

中国科学技术大学
2020 ~ 2021 学年第一学期期末考试试卷

A 卷 B 卷

课程名称 复变函数 B 课程编号 001548
 考试时间 2020 年 12 月 13 日 8:30-10:30 考试形式 闭卷

姓 名 学 号

总 分		阅 卷 人	
-----	--	-------	--

1. (10 分) 将 $f(z) = \frac{1}{z-2} + e^{-z}$ 在 $z=0$ 处展开为幂级数, 并指出其收敛半径.
 解.

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2} + e^{-z} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^m}{m!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-2^{-n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}\right) z^n, \end{aligned}$$

收敛半径为 2.

2. (10 分) 将 $f(z) = \frac{1}{z^3 + 2z^2}$ 在 $1 < |z+1| < +\infty$ 展开为洛朗级数.
 解. 设 $w = 1/(z+1)$, 则 $0 < |w| < 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^3 + 2z^2} &= \frac{w^3}{(1-w)^2(1+w)} = \frac{w^3}{2} \left(\frac{1}{1-w^2} + \frac{1}{(1-w)^2} \right) \\ &= \frac{w^3}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+(-1)^n}{2} + n+1 \right) w^n = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-3-(-1)^n}{4} (z+1)^{-n}. \end{aligned}$$

3. (5 分) 计算 $(2020+i)(2-i)$.

解. $(2020+i)(2-i) = 4040 + 1 + 2i - 2020i = 4041 - 2018i$.

4. (5 分) 计算 $\text{Arc cos } 2$.

解. 设 $\cos z = 2$, 则 $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$,

$$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0.$$

于是 $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$, $iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2n\pi i$, 即 $z = 2n\pi \pm \ln(2 + \sqrt{3})i, n \in \mathbb{Z}$.

5. (10 分) 求 α 使得 $v(x, y) = \alpha x^2 y - y^3 + x + y$ 是调和函数, 并求虚部为 $v(x, y)$ 且满足 $f(0) = 1$ 的解析函数 $f(z)$.

解. 由 $v_{xx} + v_{yy} = 0$ 可知 $2\alpha y - 6y = 0$, 因此 $\alpha = 3$. (3 分) 设 $f = u + iv$, 则由柯西-黎曼方程,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 1,$$

因此 $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x + g(y)$. (3 分) 由于

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

即 $-6xy + g'(y) = -(6xy + 1)$, $g(y) = -y + c$, 从而

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x - y + c,$$

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + x - y + c + i(3x^2y - y^3 + x + y) = z^3 + (1 + i)z + c$$

(3 分). 由于 $f(0) = 1$, 因此 $c = 1$, $f(z) = z^3 + (1 + i)z + 1$. (1 分)

6. (30 分) 求积分 (所有路径均为逆时针)

(1) $\int_C (e^z + 3z^2 + 1)dz$, $C: |z| = 2, \operatorname{Re} z > 0$.

(2) $\int_C \frac{dz}{z(z-1)^2(z-5)}$, $C: |z| = 3$. (3) $\int_C \frac{dz}{(\sin z)(z+6)(z-5)}$, $C: |z| = 4$.

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 2x + 5} dx$. (5) $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + 2\sin^2 \theta)^2}$.

解. (1) 由于该函数解析, 因此

$$\int_C (e^z + 3z^2 + 1)dz = (e^z + z^3 + z)|_{-2i}^{2i} = e^{2i} - e^{-2i} - 12i = (2\sin 2 - 12)i.$$

(2) 该函数 f 在 $|z| < 3$ 中有 1 阶极点 0 和 2 阶极点 1, 且

$$\operatorname{Res}[f, 0] = -\frac{1}{5}, \quad \operatorname{Res}[f, 1] = \left(\frac{1}{z(z-5)} \right)' \Big|_{z=1} = \frac{5-2z}{z^2(z-5)^2} \Big|_{z=1} = \frac{3}{16},$$

因此该积分为

$$2\pi i \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{16} \right) = -\frac{\pi i}{40}.$$

(3) 该函数 f 在 $|z| < 4$ 中有 1 阶极点 0, π 且

$$\operatorname{Res}[f, 0] = -\frac{1}{30}, \quad \operatorname{Res}[f, \pi] = \frac{1}{(\pi+6)(5-\pi)},$$

因此该积分为

$$2\pi i \left(-\frac{1}{30} + \frac{1}{(\pi+6)(5-\pi)} \right) = \frac{\pi^2(\pi+1)i}{15(\pi+6)(5-\pi)}.$$

(4) 函数 $R(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 3}$ 在上半平面有 1 阶极点 $-1 + 2i$, 因此

$$\operatorname{Res}[R(z)e^{iz}, -1 + 2i] = \frac{e^{-2-i}}{4i} = \frac{-\sin 1 - i \cos 1}{4e^2},$$

原积分等于

$$\operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 5} dx \right] = \operatorname{Re} \left[2\pi i \frac{-\sin 1 - i \cos 1}{4e^2} \right] = \frac{\pi \cos 1}{2e^2}.$$

(5)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + 2\sin^2 \theta)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(2 - \cos 2\theta)^2} = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2(2 - \cos \theta)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4(2 - \cos \theta)^2}.$$

令 $z = e^{i\theta}$, 则原积分等于

$$\int_{|z|=1} \frac{zdz}{i(z^2 - 4z + 1)^2}.$$

设被积函数为 $f(z)$, 则 f 在 $|z| < 1$ 上有 2 阶极点 $2 - \sqrt{3}$, 且

$$\operatorname{Res}[f, 2 - \sqrt{3}] = \left[\frac{1}{i(z - 2 - \sqrt{3})^2} - \frac{2z}{i(z - 2 - \sqrt{3})^3} \right] \Big|_{z=2-\sqrt{3}} = \frac{1}{6\sqrt{3}i}.$$

从而原积分等于

$$2\pi i \cdot \frac{1}{6\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

7. (10 分) 求方程 $z^8 + e^z + 6z + 1 = 0$ 在 $1 < |z| < 2$ 中根的个数, 并说明理由.

解. 由于在 $|z| = 1$ 上

$$|z^8 + e^z + 1| \leq 1 + e + 1 < 6 = |6z|,$$

由罗歇定理, 该方程在 $|z| < 1$ 中有 1 个根. 由于在 $|z| = 2$ 上

$$|6z + e^z + 1| \leq 12 + e^2 + 1 < 2^8 = |z^8|,$$

由罗歇定理, 该方程在 $|z| < 2$ 中有 8 个根. 从而该方程在 $1 < |z| < 2$ 中有 7 个根.

8. (10 分) 利用拉氏变换解微分方程

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = te^t \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

解. 设 $Y = Ly$, 则

$$p^2Y + 2pY + Y = \frac{1}{(p-1)^2},$$

$$Y = \frac{1}{(1+p)^2(1-p)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-1} \right),$$

$$y = L^{-1}Y = \frac{1}{4}(te^t + te^{-t} + e^{-t} - e^t).$$

9. (10 分) 设 f 是域 $|z| > r > 0$ 上的解析函数. 证明: 如果对于 $|a| > R > r$, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(a)$, 则积分

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0.$$

证明. 设 $R' > |a|$, 则函数 $\frac{f(z)}{z-a}$ 在 $|z| > R'$ 上解析, 因此由多连通区域的柯西积分定理, 对任意 $R'' > R' + |a|$,

$$\int_{|z|=R'} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

由长大不等式

$$\left| \int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)}{z-a} dz - 2\pi i f(a) \right| = \left| \int_{|z-a|=R''} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \right| \leq 2\pi \max_{|z-a|=R''} |f(z) - f(a)|.$$

令 $R' \rightarrow +\infty$, 则

$$\int_{|z|=R'} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a).$$

设 D 为区域 $R < |z| < R'$, C 为其边界. 由多连通区域的柯西积分定理

$$\int_{|z|=R'} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a),$$

因此

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0.$$