \sum_{i=1}^{n} |\vec{r}'(t_i)|\Delta t_i \right| < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = \varepsilon(\beta - \alpha).$$

也就是说, $l(T)$ 与一个严格的 Riemann 和的形式 $\sum_{i=1}^{n} |\vec{r}'(t_i)|\Delta t_i$ 相差很小.

又因 $|\vec{r}'(t)|$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的连续, 所以可积. $|\vec{r}'(t)|$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的 Riemann 和的极限也就是 $|\vec{r}'(t)|$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的积分. 用 "$\varepsilon - \delta$" 语言来描述, 就是存在 $\delta_2 > 0$, 当 $\|T\| < \delta_2$ 时

$$\left| \sum_{i=1}^{n} |\vec{r}'(t_i)|\Delta t_i - \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{r}'(t)| dt \right| < \varepsilon.$$

因此, 取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. 于是当 $\|T\| < \delta$ 时就有

$$\left| l(T) - \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{r}'(t)| dt \right| < \varepsilon(\beta - \alpha + 1).$$

即 $L$ 的弧长可定义为

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}|\vec{r}'(t)|dt=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt. \tag{9.1}$$

当曲线 $L$ 是逐段光滑曲线时, 可以逐段考虑曲线的弧长, 对应上式右边的积分, 也就是在 $[\alpha,\beta]$ 上的分段积分.

如果平面曲线是由显表示 $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ 给出, 首先可以把它看成是参数表示的特殊情况

$$\vec{r}(x)=(x,f(x),0),\quad x\in[a,b]$$

其中, $x$ 是参数, 则弧长公式为

$$s=\int_a^b|\vec{r}'(x)|dx=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

我们在前面的章节中曾经也推导出这样的结果.

**$3^\circ$ 弧长参数** 在 $L$ 上取一动点 $M(t)$, 则从起点 $A$ 到动点 $M(t)$ 的弧 $\overset{\frown}{AM}$ 的长为

$$s(t)=\int_\alpha^t \sqrt{x'^2(\tau)+y'^2(\tau)+z'^2(\tau)}\,d\tau=\int_\alpha^t |\vec{r}'(\tau)|\,d\tau.$$

当 $M$ 在 $L$ 上变化时, 弧长 $s=s(t)$ 是一个变上限的积分, 因此确定了一个 $t$ 的函数. 这个函数如下性质:

其一是 $s(\alpha)=0,\ \ s(t)>0$ ( 长度总是正的 ).

其二对 $t$ 求导得

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}=|\vec{r}'(t)|.$$

因此, 只要 $|\vec{r}'(t)|\neq 0$, 函数是严格单调增的 ( 从几何上看, 随着动点向远处延伸, 长度总是严格增加的 ).

所以函数 $s = s(t)$ 有反函数 $t = t(s)$, 也就是参数 $t$ 可以表示成 $s$ 的函数. 代入曲线的参数方程表示, 得

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}(t(s))$$

或者

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$

也就是说, 曲线可以用以弧长 $s$ 为参数的参数方程来表示.

因为弧长参数 $s$ 是一个几何量, 它是曲线本身所固有的, 不随参数表示的不同而改变. 因此我们把由曲线固有的几何量弧长做为参数的曲线的参数方程表示称为空间曲线的自然方程.

另一方面, 通过微分公式

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt = |\vec{r}'(t)|\, dt,$$

有

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

这就是空间曲线的弧长微分公式. 如果把 $ds$ 看成是弧长的微元长度, 则 $dx$, $dy$, $dz$ 分别是 $ds$ 在三个坐标轴上的投影, 因此上式可以看成是微元形式的勾股定理.

因为

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$

所以

$$|d\vec{r}| = |\vec{r}'(t)| \cdot |dt|,$$

如果 $\vec{r} = \vec{r}(s)$ 对 $s$ 求导, 则

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}\right| = 1.$$

或写成

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1.$$

也就是说, 在自然参数方程下, $\vec{r}(s)$ 对弧长 $s$ 的微商是曲线 $L$ 在点 $M(s)$ 处的单位切向量, 并指向弧长 $s$ 的增加方向. 若记这个切向量的三个方向余弦为 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 则有

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\quad \frac{dy}{ds}=\cos\beta,\quad \frac{dz}{ds}=\cos\gamma.$$

平面曲线 $\vec{r}=(x(t), y(t))$ 可以看成特殊的空间曲线 $\vec{r}=\vec{r}(x(t), y(t), 0)$, 由此再次得到曲线段 $L:\ \vec{r}=(x(t), y(t)), t\in[\alpha,\beta]$ 的弧长公式

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

对于逐段光滑曲线, 其弧长可定义为各段光滑曲线弧长之和.

$4^\circ$ **曲率** 以下总假定正则曲线 $L:\ \vec{r}=\vec{r}(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 具有连续的二阶导数.

由于切向量 $\dot{\vec{r}}$ 是单位向量：$\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}=1$, 故有

$$\frac{d}{ds}(\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}})=2\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}=0.$$

上式说明只要 $\ddot{\vec{r}}\neq\vec{0}$, $\ddot{\vec{r}}$ 和切向量 $\dot{\vec{r}}$ 是正交的, 因此它是 $L$ 的一个法向量, 称为 $L$ 的主法向量. 记

$$\vec{\kappa}=\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}},$$

它与 $\dot{\vec{r}}$ 也是正交的, 称其为 $L$ 的副法向量. 不难看出

$$|\vec{\kappa}|=|\ddot{\vec{r}}|.$$

设曲线 $L$ 上一段长度为 $\Delta s$ 的弧为 $\overset{\frown}{M_1M_2}$, 弧上切向量总转角为 $\Delta\alpha$. 则 $\bar{\kappa}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 就是这个弧段上单位弧长转动角的平均值, $\bar{\kappa}$ 的大小就描述了这一段弧的弯曲程度, 称为这段弧的平均曲率.

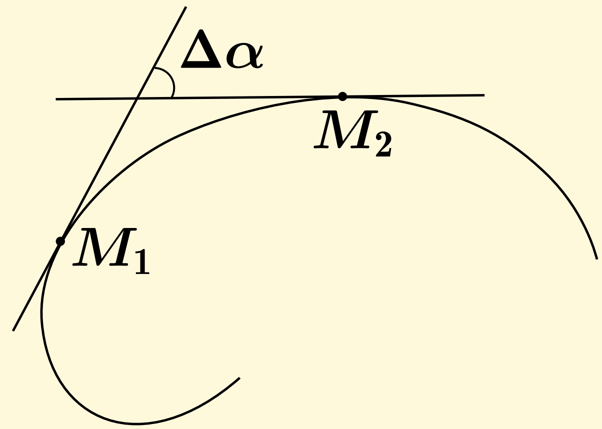



图 9.1

记 $L$ 上两点 $M_1$ 和 $M_2$ 处的单位切向量为 $\dot{\vec{r}}_1$ 和 $\dot{\vec{r}}_2$, 则

$$|\Delta\alpha|\approx|\Delta\dot{\vec{r}}|,$$

所以

$$\kappa=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\dot{\vec{r}}}{\Delta s}\right|=|\ddot{\vec{r}}|=|\vec{\kappa}|$$

就定义为曲线的曲率.

利用一般参数与弧长参数的关系,可以推导出曲率依赖于一般参数的表

示, 因为

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\,\vec{r}\,'(t)|}.$$

于是主法向量为

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}} = \frac{d\dot{\vec{r}}}{ds} &= \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d}{dt}\frac{\vec{r}\,'(t)}{|\,\vec{r}\,'(t)|} \\
&= \frac{1}{|\,\vec{r}\,'(t)|}\left(\frac{\vec{r}\,''(t)}{|\,\vec{r}\,'(t)|} + \left(\frac{d}{dt}\frac{1}{|\,\vec{r}\,'(t)|}\right)\vec{r}\,'(t)\right) \\
&= \frac{1}{(\,\vec{r}\,'(t))^2}\vec{r}\,''(t) + \frac{1}{|\,\vec{r}\,'(t)|}\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{|\,\vec{r}\,'(t)|}\right)\vec{r}\,'(t).
\end{aligned}$$

虽然, 主法向量的表达形式有些烦琐, 不过副法向量的表达形式就简洁得多. 由于 $\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,'(t) = \vec{0}$, 所以

$$\vec{\kappa} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\,\vec{r}\,'(t)|} \times \ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)}{|\,\vec{r}\,'(t)|^3}.$$

在一般参数表示下, 曲线的曲率的表达式为

$$\kappa = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}.$$

特别, 对于直线: $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v},\ t \in R$. 显然有 $\vec{r}''(t) = \vec{0}$, 故 $\kappa = 0$. 反之, 如果曲线 $L$ 的曲率恒为零, 那么它一定是一条直线.

设 $L$ 是 $Oxy$ 平面上的参数曲线:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant b).$$

放在 $Oxyz$ 空间中 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, 因此

$$\vec{\kappa} = \frac{(x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}) \times (x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j})}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}}\vec{k}.$$

即, 副法向量始终与 $z$ 轴平行. 称

$$\kappa = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}}$$

为 $L$ 的曲率. 注意, 平面曲线的曲率不取绝对值, $\kappa$ 的正负, 分别表示曲线的弯曲方向.

由于

$$\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{x'^2(t)}=\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)',$$

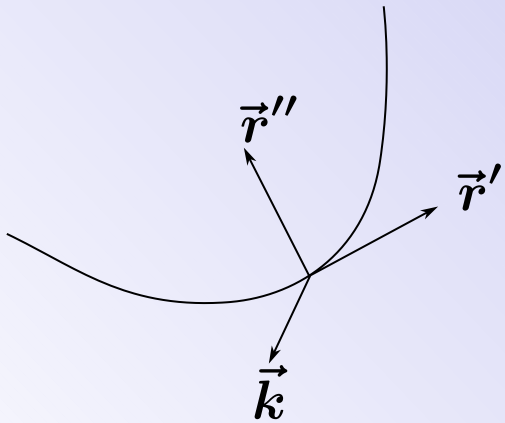



图 9.2

所以当 $\kappa>0$ 时, 切线斜率呈增加趋势, 这时 $\vec{r}'(t)$, $\vec{r}''(t), \vec{k}$ 成右旋系, 所以 $\vec{r}''(t)$ 指向曲线凹的一侧.

当 $\kappa<0$ 时, 切线斜率呈减少趋势, 这时 $\vec{r}'(t)$, $\vec{r}''(t), \vec{k}$ 成左旋系, 所以 $\vec{r}''(t)$ 还是指向曲线凹的一侧.

特别, 取参数是弧长时, 就知道主法向量总是指向曲线凹的一侧. 一个重

要的特例是曲线由显函数 $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 给出时,

$$\vec{\kappa} = \frac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^{3/2}}\vec{k},$$
$$\kappa = \frac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^{3/2}}.$$

$\kappa > 0$ 时, $f''(x) > 0$, 曲线呈凸形; $\kappa < 0$ 时, $f''(x) < 0$, 曲线呈凹形.