



(4) 求  $I = \int_0^1 dy \int_0^\pi x \cos xy \, dx$ .

解 令  $D = [0, \pi] \times [0, 1]$ ,

$$I = \iint_D x \cos xy \, dx dy = \int_0^\pi dx \int_0^1 x \cos xy \, dy = \int_0^\pi \sin x \, dx = 2.$$

建议: 交换积分次序给3分, 算对结果再得2分.

(5) 已知  $z = z(x, y)$  是由方程  $f(yz, y - x) = 0$  所确定的隐函数, 其中  $f$  具有连续的一阶偏导数, 且  $f'_1(yz, y - x) \neq 0$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

解 令  $F(x, y, z) = f(yz, y - x)$ , 则  $F'_x = f'_1 \cdot 0 + f'_2 \cdot (-1) = -f'_2$ ;  $F'_y = z f'_1 + f'_2$ ;  $F'_z = y f'_1$ . 因此

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{f'_2}{y f'_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{z f'_1 + f'_2}{y f'_1}.$$

建议: 这道题的步骤总共5个算式, 每式1分.

(6) 计算  $I = \iint_D \frac{1 + xy}{1 + x^2 + y^2} \, dx dy$ , 其中区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ .

解 区域  $D$  关于  $x$  轴对称, 记  $D_1 : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1$ , 由奇偶对称性, 可得

$$I = \iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \, dx dy + 0 = 2 \iint_{D_1} \frac{r}{1 + r^2} \, dr d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1 + r^2} \, dr = \frac{\ln 2}{2} \pi.$$

建议: 利用了奇偶性化简得1分; 后面利用极坐标换元得2分, 最终算对

结果再得2分.

(7)  $I = [1, 2] \times [3, 4]$  上有连续的二阶偏导数, 求积分  $I = \iint_I \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \, dx dy$ .

答  $I = f(2, 4) + f(1, 3) - f(1, 4) - f(2, 3)$ .

建议:

$$I \stackrel{2分}{=} \int_1^2 dx \int_3^4 \frac{\partial}{\partial y} (f'_x) dy \stackrel{2分}{=} \int_1^2 (f'_x(x, 4) - f'_x(x, 3)) dx \stackrel{1分}{=} (f(x, 4) - f(x, 3)) \Big|_1^2.$$

二、(10分)求函数 $z = (x^2 + y)e^{2x+y}$ 的极值.

解  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x^2 + y + x)e^{2x+y} = 0$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x^2 + y + 1)e^{2x+y} = 0$  得驻点 $(1, -2)$ , 4分  
进一步有

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} \Big|_{(1,-2)} = 6, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,-2)} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} \Big|_{(1,-2)} = 1,$$

4分

则 $AC - B^2 > 0$ , 且 $A > 0$ , 故极小值为 $z(1, -2) = -1$ .

2分

三、(12分)计算 $I = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ , 其中 $V$ 由 $x^2 + y^2 = z^2$ 与平面 $z = 1$ 所围成.

$$\text{解 } I = \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq z^2} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z r^2 r dr = \frac{\pi}{10}.$$

建议: 给出切薄片的式子得4分, 在薄片上用极坐标换元再得4分, 最终算对结果再得4分.

$$\text{四、(10分) 设 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

求 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 沿方向 $\vec{e} = (\cos \theta, \sin \theta)$ 的方向导数, 其中 $\theta \in [0, 2\pi)$ , 并证明 $f$ 在 $(0, 0)$ 处不可微.

解

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{e}} \Big|_{(0,0)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + t \cos \theta, 0 + t \sin \theta) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{(t \cos \theta)^2 (t \sin \theta)^2}{((t \cos \theta)^2 + (t \sin \theta)^2)^{3/2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{t |t^3|}. \end{aligned} \quad 4分$$

所以 $f$ 只能在 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 方向上存在方向导数, 且值全为0. 2分

显然 $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ , 且若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 由公式 $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} \Big|_{(0,0)} = f'_x(0, 0) \cos \theta + f'_y(0, 0) \sin \theta = 0$ , 矛盾! 4分

五、(12分)计算旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 2x$ 所围成的空间区域 $\Omega$ 的体积.

解  $\Omega$ 在 $xoy$ 平面上的投影区域 $D$ 是 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 围成的圆盘, 其极坐标表示为:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \text{ 其中 } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta. \quad 2分$$

所以

$$\begin{aligned}
 V & \stackrel{3分}{=} \iint_D (2x - (x^2 + y^2)) dx dy \stackrel{2分}{=} \iint_{\substack{-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2 \cos \theta}} (2r \cos \theta - r^2) r dr d\theta \\
 & \stackrel{2分}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} (2r \cos \theta - r^2) r dr \stackrel{2分}{=} \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \stackrel{1分}{=} \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

六、(12分) 设  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ , 求证

$$\frac{(4\sqrt{2} - 4)\pi}{3} \leq \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + 2y - 2z + 3} dx dy dz \leq \frac{(4\sqrt{2} + 4)\pi}{3}.$$

证 设  $f(x, y, z) = x^2 + 2y - 2z + 3$ , 由于  $f'_y = 2 \neq 0$ ,  $f'_z = -2 \neq 0$ . 所以函数  $f$  在区域  $\Omega$  的内部无驻点, 必在边界上取得最值. 2分

令  $F(x, y, z, \lambda) = x^2 + 2y - 2z + 3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ . 1分

$$\text{由} \begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = 2 + 2\lambda y = 0, \\ F'_z = -2 + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \text{2分}$$

得出驻点为  $P_1 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $P_2 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ . 2分

而  $f(P_1) = 3 - 2\sqrt{2}$ ,  $f(P_2) = 3 + 2\sqrt{2}$ , 所以  $f(x, y, z)$  在闭区域  $\Omega$  上的最小值为  $3 - 2\sqrt{2}$ , 最大值为  $3 + 2\sqrt{2}$ . 显然,  $f$  与  $\sqrt{f}$  有相同的最值点, 所以  $\sqrt{f}$  的最小值是  $\sqrt{2} - 1$ , 最大值为  $\sqrt{2} + 1$ . 2分

所以有

$$\frac{(4\sqrt{2} - 4)\pi}{3} = \iiint_{\Omega} (\sqrt{2} - 1) dv \leq \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + 2y - 2z + 5} dv \leq \iiint_{\Omega} (\sqrt{2} + 1) dv = \frac{(4\sqrt{2} + 4)\pi}{3}.$$

3分

七、(9分) 设  $f(x, y)$  在  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  上有连续的二阶偏导数, 并满足  $f(0, 0) = f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$  以及  $(f''_{xx})^2 + 2(f''_{xy})^2 + (f''_{yy})^2 \leq 1$ .

$$\text{求证: } \left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{\pi}{4}.$$

证 在点(0,0)展开 $f(x,y)$ 得  $f(x,y) = \frac{1}{2} \left( x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \Big|_{(\theta x, \theta y)}$ , 其中 $\theta \in (0,1)$ . 3分

记 $(u, v, w) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \sqrt{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \Big|_{(\theta x, \theta y)}$ , 则

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(ux^2 + 2vxy + wy^2).$$

由于 $\|(u, v, w)\| = \sqrt{(f''_{xx})^2 + 2(f''_{xy})^2 + (f''_{yy})^2} \leq 1$ 及 $\|(x^2, \sqrt{2}xy, y^2)\| = x^2 + y^2$ , 于是利用Cauchy-Schwarz不等式有

$$|(u, v, w) \cdot (x^2, \sqrt{2}xy, y^2)| \leq x^2 + y^2,$$

即 $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ . 3分

从而

$$\begin{aligned} \left| \iint_D f(x,y) dx dy \right| &\leq \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2} \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 1}} r^2 \cdot r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad \text{3分}$$