“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套教辅

《力学与理论力学（第二版）》习题解答

杨维纮　秦　敢　编著

科学出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套教辅

《力学与理论力学（第二版）》

习题解答

杨维纮　秦　敢　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书是与中国科学技术大学的《力学与理论力学（第二版）》（分上、下两册）完全配套的习题解答，是学习力学与理论力学课程的配套辅导书. 本书旨在帮助学生理解课本的知识，加深对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，为学生提供完整而详细的课后习题答案，进而提高学习能力和应试水平，帮助学生巩固所学知识，也可以用来帮助学生完成考研备考学习.

本书分力学与理论力学两部分，其中力学部分（上册）包含 11 章，理论力学部分（下册）包含 4 章，章节的划分与教材一致，保持了其一贯的体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点，以进一步强调提高学生的综合素质并激发学生的创新能力.

图书在版编目 (CIP) 数据

《力学与理论力学（第二版）》习题解答 /杨维纮，秦敢编著. —北京：科学出版社，2016.1

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套教辅

ISBN 978-7-03-046754-6

Ⅰ. ①力… Ⅱ. ①杨… ②秦… Ⅲ. ①力学－高等学校－题解 ②理论力学－高等学校－题解 Ⅳ. ①O3-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 319925 号

责任编辑：窦京涛 王 刚 / 责任校对：张凤琴

责任印制：霍 兵 / 封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

安泰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 1 月第 一 版 开本：720×1 000 B5

2016 年 1 月第一次印刷 印张：15 1/2

字数：367 000

定价：36.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

《力学与理论力学（第二版）习题解答》将原教材《力学与理论力学（上册）（第二版）》和《力学与理论力学（下册）（第二版）》中各章的习题逐题解答，合并成一册，可与教材配套使用，也可以单独使用，其中上册的习题解答由杨维纮完成，下册的习题解答由秦敢完成.

习题是教材内容的再现、延续和补充，是教材中抽象原理的具体应用，做习题是学习过程中必不可少的一环. 而习题解答则可以给学习者提供一种“润滑剂”，在经过充分的独立思考，给出自己的解题方法之后，再参考一下习题解答不无裨益：如果相似，则有“英雄所见略同”的成就感；如果不同，则可以扩展解题思路甚至提升对原理理解的深度.

2012 年冬，以中国科学技术大学物理学院 2011 级 3 班为主的在学学生参加了《力学与理论力学（下册）（第二版）》的习题解答，并经助教王健同学和李伟伟同学初步整理汇总；2013 年冬，助教刘都把下册习题解答汇总的文件统一了格式，并对其中的一些错误进行了修正. 编者向参与了该工作的所有助教和同学们表达真诚的感谢！

尽管我们已经尽心尽力，但本解答难免还会有不妥之处，解题的技巧性也会有提升的空间. 希望广大读者不吝赐教，以便再版时及时改进.

编　者

2014 年 11 月于中国科学技术大学

目　　录

《力学与理论力学（上册）（第二版）》习题解答

《力学与理论力学（下册）（第二版）》习题解答

《力学与理论力学（上册）（第二版）》

习题解答

第 1 章　质点运动学

1.1　甲乙两列火车在同一水平直路上以相等的速率（30km/h）相向而行．当它们相隔 60km 时，一只鸟以 60km/h 的恒定速率离开甲车头向乙车头飞去，到达后立即返回，如此来回往返不止．试求：

（1）当两车头相遇时，鸟往返了多少次？

（2）鸟共飞行了多少时间及距离？

解　（1）无穷多次．

（2）
$$(v_{甲}+v_{乙})t=s$$

所以

$$t=\frac{s}{v_{甲}+v_{乙}}=\frac{60\text{km}}{30\text{km/h}+30\text{km/h}}=1\text{h}$$

鸟飞行的距离为

$$s_1=v_1t=60\text{km/h}\times1\text{h}=60\text{km}$$

1.2　一人从 O 点出发，向正东走 3.0m，又向正北走 1.0m，然后向东北走 2.0m，试求合位移的大小及方向．

解　建立复平面，利用复数运算

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3=3+\text{i}+(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\text{i})=(3+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})\,\text{i}=x+y\text{i}$$

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})^2}\approx5.03\,,\quad \theta=\arctan\frac{y}{x}=\arctan\frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\approx28^\circ40'$$

合位移的大小为 5.03m，方向为东偏北 $28^\circ40'$．

1.3　一物体做直线运动，它的位置由方程 $x=10t^2+6$ 决定，其中 x 的单位为 m，t 的单位为 s，试计算：

（1）在 3.00～3.10s、3.00～3.01s 及 3.000～3.001s 间隔时间内的平均速度；

（2）在 $t=3.00\,\text{s}$ 时的瞬时速度；

（3）用微分方法求它的速度及加速度公式．

解　（1）
$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

① 3.00～3.10s：

$$\overline{v}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{\left[10\times(3.10)^2+6\right]\text{m}-\left[10\times(3.00)^2+6\right]\text{m}}{3.10\text{s}-3.00\text{s}}=61.0\text{m/s}$$

② 3.00～3.01s：

$$\overline{v}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{\left[10\times(3.01)^2+6\right]\mathrm{m}-\left[10\times(3.00)^2+6\right]\mathrm{m}}{3.01\mathrm{s}-3.00\mathrm{s}}=60.1\mathrm{m/s}$$

③ 3.000～3.001s：

$$\overline{v}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{\left[10\times(3.001)^2+6\right]\mathrm{m}-\left[10\times(3.000)^2+6\right]\mathrm{m}}{3.001\mathrm{s}-3.000\mathrm{s}}=60.01\mathrm{m/s}$$

（2）$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\left[10(t+\Delta t)^2+6\right]-\left[10t^2+6\right]}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{20t\Delta t+10\Delta t^2}{\Delta t}=20t$

$=20\times 3\mathrm{m/s}=60\mathrm{m/s}$

（3）$$v=\dot{x}=20t,\qquad a=\dot{v}=\ddot{x}=20\mathrm{m/s^2}$$

1.4　有一质点沿 x 方向做直线运动，t 时刻的坐标为 $x=4.5t^2-2t^3$，式中 x 的单位为 m，t 的单位为 s. 试求：

（1）第 2s 内的位移和平均速度；

（2）第 1s 末和第 2s 末的瞬时速度；

（3）第 2s 内质点所走过路径的长度；

（4）第 2s 内的平均加速度以及第 0.5s 末和第 1s 末的瞬时加速度.

解　（1）$S=\Delta x=(4.5t_2^2-2t_2^3)-(4.5t_1^2-2t_1^3)=(4.5\times 2^2-2\times 2^3)-(4.5\times 1^2-2\times 1^3)$

$=-0.5(\mathrm{m})$

$$\overline{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-0.5\mathrm{m}}{1\mathrm{s}}=-0.5\mathrm{m/s}$$

（2）$$v=\dot{x}=9t-6t^2$$

$$v_1=9\times 1-6\times 1=3(\mathrm{m/s}),\quad v_2=9\times 2-6\times 2^2=-6(\mathrm{m/s})$$

（3）由（2）可知在第 2s 内有一点使 $v=0$，则 $t=\dfrac{3}{2}\mathrm{s}$.

$1\sim\dfrac{3}{2}\mathrm{s}$ 时间段：

$$\Delta x_1=\left|(4.5\times 1^2-2\times 1^3)-\left(4.5\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\times\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)\right|=0.875(\mathrm{m})$$

$\dfrac{3}{2}\sim 2\mathrm{s}$ 时间段：

$$\Delta x_2=\left|\left(4.5\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\times\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)-(4.5\times 2^2-2\times 2^3)\right|=1.375(\mathrm{m})$$

$$S=\Delta x_1+\Delta x_2=2.25\mathrm{m}$$

（4）由（2）知第 2s 内的平均加速度为

$$\overline{a}=\frac{v_2-v_1}{\Delta t}=\frac{-6\text{m/s}-3\text{m/s}}{1\text{s}}=-9\text{m/s}^2$$

$a=\ddot{x}=9-12t$，第 0.5s 末和第 1s 末的瞬时加速度为

$$a_1=9-12\times0.5=3(\text{m/s}^2)，\qquad a_2=9-12\times1=-3(\text{m/s}^2)$$

1.5　一物体从静止开始，先以 α 大小的切向加速度运动一段时间后，接着就以 β 大小的切向减速度运动直到停止. 若物体整个运动的时间为 t. 证明：物体运动的总路程为

$$s=\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}t^2$$

解　作图 1.5a，假设最大速度为 v_0，加速时间为 t_1，减速运动时间为 t_2，则有

$$\alpha t_1=\beta t_2=v_0，\quad t=t_1+t_2$$

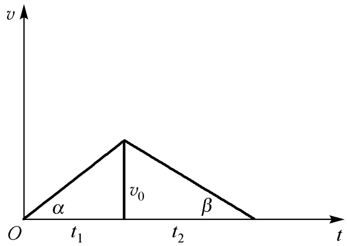


图 1.5a

解得

$$t_1=\frac{\beta t}{\alpha+\beta}，\quad t_2=\frac{\alpha t}{\alpha+\beta}$$

而 $S=\frac{1}{2}\alpha t_1^2+\frac{1}{2}\beta t_2^2$，将上式代入得

$$S=\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}t^2$$

1.6　一摩托车从静止开始以 α =1.6m/s^2 的匀加速度沿直线行驶，中途做一段匀速运动，后又以 β = 6.4m/s^2 的匀减速度沿直线行驶直至停止. 若这样地走了 L = 1.6km，共用了 $t=130$s 的时间，试求车的最高行驶速度 v.

解　作图 1.6a，设最高行驶速度为 v_m.

则图形下底为 $t=130$，上底为 $t'=t-\frac{v_\text{m}}{\alpha}-\frac{v_\text{m}}{\beta}$.

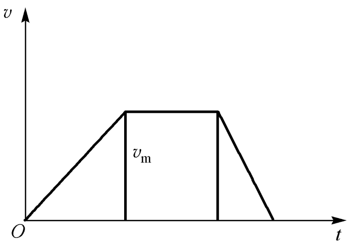


图 1.6a

该梯形的面积为行驶的路程，即

$$L=\frac{1}{2}(t+t')v_\text{m}=\frac{1}{2}\left(2t-\frac{v_\text{m}}{\alpha}-\frac{v_\text{m}}{\beta}\right)v_\text{m}$$

整理得

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)v_\text{m}^2-2tv_\text{m}+2L=0$$

解为

$$v_{\mathrm{m}} = \frac{\alpha\beta t \pm \sqrt{\alpha^2\beta^2t^2 - 2L\alpha\beta(\alpha+\beta)}}{\alpha+\beta}$$

代入题设参数解得

$$v_{\mathrm{m}} = \frac{\alpha\beta t - \sqrt{\alpha^2\beta^2t^2 - 2L\alpha\beta(\alpha+\beta)}}{\alpha+\beta} = 12.8\mathrm{m/s}$$

注意：另有一解

$$v_{\mathrm{m}} = \frac{\alpha\beta t + \sqrt{\alpha^2\beta^2t^2 - 2L\alpha\beta(\alpha+\beta)}}{\alpha+\beta} = 320\mathrm{m/s}$$

但该解不合题意，这是因为中途做一段匀速运动的时间应该大于零，但该解为

$$t' = t - \frac{v_{\mathrm{m}}}{\alpha} - \frac{v_{\mathrm{m}}}{\beta} = 130 - \frac{320}{1.6} - \frac{320}{6.4} = 130 - 200 - 50 = -120 < 0$$

1.7 用上题的 α、β、L 的数值求：

（1）车走这段路程所需的最短时间；

（2）这时车的最高速度.

解 要使 t 最小，应当使该图形为三角形，即 $t'=0$ 时，则

$$t = \frac{v_{\mathrm{m}}}{\alpha} + \frac{v_{\mathrm{m}}}{\beta}, \qquad L = \frac{1}{2}tv_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}v_{\mathrm{m}}^2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

得

$$v_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{2L}{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}}} = \sqrt{\frac{2L\alpha\beta}{\alpha+\beta}} = 64\mathrm{m/s}$$

$$t = v_{\mathrm{m}}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) = \frac{(\alpha+\beta)v_{\mathrm{m}}}{\alpha\beta} = 50\mathrm{s}$$

1.8 若要求把一辆静止在某一地点的小车在最短时间内推到另一个地点，并静止在那里. 这两个地点的路程为 L，如果小车的加速性能限制它的切线加速度的绝对值只能是 a，要满足上述要求，小车前进的最大速度 v 应为多大？

解 方法同第 1.7 题.

此时，$\alpha=\beta=a$

$$L = \frac{1}{2}tv_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}v_{\mathrm{m}}^2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{2}vm_{\mathrm{m}}^2\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{v_{\mathrm{m}}^2}{a}$$

得最大速度为

$$v = v_{\mathrm{m}} = \sqrt{La}$$

1.9　在一个很长的平直跑道上，有 A 和 B 两种型号的喷气式飞机进行飞行试验. 两机同时自起点启动，A 机沿地面做匀加速飞行，到达跑道中点起它就做匀速飞行；B 机则在启动后始终做匀加速运动. 观测中发现 A，B 两喷气机用完全相等的时间从起点开始到终点完成整个试验距离. 问两者的加速度比是多大？

解　设 A 机加速时间为 t_1，匀速时间为 t_2，则有

$$\frac{1}{2}a_A t_1^2+(a_A t_1)t_2=\frac{1}{2}a_B(t_1+t_2)^2\,,\qquad \frac{1}{2}a_A t_1^2=(a_A t_1)t_2$$

由上式解得

$$t_1=2t_2\,,\qquad \frac{a_A}{a_B}=\frac{\frac{1}{2}(t_1+t_2)^2}{\frac{1}{2}t_1^2+t_1t_2}=\frac{9}{8}$$

1.10　一个皮球从 1.5m 高处落到地板上，然后跳回到 1.0m 高处. 假设皮球与地板接触的时间为 0.010s，试问在接触期间，球的平均加速度多大？（忽略空气阻力）

解　取垂直向上的方向为正向. 由 $v^2=2gh$，求得球接触地板的速度和弹起的速度分别为

$$v_1=-\sqrt{2gh_1}\,,\qquad v_2=\sqrt{2gh_2}$$

球的平均加速度为

$$\overline{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{\Delta t}$$

代入数据：$h_1=1.5$，$h_2=1.0$，$\Delta t=0.010$，$g=9.8$，得

$$\overline{a}=\frac{\sqrt{2gh_2}-\left(-\sqrt{2gh_1}\right)}{\Delta t}=\frac{\sqrt{2\times9.8\times1}+\sqrt{2\times9.8\times1.5}}{0.01}\approx9.85\times10^2(\mathrm{m/s^2})$$

1.11　有一辆汽车，紧急刹车之后在路上滑行了 6.5m. 假设汽车的最大减速度不能超过重力加速度，试问在刹车之前，汽车的行驶速率能否超过 48km/h？

解　题设

$$a\leqslant g\,,\quad s=6.5\,\mathrm{m}$$

由

$$v^2=2as\leqslant2gs=2\times9.8\mathrm{m/s^2}\times6.5\mathrm{m}=127.4\mathrm{m^2/s^2}$$

得

$$v=\sqrt{127.4}\mathrm{m/s}=11.287\mathrm{m/s}\approx40.6\mathrm{km/h}<48\mathrm{km/h}$$

即在刹车之前，汽车的行驶速率不会超过 48km/h.

1.12　以速率 v_1 运动的火车上的司机，看见在前面距离 d 处，有一列货车在同

一轨道上以较小的速率 v_2 沿相同方向运动，他就立即刹车，使他的火车以匀减速度 a 慢下来，试证明：

如果 $d>\dfrac{(v_1-v_2)^2}{2a}$，则两车不会碰撞；如果 $d<\dfrac{(v_1-v_2)^2}{2a}$，则两车将会碰撞.

解　假设距离为 d_0 时两者刚好碰到，那么经过 t 时间后两者的速度应相同，距离为 0，即

$$d_0+v_2t=v_1t-\frac{1}{2}at^2,\qquad v_2=v_1-at$$

解得

$$d_0=\frac{(v_1-v_2)^2}{2a}$$

所以，当 $d>d_0=\dfrac{(v_1-v_2)^2}{2a}$ 时，两车不会相撞；当 $d<d_0=\dfrac{(v_1-v_2)^2}{2a}$ 时，两车会相撞.

1.13　已知一质点在 10s 内走过的路程 $s=30\text{m}$，而其速度增为 5 倍. 设这质点为匀加速运动，试求它的加速度.

解　设原速度为 v_0，10s 后的速度为 $v=5v_0$.

由

$$v^2-v_0^2=2as,\qquad v=v_0+at$$

得

$$a=\frac{4s}{3t^2}=0.4\text{m/s}^2$$

1.14　一小球从 80m 高的塔上自由落下. 同时，正对此球在地面上以 40m/s 的初速度竖直上抛另一小球，问过多少时间两球相遇？在什么高度相遇？（忽略空气阻力.）

解　两球相遇时，下落的小球和上抛的小球走的距离分别为

$$x_1=\frac{1}{2}gt^2,\qquad x_2=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

且 $x_1+x_2=80$，有

$$t=80\text{m}/v_0=2\text{s}$$

相遇的高度为

$$h=x_2=40\times2-\frac{1}{2}\times9.8\times2^2=60.4(\text{m})$$

1.15　从地面上竖直向上抛出一球，在球离地后的上升过程中，从 $t_1=2.0\text{s}$ 到 $t_1=3.0\text{s}$ 这一段时间内走了 $\Delta s=5.5\text{m}$ 的距离，试求从抛出到 $t=3.0\text{s}$ 时间内的平均速度.（不计空气阻力.）

解　由路程与时间关系可知

$$\begin{cases} x_1 = v_0 t_1 - \dfrac{1}{2} g t_1^2 \\ x_2 = v_0 t_2 - \dfrac{1}{2} g t_2^2 \end{cases}$$

$$\Delta s = x_2 - x_1 = v_0(t_2 - t_1) - \frac{1}{2} g(t_2^2 - t_1^2) = v_0 \times 1\text{s} - \frac{1}{2} g \times 5\text{s}^2 = v_0 - \frac{5}{2} g$$

$$\overline{v} = \frac{x_2}{t_2} = v_0 - \frac{1}{2} g t_2 = \Delta s + \frac{5}{2} g - \frac{1}{2} g \times 3\text{s} = 5.5 + \frac{1}{2} \times 2 \times 9.8 = 15.3(\text{m/s})$$

1.16　把两个小物体从同一地点（地面）以同样的初速率 $v_0 = 24.5\ \text{m/s}$ 先后竖直上抛，设两物体抛出的时间差 $\Delta t = 0.500\ \text{s}$，试问：

（1）第二个物体抛出后经多少时间方与第一个物体相碰？

（2）如果 $\Delta t > 2v_0 / g$，那么结果的物理意义怎样？（不计空气阻力.）

解　（1）设第二个物体抛出后经 t 时间与第一个物体相碰，有

$$x_1 = v_0(t + \Delta t) - \frac{1}{2} g(t + \Delta t)^2, \qquad x_2 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

令 $x_1 = x_2$，得

$$t = \frac{v_0}{g} - \frac{\Delta t}{2} = \frac{24.5}{9.8} - \frac{0.5}{2} = 2.25\ (\text{s})$$

即第二个物体抛出后经 2.25s 后与第一个物体相碰.

（2）如果 $\Delta t > \dfrac{2v_0}{g}$，有 $x_1 < 0$ 时，即第二个球还没抛，第一个球已落地了.

1.17　由楼上以同样大小的初速率 v_0 同时抛掷两物体，一物竖直上抛，另一物竖直下抛，略去空气阻力，求这两个物体之间的距离 s 与时间 t 的关系.

解　上抛球 $x_1 = v_0 t - \dfrac{1}{2} g t^2$，下抛球 $x_2 = -v_0 t - \dfrac{1}{2} g t^2$.

$$s = x_1 - x_2 = 2v_0 t$$

1.18　一升降机以 $a = 2\text{g}$ 的加速度从静止开始上升，它里面有一用细绳吊着的小球，在 2.0s 末，小球因绳子断了而往下落. 设小球原来到底板的距离为 $h = 2.0\ \text{m}$. 略去空气阻力，试求：

（1）小球下落到底板所需的时间 t；

（2）小球相对于地面下落的距离 s.

解　（1）规定向上的方向为正向.

$t_0 = 2.0\text{s}$ 末小球速度为

$$v_0 = a t_0 = 2 g t_0$$

以后小球做初速为 v_0 的竖直上抛运动

$$x_1 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

升降机

$$x_2 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

当 $x_1 + h = x_2$ 时，小球下落到底板上，即

$$v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + h = v_0 t + \frac{1}{2}2gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{3g}} = \sqrt{\frac{2\times 2.0\text{m}}{3\times 9.8\text{m}/\text{s}^2}} \approx 0.37\text{s}$$

即小球下落到底板所需的时间约 0.37s.

（2）小球相对于地面下落的距离为

$$s = x_1 = 2gt_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 2\times 9.8\text{m/s}^2 \times 2.0\text{s} \times 0.37\text{s} - \frac{1}{2}\times 9.8\text{m/s}^2 \times (0.37\text{s})^2 \approx 13.8\text{m}$$

故实际上小球相对于地面上升了距离 13.8m.

1.19　自由落体在最后半秒钟内落下的距离为 $h_1 = 20\,\text{m}$，试求下落的总高度 h.

解　由题设得

$$x_1 = \frac{1}{2}gt^2, \qquad x_2 = \frac{1}{2}g\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 = x_1 + h_1 = h$$

解得

$$t = \frac{2h_1}{g} - \frac{1}{4} = \frac{2\times 20}{9.8} - \frac{1}{4} = 3.83(\text{s})$$

$$h = h_1 + x_1 = h_1 + \frac{1}{2}g\left(\frac{2h_1}{g} - \frac{1}{4}\right)^2 \approx 92\text{m}$$

1.20　在高度 $h = 40\text{m}$ 处竖直抛出一物体，问初速度 v_0 为多大时，才能使它比自由落下（1）早 $t = 1\,\text{s}$，（2）迟 $t = 1\,\text{s}$ 落到地上？（不计空气阻力.）

解　规定向下运动为正.

（1）自由落体

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

以初速度 v_0 竖直抛出

$$v_0t' + \frac{1}{2}gt'^2 = h\,, \qquad t' = t - 1$$

解得

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\times 40}{9.8}} = 2.86\,(\mathrm{s}),\quad v_0 = \frac{g(2t-1)}{2(t-1)} = 12.4\mathrm{m/s}$$

故应以初速度 12.4m/s 竖直向下抛出.

（2）
$$v_0t' + \frac{1}{2}gt'^2 = h\,,\quad t' = t + 1$$

解得

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\times 40}{9.8}} = 2.86\,(\mathrm{s}),\qquad v_0 = -\frac{g(2t+1)}{2(t+1)} = -8.53\mathrm{m/s}$$

故应以初速度 8.53m/s 竖直向上抛出.

1.21　一轰炸机离地面 10km，以 240km/h 的水平速度，向其轰炸目标的正上空飞行. 问当瞄准角（瞄准器到目标的视线与竖直线所成的角）φ 为多大时投下炸弹，才能正好击中目标？（略去空气阻力.）

解　已知

$$g = 9.8\mathrm{m/s^2}\,,\qquad h = 10^4\,\mathrm{m}\,,\qquad v = 2.4\times 10^5\,\mathrm{m/h} = \frac{200}{3}\mathrm{m/s}$$

设击中目标用时 t，则 $\frac{1}{2}gt^2 = h$，得

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

由几何关系

$$\tan\varphi = \frac{vt}{h} = v\sqrt{\frac{2}{gh}} = 0.301$$

解得

$$\varphi = \arctan 0.301 \approx 16^\circ 45'$$

1.22　一轰炸机离海面 10km，以 240km/h 的水平速度追击正前方一鱼雷艇，鱼雷艇的速度是 95km/h，不计空气阻力，问飞机应在艇后多少距离投弹才能正好击中目标？

解　飞机相对艇的速度

$$v_{相} = 145\mathrm{km/h} \approx 40.28\mathrm{m/s}$$

设击中需用时 t，

$$\frac{1}{2}gt^2 = h\,,\qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

故飞机应在艇后

$$s = v_{相} \times t = v_{相} \times \sqrt{\frac{2h}{g}} = 40.28 \times \sqrt{\frac{2\times 10^4}{9.8}} \approx 1820(\text{m})$$

即飞机应在艇后 1820m 投弹才能正好击中目标.

1.23　一俯冲轰炸机沿与竖直成 37° 方向俯冲，在 800m 高度投弹，炸弹离飞机 5.0s 时着地. 不计空气阻力，试问：

（1）飞机的飞行速度是多少？

（2）炸弹离开飞机后在水平方向前进多远？

（3）炸弹着地时，速度的大小和方向如何？

解　（1）　$\alpha = 37^\circ$，$\cos\alpha = 0.8$，$v_0 \cos\alpha \times t + \frac{1}{2}gt^2 = h$

将 $t = 5\text{s}$，$g = 9.8\text{m/s}^2$，$h = 800\text{m}$ 代入得飞机的飞行速度为

$$v_0 = \frac{h - gt^2/2}{t\cos\alpha} = 169\text{m/s}$$

（2）　$s = v_0 \sin\alpha \times t,\quad t = 5\text{s},\quad \sin\alpha = 0.6$

代入得炸弹离开飞机后在水平方向前进了 $s = 507\text{m}$.

（3）着地时速度

$$v_{竖} = v_0\cos\alpha + gt = 184\text{m/s}$$

$$v_{水平} = v_0 \sin\alpha = 101\text{m/s}$$

速度大小为

$$v = \sqrt{v_{竖}^2 + v_{水平}^2} \equiv 210\text{m/s}$$

设速度与水平夹角 α，则 $\tan\alpha = v_{竖}/v_{水平} = 1.82$，即 $\alpha = 61^\circ$.

1.24　一小孩以 16m/s 的速度把一皮球抛到墙上，墙离小孩 5.0m 远. 问小孩应以什么方向抛球，才能使球在反射后的轨道的最高点刚好在小孩的头顶上方？（设球与墙的碰撞为完全弹性碰撞，略去空气阻力.）

解　设水平方向为 x 轴，竖直方向为 y 轴，抛前速度与竖直方向成 α 角.

由于运动的独立性，球在水平方向做匀速直线运动

$$v_x = v_0 \sin\alpha \qquad ①$$

碰墙后速度反向，但仍做匀速直线运动，球在竖直方向做匀减速运动

$$v_y = v_0\cos\alpha - gt \qquad ②$$

由题设，球到小孩的头顶上方时速度方向沿水平方向，即

$$v_y = v_0 \cos\alpha - gt = 0 \qquad ③$$

但

$$v_x t = 2s \qquad ④$$

题设

$$v_0 = 16\text{m/s}, \qquad s = 5\text{m} \qquad ⑤$$

由式①～式④解得

$$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4gs}{v_0^2}\right) = 0.5\arcsin 0.766$$

即 $\alpha = 65^\circ$ 或 25°.

1.25　在小山上安一靶子，由炮位所在处观测靶子的仰角为 α，炮与靶子间的水平距离为 L，向目标射击时，炮身的仰角为 β. 略去空气阻力，求能射中靶子的子弹的初速度 v_0.

解　由题设

$$v_0 t\cos\beta = L \qquad ①$$

$$v_0 t\sin\beta - \frac{1}{2}gt^2 = L\tan\alpha \qquad ②$$

联立式①和式②得

$$v_0 = \left(\frac{Lg\cos\alpha}{2\cos\beta\sin(\beta-\alpha)}\right)^{1/2}$$

1.26　炮弹的出膛速度为 400m/s，要射中水平距离为 1000m、高度为 330m 的目标. 不计空气阻力，试求炮的仰射角.

解　题设

$$\tan\alpha = \frac{330\text{m}}{1000\text{m}} = \frac{33}{100}, \quad v_0 = 400\text{m/s}, \quad L = 1000\text{m}$$

由 1.25 题的解 $v_0^2 = \dfrac{Lg\cos\alpha}{2\cos\beta\sin(\beta-\alpha)}$，得

$$2\beta - \alpha = \arcsin\left(\sin\alpha + \frac{Lg\cos\alpha}{v_0^2}\right) = \arcsin 0.371$$

解得 $\beta = 20^\circ 2'$ 或 $88^\circ 14'$.

1.27　设火箭引信的燃烧时间为 6.0s，在与水平成 45° 角的方向把火箭发射出去时，欲使火箭在弹道的最高点爆炸，不计空气阻力，问应以多大的初速度发射火箭？

解　设初速度 v_0，依题意 t 取 6s，$v_0 \sin 45^\circ = gt$，解得 $v_0 = 83\text{m/s}$.

1.28　一个球从楼梯顶上以 2.0m/s 的水平速度滑下，所有阶梯恰好都是 20cm 高，20cm 宽，问球首先撞在哪一级阶梯上？用草图画出.

解　设起始点为第零级台阶，由 $v_0 t < \dfrac{1}{2}gt^2$，得

$$t > \frac{2v_0}{g} = 0.4\text{s} \quad (g = 10\text{m/s}^2)$$

此时

$$h = \frac{1}{2}gt^2 > \frac{1}{2} \times 10\text{m/s}^2 \times (0.4\text{s})^2 = 80\text{cm}$$

即 $20n > 80$，有 $n = 5$，球首先撞在第五级台阶上.

1.29　一汽车在半径为 $R = 400\,\text{m}$ 的圆周上做变速运动，已知它的切向加速度的大小为 $a_t = 0.20\,\text{m/s}^2$，方向与速度方向相反，速度的大小为 10m/s，求这时它的法向加速度和总加速度.

解　法向加速度 $a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{1}{4}\text{m/s}^2$，即 $a_n = 0.25\text{m/s}^2$，总加速度 $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ $= 0.32\text{m/s}^2$.

1.30　一质点沿半径为 $R = 10\,\text{cm}$ 的圆周做匀速圆周运动，速率为 $v = 1.0\text{cm/s}$.

（1）求 $t = 0\,\text{s}$ 至 $t = 1\,\text{s}$ 的时间间隔内，平均加速度矢量与 $t = 0\,\text{s}$ 时的加速度矢量间的夹角；

（2）求 $t = 0\,\text{s}$ 至 $t = 0.1\text{s}$ 的时间间隔内，上述两个矢量间的夹角；

（3）若 $\Delta t \to 0$，问上述夹角趋于多少？

解　（1）平均加速度矢量即 Δv 的方向，走过弧长为

$$s = vt = 1\text{cm/s} \times 1\text{s} = 1\text{cm}$$

$\alpha = \dfrac{s}{R} = 0.1\text{rad}$，$v_0$ 与 Δv 成角 $90^\circ - \dfrac{\alpha}{2} = \left(\dfrac{\pi}{2} - 0.05\right)\text{rad}$.

又 v_0 与 a 垂直，故 Δv 与 a 夹角为 $\dfrac{\alpha}{2} = 0.05\text{rad}$，亦即平均加速度矢量与 $t = 0\text{s}$ 时加速度矢量夹角为 0.05rad.

（2）同（1）中解法知夹角为 0.005rad.

（3）由以上分析，夹角为 $\theta = \dfrac{1}{2}v\Delta t / R$，令 $\Delta t \to 0$，则 $\theta \to 0$.

1.31　一物体从静止出发沿半径 $R = 3.0\text{m}$ 的圆周运动，切向加速度为 $a_t = 3.0\text{m/s}^2$. 试问：

（1）经过多少时间它的总加速度 $\boldsymbol{a}$ 恰与半径成 45° 的角？

（2）在上述时间内物体所通过的路程 s 等于多少？

解　（1）$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_R$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 成 45° 角，则 $|\boldsymbol{a}_t|=|\boldsymbol{a}_R|$，题设 $a_t=3\text{m/s}^2$，得 $a_R=3\text{m/s}^2$，$\dfrac{v^2}{R}=a_R$，故 $v=\sqrt{Ra_R}=3\text{m/s}$，$v=a_t\cdot t$，$t=1\text{s}$.

（2）取自然坐标系

$$s=\frac{v^2}{2a_t}=1.5\text{m}$$

1.32　离水面高度为 h 的岸上有人用绳索拉船靠岸. 人以恒定速率 v_0 拉绳，求当船离岸的距离为 s 时，船的速度和加速度.

解　设绳长为 l，船离岸距离为 s，有

$$l^2=h^2+s^2 \qquad ①$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-v \qquad ②$$

题设

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=-v_0 \qquad ③$$

对式①微商得 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dfrac{l}{s}\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$，即速度为

$$v=\frac{l}{s}v_0=\frac{\sqrt{s^2+h^2}}{s}v_0 \qquad ④$$

题设 v_0 为常数，对式④微商，并利用式②和式③可得加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{v_0}{s}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}-\frac{v_0 l}{s^2}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_0^2}{s}+\frac{v_0 l}{s^2}v=-\frac{v_0^2}{s}+\frac{v_0^2 l^2}{s^3}=\frac{v_0^2 h^2}{s^3}$$

1.33　杆以匀角速 $\boldsymbol{\omega}_0$ 绕过其固定端 O 且垂直于杆的轴转动. 在 $t=0$ 时，位于 O 点的小珠从相对于杆静止开始沿杆做加速度为 $\boldsymbol{a}_0$ 的匀加速运动. 求小珠在时刻 t 的速度和加速度.

解　由于小珠是在水平面上运动，取极坐标得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_f=a_0t\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{1}{2}a_0\omega_0t^2\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

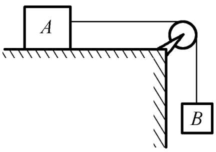
利用 $\dfrac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\omega_0$，$\dfrac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\mathrm{d}t}=-\hat{\boldsymbol{r}}\omega_0$，对上式微商得

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=a_0\hat{\boldsymbol{r}}+a_0t\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}a_0\omega_0 2t\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{2}a_0\omega_0t^2\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\mathrm{d}t}=\left(a_0-\frac{1}{2}a_0\omega_0^2t^2\right)\hat{\boldsymbol{r}}+2a_0\omega_0t\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

第 2 章　质点动力学

2.1　如题 2.1 图所示的装置可用来测物体 A 与桌面间的摩擦系数μ. 设已知 A，B 的质量分别是 m_A 和 m_B，它们的加速度是 a，试导出摩擦系数的表达式.

解　设绳中的张力为 T，对质点 A、B 使用牛顿第二定律得



题 2.1 图

$$\begin{cases} m_B g - T = m_B a \\ T - \mu m_A g = m_A a \end{cases}$$

解得

$$\mu = \frac{m_B(g-a) - m_A a}{m_A g}$$

2.2　两人分别将一小车以同样的加速度推上坡，一人的推力方向与斜面平行，以 F_1 表示，另一人的推力方向与水平面平行，以 F_2 表示. 设车与斜面的摩擦系数μ及斜面的倾角θ已知，求两人推力之比.

解　如图 2.2a 所示，对这两种情况分别隔离物体并列出方程

$$\begin{cases} N_1 = mg\cos\theta \\ f = \mu N_1 \\ F_1 - f - mg\sin\theta = ma \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_2 = mg\cos\theta + F_2\sin\theta \\ f = \mu N_2 \\ F_2\cos\theta - f - mg\sin\theta = ma \end{cases}$$

解得

$$F_1 = (\mu g\sin\theta + g\sin\theta + a)m\text{，}\qquad F_2 = \frac{m(a + g\sin\theta + \mu g\cos\theta)}{\cos\theta - \mu\sin\theta}$$

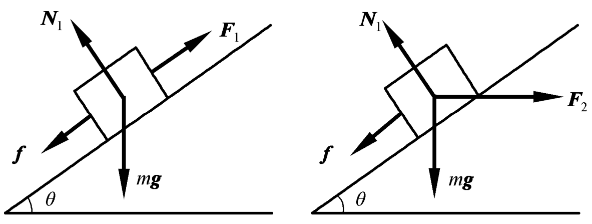


图 2.2a

所以

$$\frac{F_2}{F_1}=\frac{1}{\cos\theta-\mu\sin\theta}$$

2.3　用起重机吊起一个 4.0t 重的物件，吊索最多可承受 5.0t 的拉力，吊索本身重量可不计，求在下列各情况中吊索所承受的拉力：

（1）物件吊在空中静止；

（2）物件以 25cm/s 的速度匀速上升；

（3）物件以 80cm/s 的速度匀速下降；

（4）要使吊索不断，物体向上的最大加速度是多少？

解　（1）　$F=mg=4.0\text{tf}^{①}\approx3.92\times10^4\text{N}$（$g=9.8\text{m/s}^2$）

（2）　$F=mg=4.0\text{tf}\approx3.92\times10^4\text{N}$

（3）　$F=mg=4.0\text{tf}\approx3.92\times10^4\text{N}$

（4）　$F-mg=ma$，　$a=\dfrac{F}{m}-g=\dfrac{5\times10^3\times9.8}{4\times10^3}-9.8=2.45(\text{m/s}^2)$

2.4　一个学生要确定一个盒子与一块平板之间的静摩擦系数 μ_0 及滑动摩擦系数 μ. 他把盒子放在平板上，渐渐抬高板的一端，当板的倾角（板与水平之夹角）达 30°时，盒子开始滑动，并恰好在 4.0s 内滑下 4.0m 距离. 试用这些数据确定 μ_0 及 μ.

解　如图 2.4a 所示，隔离物体. 题设

$$\theta=30^\circ,\qquad s=4\text{m},\qquad t=4\text{s}$$

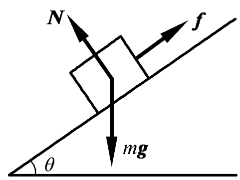


图 2.4a

（1）$mg\sin\theta=\mu_0 mg\cos\theta$，　$\mu_0=\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=0.577$

即静摩擦系数 $\mu_0=0.577$.

（2）

$$mg\sin\theta-\mu mg\cos\theta=ma,\qquad s=\frac{1}{2}at^2$$

$$\mu=\tan\theta-\frac{a}{g\cos\theta}=\tan\theta-\frac{2s}{gt^2\cos\theta}=0.518$$

即滑动摩擦系数 $\mu=0.518$.

2.5　一自重为 2.0t 的汽车，载 4.0t 重的货物，设汽车和货物的重心都在前后轴之间中点的正上方，欲使它以 0.2m/s^2 的加速度运动，问在忽略其他阻力的情况下，汽车主动轮的外胎和路面间的摩擦系数最小应是多少？分别就下面两种情形进行讨论：

（1）全部车轮都起主动作用；

（2）只有后边两个车轮起主动作用.

解　设该车有四个轮胎, 由于汽车和货物的重心都在前后轴之间中点的正上方，

① 吨力，$1\text{tf}=9.80665\times10^3\text{N}$.

故四个轮胎所受的地面正压力都相等，为 $mg/4$. 而主动轮所受的摩擦力是向前的（为静摩擦或滑动摩擦），从动轮所受的摩擦力是向后的（一般为静摩擦）.

（1）设汽车主动轮的外胎和路面间的摩擦系数为 μ_1，有

$$f = ma \leqslant 4\mu_1 \frac{m}{4} g, \qquad \mu_1 \geqslant \frac{a}{g} = \frac{0.2}{9.8} \approx 0.02$$

即汽车主动轮的外胎和路面间的摩擦系数最小应是 0.02.

（2）设汽车主动轮的外胎和路面间的摩擦系数为 μ_2，从动轮所受的摩擦力较小忽略不计，有

$$f = ma \leqslant 2\mu_2 \frac{m}{4} g, \qquad \mu_2 = \frac{2a}{g} = \frac{0.4}{9.8} \approx 0.04$$

即汽车主动轮的外胎和路面间的摩擦系数最小应是 0.04.

由该题可见路面情况相同时，增加主动轮的数量时汽车的爬坡能力增加.

2.6　某卡车载货重为卡车自重的三倍，卡车的前后轴相距 3.0m，货和车共同的重心在前后轴之间中点的正上方. 现发现该卡车驶上一个 10° 的斜坡时其主动轮（后轮）开始打滑，若要使该卡车驶上 15° 的斜坡，应把货物往后移动多少距离？（设两斜坡的摩擦系数相同.）

解　如图 2.6a 所示，设卡车质量为 m，货物为 $3m$，并设卡车有四个轮子（后两个为主动轮），由于题目没有具体说货和车共同的重心在前后轴之间中点的正上方多高的地方，不妨认为货和车共同的重心就在前后轴之间中点位置. 设摩擦系数为 μ，$\theta_1 = 10^\circ$，$\theta_2 = 15^\circ$.

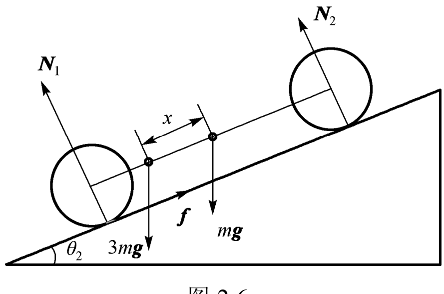


图 2.6a

由题设，卡车驶上一个 10° 的斜坡时，摩擦力已达最大静摩擦，此时四个轮子中的每个轮子所受的正压力都相等，为 $4mg\cos\theta_1 / 4 = mg\cos\theta_1$，后两个为主动轮的摩擦力与下滑力相等，即

$$2\mu mg\cos\theta_1 = 4mg\sin\theta_1$$

解得

$$\mu = 2\tan\theta_1$$

如图 2.6a 所示，设需要把货物往后移动 x 距离，N_1 和 N_2 分别是货物导致地面对每个后轮和每个前轮产生的正压力，有

$$\begin{cases} 2N_1 + 2N_2 = 3mg\cos\theta_2 \\ N_1(1.5 - x) = N_2(1.5 + x) \\ f \leqslant 2\mu(N_1 + mg\cos\theta_2 / 4) \\ f - 4mg\sin\theta_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$x \geqslant \frac{4}{\mu}\tan\theta_2 - 2 = \frac{2\tan\theta_2}{\tan\theta_1} - 2 = 1.039(\text{m})$$

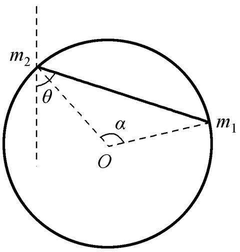
即应把货物往后移动至少 1.039m.

2.7　两个质量分别为 m_1 和 m_2 的小环，用细线连着套在一个竖直固定着的大圆环上，如果连线对圆心的张角为 α，如图所示，当小圆环与大圆环之间的摩擦力和线的质量都略去不计时，求证：连线与竖直方向的夹角 θ 满足

$$\tan\theta = \frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1}\cot\frac{\alpha}{2}$$

证明　如图 2.7a 所示，设圆环的支持力分别为 N_1、N_2，绳中张力为 T，由几何知识可得

$$\begin{cases}\alpha + 2\beta = \pi \\ \gamma_2 + \beta = \theta \\ \gamma_1 + \gamma_2 = \alpha\end{cases}$$



题 2.7 图

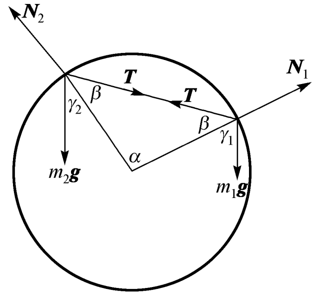


图 2.7a

解得

$$\begin{cases}\beta = (\pi - \alpha)/2 \\ \gamma_1 = (\pi + \alpha)/2 - \theta \\ \gamma_2 = \theta - (\pi - \alpha)/2\end{cases} \tag{①}$$

又

$$\begin{cases}m_2 g\sin\gamma_2 = T\sin\beta \\ m_1 g\sin\gamma_1 = T\sin\beta\end{cases} \tag{②}$$

于是 $m_1\sin\gamma_1 = m_2\sin\gamma_2$，由式①得

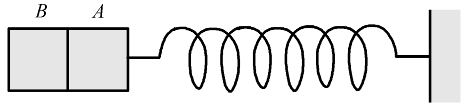
$$m_1\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right) + m_2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) = 0$$

化简后可得

$$\tan\theta = \frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1}\cot\frac{\alpha}{2}$$

2.8　质量均为 100g 的 A、B 两木块并排地放在光滑的水平面上，A 由一水平弹簧与墙壁连接着，弹簧的倔强系数为 $k = 2\times 10^6\,\text{dyn/cm}$①. 假若把 A、B 两木块向墙推进使弹簧压缩 2.0cm，使之静止，然后放手，弹簧便将两木块向外推开. 试问：

（1）在什么地方 B 将与 A 脱离？B 得到的速度等于多少？



题 2.8 图

（2）A、B 脱离后，A 将继续向外移动多少距离开始反向运动？

解　（1）分析可知，到达平衡位置前，A、B 一直做加速运动. 到达平衡位置时，A、B 间作用力为 0，而后 B 做匀速运动，A 做减速运动，A、B 分离，即在平衡位置处 A、B 分离. 分离前，A、B 可作为一个物体看待，设总质量为 m，平衡位置 $x = 0$，取向左的方向为 x 轴的正向，有方程

$$-kx = m\cdot\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

方程解为

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right),\qquad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right)$$

初始条件：

$$t = 0\text{时}，\quad x = x_0 = -0.02，\quad v_0 = 0$$

可解得

$$\varphi_0 = 0，\qquad A = -0.02，\qquad x = -0.02\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

A、B 脱离时，$x = 0$，可得

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\pi}{2}，\qquad v = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = 2\text{m/s}$$

即 B 的速度为 2m/s.

（2）A 与 B 脱离后，对于 A 有

$$-kx = m_1\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

方程解为

① 达因，$1\text{dyn}=10^{-5}\text{N}$.

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_1}}t + \varphi_0\right)$$

考虑初始条件：

$$t = 0\text{时}，\quad v_0 = 2\text{m/s},\quad x_0 = 0$$

解得

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}，\quad A = 2\sqrt{\frac{m_1}{k}} = \frac{\sqrt{2}}{100}$$

A 与 B 脱离后，A 的运动为

$$x = \frac{\sqrt{2}}{100}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

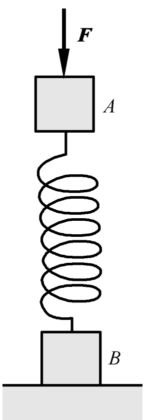
从而 A 向外运动的最大距离为

$$x_A = \frac{\sqrt{2}}{100}\text{m} = \sqrt{2}\text{cm}$$

2.9　质量分别为 m_A 和 m_B 的两物体 A、B，固定在倔强系数为 k 的弹簧两端，竖直地放在水平桌面上. 如图所示. 用一力 $\boldsymbol{F}$ 垂直地压在 A 上，并使其静止不动. 然后突然撤去 $\boldsymbol{F}$，问欲使 B 离开桌面，$\boldsymbol{F}$ 至少应多大？

解　欲使 B 恰好弹起，则 A 到达最高点时弹簧的伸长量至少应为 $x_1 = \dfrac{m_B g}{k}$. 假设力 $\boldsymbol{F}$ 作用下弹簧的压缩量为 x_0，则设弹簧无形变时 A 的坐标为 0，取竖直向下的方向为 x 轴正向（图 2.9a）. 在撤去 $\boldsymbol{F}$ 后且 B 离开桌面前 A 的运动方程为

$$m_A g - kx = m_A\ddot{x} \tag{1}$$



题 2.9 图

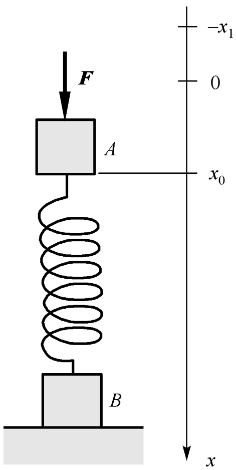


图 2.9a

解为

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_A}}t + \varphi\right) + \frac{m_A g}{k}$$

代入初始条件

$$t = 0\text{时}，\quad \dot{x} = 0,\quad x = x_0 = \frac{1}{k}(F + m_A g)$$

得

$$\varphi = 0,\quad A = F / k$$

则方程①有解

$$x = \frac{F}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{m_A g}{k}$$

从而最高点有

$$x = -\frac{F}{k} + \frac{m_A g}{k} = -x_1 = -\frac{m_B g}{k}$$

解得

$$F = (m_A + m_B)g$$

2.10 如图所示，质量为 M 的三角形斜面上放一个小质量物体 m，三角形物体放在水平面上，假设所有接触都是光滑的．求：

（1）必须用多大的水平推力 $\boldsymbol{F}$，才能使 m 相对于 M 为静止？

（2）此时系统的加速度 a 有多大？

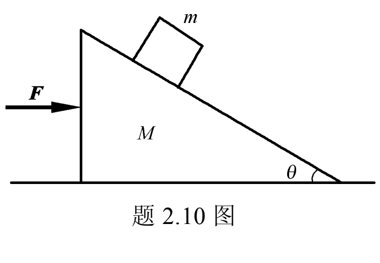
解 （1）物体受力分析如图 2.10a 所示．设系统加速度为 $\boldsymbol{a}$，有

$$\boldsymbol{N} = -\boldsymbol{N}',\quad G_M = Mg,\quad G_m = mg$$

m 和 M 相对静止，应有

$$N\cos\theta = mg \qquad ①$$

$$N\sin\theta = ma \qquad ②$$



题 2.10 图

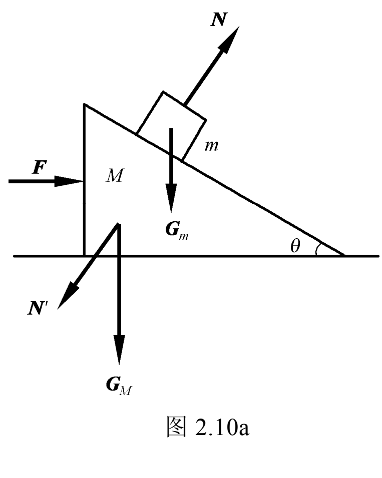


图 2.10a

$$F - N'\sin\theta = Ma \tag{③}$$

由式②和式③有

$$\frac{N\sin\theta}{m} = \frac{F - N'\sin\theta}{M} \tag{④}$$

由式①有

$$N = mg/\cos\theta \tag{⑤}$$

将式⑤代入式④有

$$\frac{mg\tan\theta}{m} = \frac{F - mg\tan\theta}{M}$$

从而有

$$F = (M+m)g\tan\theta$$

（2）
$$a = \frac{N\sin\theta}{m} = g\tan\theta$$

2.11*　收尾速度问题. 空气对物体的阻力由许多因素决定. 然而，一个有用的近似公式是，阻力 $\boldsymbol{f} = -\beta\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{v}$ 是物体的速度，β 是一个与速度无关的常数. 现在考虑空气中的一个自由下落物体，将 z 轴的正方向取为竖直向下.

（1）给出落体的牛顿方程.

（2）当物体的速度 $v(t_0)$ 等于多少时，物体不再加速（这个速度叫做收尾速度）？

（3）试证，速度随时间变化的关系为 $v(t) = v(t_0)(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t})$，并作出 v-t 曲线.

解　（1）
$$mg - \beta\dot{z} = m\ddot{z} \tag{①}$$

（2）由于 $v = \dot{z}$ 从而方程①化为

$$mg - \beta v = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{②}$$

当物体不再加速时，应有 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$，从而方程②化为

$$mg - \beta v(t_0) = 0$$

解得

$$v(t_0) = mg/\beta \tag{③}$$

即收尾速度为 mg/β.

（3）为解方程②，将方程②改写成

$$\frac{\mathrm{d}v}{g - \frac{\beta v}{m}} = \mathrm{d}t \tag{④}$$

积分一次得

$$\ln\left(\frac{\beta}{m}v-g\right)=-\frac{\beta}{m}(t+c)\quad（c\ 为常数）$$

解得

$$v(t)=\frac{m}{\beta}\left[g-\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}(t+c)}\right]$$

考虑到 $t=0$ 时 $v=0$，有

$$g-\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}c}=0\Rightarrow \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}c}=g$$

从而

$$v(t)=\frac{m}{\beta}\left(g-g\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t}\right),\qquad v(t)=\frac{mg}{\beta}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t}\right)=v(t_0)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t}\right)$$

2.12　用同一种质料做成的两个实心小球，在空气中下落. 其中一球的直径是另一球直径的二倍. 假设空气阻力与运动物体的横截面积成正比，也与运动物体的速度平方成正比，问两小球收尾速度之比等于多少？

解　将 z 轴的正方向取为竖直向下，设球的质量为 m，横截面积为 s，运动方程为

$$mg-ksv^2=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

当物体不再加速时，应有 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$. 设物体收尾速度为 v_0，则有

$$mg-ks\cdot v_0^2=m\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t}=0$$

从而

$$v_0=\sqrt{\frac{mg}{ks}}$$

设物体密度为 ρ，从而

$$m=\frac{4}{3}\pi R^3\rho,\qquad s=\pi R^2$$

故 $v=\sqrt{\frac{4R\rho g}{3k}}$，所以物体的收尾速度与 $\sqrt{R}$ 成正比，即

$$v_{2R}/v_R=\sqrt{2}/1$$

2.13　一个半径为 r 、以速度 v 运动的小球所受到的空气阻力可以表示为

$$f(v)=3.1\times10^{-4}rv+0.87r^2v^2$$

这是一个对很宽的速度区间都有效的公式. 其中 $f(v)$ 的单位为 N，r 的单位为 m，v 的单位为 m/s. 把雨滴看做在空气中运动的小球，求雨滴下落收尾速度表示式，并计算一个半径为 2mm 的雨滴的收尾速度.

解　将 z 轴的正方向取为竖直向下，设雨滴的质量为 m，运动方程为

$$mg - f(v) = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

依题意，设收尾速度为 v_f，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{v=v_f} = 0$，则有

$$mg - f(v_f) = 0$$

即

$$0.87r^2v_f^2 + 3.1\times10^{-4}rv_f - mg = 0$$

解得

$$v_f = \frac{-3.1\times10^{-4}r + \sqrt{(3.1\times10^{-4}r)^2 + 4mg\times0.87r^2}}{2\times0.87r^2} = \frac{1.78\times10^{-4}}{r}\left(\sqrt{1+3.6\times10^7 mg} - 1\right)$$

又 $m = \dfrac{4}{3}\pi r^3\cdot\rho$，$\rho = 10^3\mathrm{kg/m^3}$，得

$$v_f = \frac{1.78\times10^{-4}}{r}\left(\sqrt{1+1.48\times10^{12}r^3} - 1\right)$$

即收尾速度表示式为

$$v_f = \frac{1.78\times10^{-4}}{r}\left(\sqrt{1+1.48\times10^{12}r^3} - 1\right)$$

当 $r = 0.002\mathrm{m}$ 时

$$v_f \approx \frac{1.78\times10^{-4}}{r}\sqrt{1.48\times10^{12}r^3} = 1.78\sqrt{1.48\times10^4 r} = 9.7\mathrm{m/s}$$

即该雨滴的收尾速度为 9.7m/s.

2.14　跨过定滑轮的绳子的两端拴着两个物体，质量分别为 m_1 和 m_2（$m_1 > m_2$），如果两物体从静止开始运动，经 t 秒后 m_1 下降的距离正好等于它在同样时间内自由下落走过的距离的一半，两物体质量之比是多少？如果 m_1 下降的距离恰好等于它在同样时间内自由下落距离的 $1/n$，两物体质量之比是多少？（设定滑轮和绳子的质量以及滑轮轴承处的摩擦力都可略去不计，绳子长度不变.）

解　m_1 下降的加速度 a 为

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$$

依题意有 $a=\dfrac{1}{2}g$，从而 $\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}=\dfrac{1}{2}$，解得 $m_1=3m_2$.

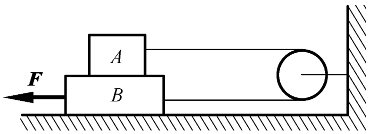
同样，如果 m_1 下降的距离恰好等于它在同样时间内自由下落距离的 $1/n$，有

$$\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}=\frac{1}{n}\text{，即 }\frac{m_1}{m_2}=\frac{n+1}{n-1}$$

2.15　4kg 重的物体 A，放在 8kg 重的物体 B 上，B 放在水平桌面上. 一细绳绕过定滑轮连接物体 A 和 B，如图所示. A 与 B 之间、B 与桌面之间的静摩擦系数均为 0.25，若使物体 B 向左运动，并保持细绳始终水平，滑轮的质量及滑轮轴承处的摩擦力均可略去不计，绳子长度不变，求所需最小水平拉力 $\boldsymbol{F}$ 是多少？

解　如图 2.15a 所示隔离物体，设 A 物体质量为 m_A，所受摩擦力为 f_1，绳中的张力为 T，则有

$$T=f_1=\mu m_A g$$



题 2.15 图

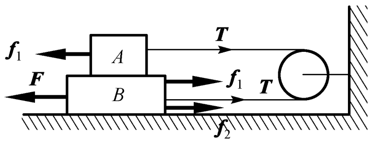


图 2.15a

B 物体所受摩擦力为 f_1+f_2，$f_2=\mu(m_A+m_B)g$，所受拉力亦为 T，从而

$$\begin{aligned}F&=f_1+T+f_2=2f_1+f_2\\&=2\mu m_A g+\mu(m_A+m_B)g=\mu g(3m_A+m_B)\end{aligned}$$

代入数据可得

$$F=\mu g(3m_A+m_B)=0.25\times 9.8\times(3\times 4+8)=49(\mathrm{N})$$

2.16　一质量为 M 的楔形物体放在倾角为 α 的固定的光滑斜面上，楔形物体的上表面与水平面平行，再在这个面上放一质量为 m 的质点，如图所示.

（1）若质点与 M 间的摩擦系数为 $\mu=0$，证明：当 m 在 M 上运动时，它相对于斜面的加速度为

$$a=\frac{(M+m)g\sin^2\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$$

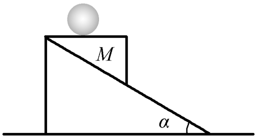
（2）求楔形物体与斜面间的作用力.

解　（1）如图 2.16a 所示隔离物体，列出方程

$$mg-N=ma \qquad ①$$

$$(Mg+N)\sin\alpha=Ma' \qquad ②$$

$$a'\sin\alpha=a \qquad ③$$



题 2.16 图

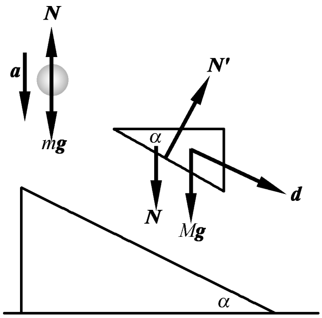


图 2.16a

解得

$$a=\frac{(M+m)g\sin^2\alpha}{M+m\sin^2\alpha}, \qquad N=\frac{Mmg\cos^2\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$$

（2）设楔形物体与斜面间的作用力为 N'，由于楔形物体垂直于斜面方向所受合力为零，即

$$N'=(N+Mg)\cos\alpha$$

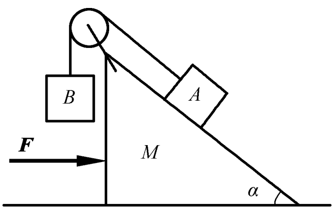
得

$$N'=\frac{M(M+m)g\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$$

2.17　一质量为 M 的光滑斜面放在光滑的水平面上，斜面的顶端装一滑轮，一条细绳跨过滑轮拴着两个质量分别为 m_1 和 m_2 的物体 A 和 B，如图所示. 设绳子和滑轮的质量以及滑轮轴承处的摩擦力均可略去不计，绳子长度不变，问在 A 下滑过程中欲使 M 不动时作用在 M 上的水平方向的力 $\boldsymbol{F}$ 需要多大？

解　如图 2.17a 所示隔离物体，设 A 的加速度为 a，与斜面之间的作用力为 T，地面对斜面的作用力为 N'，则

对 B：　$$T-m_2g=m_2a \qquad ①$$



题 2.17 图

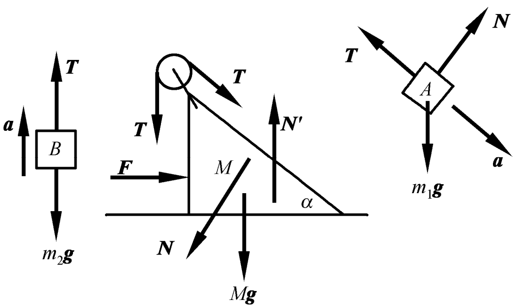


图 2.17a

对 A：

$$m_1 g\sin\alpha - T = m_1 a \quad ②$$

$$m_1 g\cos\alpha - N = 0 \quad ③$$

对 M：

$$F + T\cos\alpha - N\sin\alpha = 0 \quad ④$$

解得

$$a = \frac{m_1 g\sin\alpha - m_2 g}{m_1 + m_2}$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g(1+\sin\alpha)}{m_1+m_2},\quad F = \frac{m_1 g\cos\alpha(m_1\sin\alpha - m_2)}{m_1+m_2}$$

即作用在 M 上的水平方向的力 $F = \dfrac{m_1 g\cos\alpha(m_1\sin\alpha - m_2)}{m_1+m_2}$.

2.18　如图所示，一复杂的滑轮组，吊着的物体质量分别为 m_1、m_2、m_3、m_4，设滑轮和绳子的质量以及滑轮轴承处的摩擦力均可略去不计，且绳子长度不变，求每个物体的加速度和每段绳子中的张力.

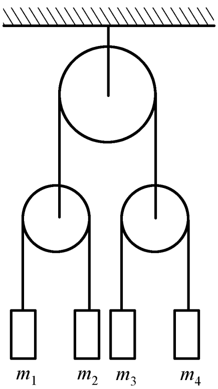
解　如图 2.18a 所示，设 m_1,m_2 的动滑轮为 A，m_3,m_4 的动滑轮为 B. 取坐标轴的正向向下，设 m_1、m_2、m_3、m_4 的坐标分别为 x_1、x_2、x_3、x_4，A、B 的坐标分别为 x_A、x_B，加速度分别为 a_A、a_B. 隔离物体，对 m_1、m_2、m_3、m_4 列方程

$$m_4 g - T_4 = m_4 a_4 \quad ①$$

$$m_3 g - T_3 = m_3 a_3 \quad ②$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \quad ③$$

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \quad ④$$



题 2.18 图

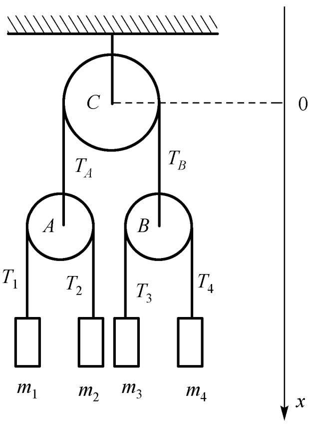


图 2.18a

题设滑轮和绳子的质量以及滑轮轴承处的摩擦力均可略去不计，有

$$T_1 = T_2 = T_3 = T_4,\qquad T_A = T_B = T_1 + T_2 = 2T_1 \quad ⑤$$

题设绳子长度不变，设三根绳子长度分别为 l_1、l_2、l_3，有

$$(x_1 - x_A) + (x_2 - x_A) = l_1, \qquad (x_3 - x_B) + (x_4 - x_B) = l_2, \qquad x_A + x_B = l_3$$

对这三式微商两次，可得

$$a_1 + a_2 - 2a_A = 0, \qquad a_3 + a_4 - 2a_B = 0, \qquad a_B = -a_A$$

即

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \tag{⑥}$$

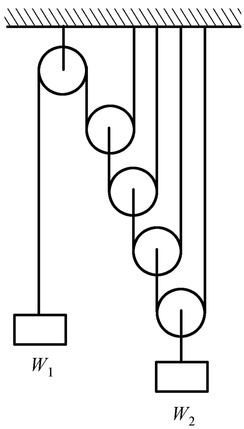
上述六方程联立，可得

$$T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T = \frac{4g}{\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2} + \dfrac{1}{m_3} + \dfrac{1}{m_4}}$$

$$T_A = T_B = 2T = \frac{8g}{\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2} + \dfrac{1}{m_3} + \dfrac{1}{m_4}}$$

$$a_1 = g - \frac{T}{m_1}, \quad a_2 = g - \frac{T}{m_2}, \quad a_3 = g - \frac{T}{m_3}, \quad a_4 = g - \frac{T}{m_4}$$

2.19　如图所示，一滑轮组由一个定滑轮和 n 个动滑轮组成. 设所有的滑轮大小相同，下垂的绳子彼此平行，定滑轮的绳子下吊着重为 W_1 的物体，最右边的一个动滑轮下吊着一重为 W_2 的物体，如果滑轮和绳子的质量以及滑轮轴承上的摩擦力均可略去不计，绳子长度不变.



题 2.19 图

（1）当整个系统平衡时，证明：$W_2 = 2^n W_1$；

（2）当 W_1、W_2 加速运动时，设 W_1 的加速度为 a_1、W_2 的加速度为 a_2，证明：$a_1 / a_2 = -2^n$；

（3）求各段绳子中的张力.

解　动滑轮计 1, 2, ⋯, n，定滑轮计为 n+1.

（1）整个系统处于平衡状态，所以 $T_n = W_1$，而 $T_{i-1} = 2T_i$ $(i = 2,3,\cdots,n)$

$$T_i = \frac{T_1}{2^{i-1}} \quad (i = 2,3,\cdots,n) \tag{①}$$

又 $W_2 = 2T_1$，所以 $W_1 = T_n = \dfrac{T_1}{2^{n-1}} = \dfrac{W_2}{2^n}$，即 $W_2 = 2^n W_1$.

（2）设 W_2 下降的位移为 l_2，W_1 上升的位移为 l_1，且以向下为正方向. 则 $l_2 = -2^n l_1$，左右微分两次，得

$$a_2 = -2^n a_1$$

所以

$$\frac{a_2}{a_1}=-2^n \tag{②}$$

（3）当 W_1、W_2 加速运动时，式①和式②仍然正确.

对 W_2 有

$$W_2-2T_1=\frac{W_2}{g}a_2 \tag{③}$$

对 W_1 有

$$T_n-W_1=-\frac{W_1}{g}a_1 \tag{④}$$

由式①～式④解得

$$a_1=\frac{2^nW_1-W_2}{2^n(W_1+W_2)}g\,,\qquad a_2=\frac{W_2-2^nW_1}{W_1+W_2}g$$

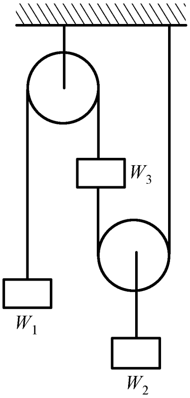
$$T_1=\frac{W_1W_2(2^n+1)}{2(W_1+W_2)}\,,\quad T_i=\frac{T_1}{2^{i-1}}=\frac{W_1W_2(2^n+1)}{2^i(W_1+W_2)}\quad (i=1,2,3,\cdots,n)$$

整个系统处于平衡状态时，$W_2=2^nW_1$，$a_1=a_2=0$

$$T_i=\frac{W_1W_2(2^n+1)}{2^i(W_1+W_2)}\ =\frac{W_2}{2^i}\quad (i=1,2,3,\cdots,n)$$

2.20　一细绳的一端固定在天花板的 A 点上，另一端跨过一定滑轮吊着一重量为 W_1 的物体，又在 A 点和定滑轮之间的绳子上兜着一动滑轮，动滑轮下吊着一物体，物体重量为 W_2，且 $W_1=W_2$. 在定滑轮和动滑轮之间的绳子上拴一重物 W_3，如图所示. 假设滑轮和绳子的质量及滑轮轴上的摩擦力均可忽略不计，绳子长度不变. 问当系统静止时 W_3 等于多少？

解　如图 2.20a 所示，设各段绳中的张力分别为 T_0～T_4.



题 2.20 图

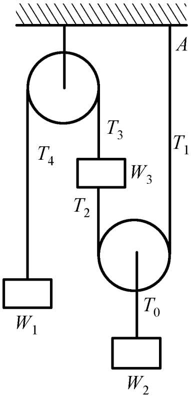


图 2.20a

隔离物体，题设滑轮和绳子的质量及滑轮轴上的摩擦力均可忽略不计，由于系统静止，可得

$$\begin{cases} T_0 = W_2 = T_1 + T_2 \\ T_2 + W_3 = T_3 \\ T_4 = W_1 \\ T_1 = T_2 \\ T_3 = T_4 \end{cases}$$

且 $W_1 = W_2$，从而解得

$$W_3 = \frac{1}{2} W_2$$

2.21　一子弹以 v_0 的初速和 45° 的仰角自地面射出，子弹在飞行时受到的空气阻力为其速度的 km 倍（m 为子弹的质量，k 为常数）. 试求子弹的速度与水平线又成 45° 角时，子弹与发射点之间的水平距离 s.

解　设子弹飞行过程中水平方向速度 v_x，竖直方向速度 v_y.

以右为水平正向，以上为竖直正向. 所以

$$\dot{v}_x = -\frac{kmv_x}{m}, \qquad \dot{v}_y = \frac{-kmv_y}{m} - g$$

从而得微分方程 $\begin{cases} \dot{v}_x = -kv_x \\ \dot{v}_y = -kv_y - g \end{cases}$，初始值为 $v_x = v_y = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0$，解得

$$v_x = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 \mathrm{e}^{-kt}, \qquad v_y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} v_0 + \frac{g}{k} \right) \mathrm{e}^{-kt} - g/k$$

题设当 v 再次与水平方向成 45° 角时 $v_x = -v_y$，即

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} v_0 \mathrm{e}^{-kt_0} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} v_0 + \frac{g}{k} \right) \mathrm{e}^{-kt_0} - g/k$$

解得

$$\mathrm{e}^{-kt_0} = \frac{g}{\sqrt{2} kv_0 + g} \qquad (t_0\text{ 为所求时刻})$$

所以

$$s = \int_0^{t_0} v_x \mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 \mathrm{e}^{-kt} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 \frac{1}{k} \left(1 - \frac{g}{\sqrt{2}\, kv_0 + g} \right) = \frac{v_0^2}{\sqrt{2}\, kv_0 + g}$$

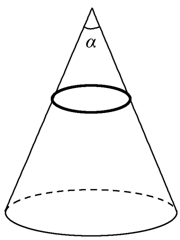
2.22　如图所示，一长为 l、质量为 M 的均匀链条套在一表面光滑、顶角为 α 的圆锥上，当链条在圆锥面上静止时，求链中的张力.

解　由图 2.22a①取一段圆心角为 dθ 的小微元，如图 2.22a②所示，将该小微元隔离出来. 设该小微元所受重力为 F_2，受圆锥表面的正压力为 F_1，该小微元两端链条的张力分别为 T_1、T_2. 有

$$F_2 = Mg\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$$

因为链条静止，所以

$$F_2 = F_1 \sin\frac{\alpha}{2}$$



题 2.22 图

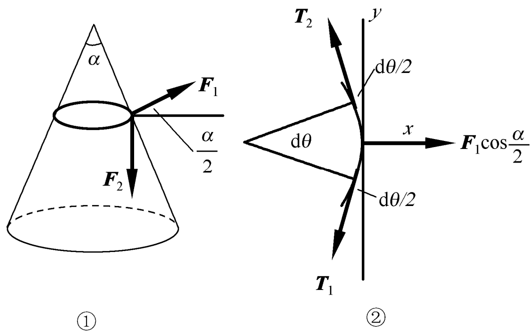


图 2.22a

为使链条保持静止，图 2.22a②中的三力平衡，考虑这三力沿图中 x,y 方向的分量和，有

$$T_1 \sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} + T_2 \sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = F_1 \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$T_1 \cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = T_2 \cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}$$

利用 $\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\theta$，可得

$$T_1 = T_2 = \frac{F_1 \cos(\alpha/2)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{F_2 \cot(\alpha/2)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{Mg}{2\pi}\cot\frac{\alpha}{2}$$

即

$$T = \frac{1}{2\pi} Mg \cot\frac{\alpha}{2}$$

2.23　一条绳索的一端系住停泊在河中的小船上，另一端由站在岸上的人拿着. 人正欲收绳把船拉往岸边时，突然刮起了大风，风把船吹向河心. 为了不让风把船吹走，人把绳索在岸边的固定圆柱上缠绕若干圈后再拉住绳索. 若由于大风使船与

圆柱间的绳索中的张力变为 5000kgf[①]，而人拉绳的最大力为 50kgf. 已知绳索与圆柱之间的摩擦系数为 0.32，问绳索至少在圆柱上绕几圈船才不会被吹走？

解　取一段绕于柱子上的绳子的微元，如图 2.23a 所示，其所对应的圆心角为 $\mathrm{d}\theta$，N 为正压力.

$$T_1 = T,\qquad T_2 = T + \mathrm{d}T$$

$$N = T_1 \sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} + T_2 \sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = T\mathrm{d}\theta \tag{①}$$

$$\mathrm{d}T = T_2 - T_1 = \mu N \tag{②}$$

由式①和式②得

$$\mu T\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}T\text{，即}\quad \frac{\mathrm{d}T}{T} = \mu\mathrm{d}\theta \tag{③}$$

又起始端 $T_0 = 50\mathrm{kg}$，末端 $T_f = 5000\mathrm{kg}$，由式③得

$$\int_{T_0}^{T_f} \frac{\mathrm{d}T}{T} = \int_0^{\theta} \mu\mathrm{d}\theta,\qquad \ln\frac{T_f}{T_0} = \mu\theta$$

即

$$\theta = \frac{1}{\mu}\ln\frac{T_f}{T_0} = \frac{1}{0.32}\ln\frac{5000}{50} = 14.39$$

所以

$$n = \theta / 2\pi = 2.29\text{（圈）}$$

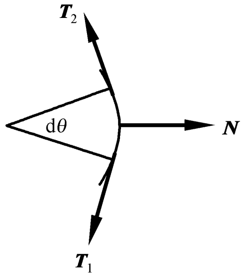


图 2.23a

即绳索至少在圆柱上绕 2.29 圈船才不会被吹走.

① 千克力，1kgf=9.80665N.

第 3 章　非惯性参考系

3.1　某人以 2.5m/s 的速度向正西方向跑时，感到风来自正北. 如他将速度增加一倍，则感到风从正西北方向吹来. 求风速和风向.

解　建立平面直角坐标系，x 轴指向东方，y 轴指向北方，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 分别为 x 轴和 y 轴方向的单位向量.

题设某人的速度为 $\boldsymbol{v}_1=-2.5\boldsymbol{i}$ 时，风速为 $\boldsymbol{v}_{10}=-v_{10}\boldsymbol{j}$；他将速度增加一倍，为 $\boldsymbol{v}_2=-5\boldsymbol{i}$ 时，风速为 $\boldsymbol{v}_{20}=\dfrac{v_{20}}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})$.

若他静止时，风速为 $\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}$，有

$$\boldsymbol{v}_{10}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_1,\qquad \boldsymbol{v}_{20}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_2$$

将上述假设代入得

$$-v_{10}\boldsymbol{j}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+2.5\boldsymbol{i} \tag{①}$$

$$\frac{v_{20}}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{i} \tag{②}$$

方程①和方程②可解得 $v_x=-2.5$，$v_y=-2.5$，于是

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}=-2.5\boldsymbol{i}-2.5\boldsymbol{j}$$

即风从正东北吹来，风速为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=2.5\sqrt{2}=3.536(\mathrm{m/s})$$

3.2　当蒸汽船以 15km/h 的速度向正北方向航行时，船上的人观察到船上的烟囱里冒出的烟飘向正东方向. 过一会儿，船以 24km/h 的速度向正东方向航行，船上的人则观察到烟飘向正西北方向. 若在这两次航行期间风速不变，求风速及方向.

解　与上题类似，建立平面直角坐标系，x 轴指向东方，y 轴指向北方，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 分别为 x 轴和 y 轴方向的单位向量.

题设蒸汽船的速度为 $\boldsymbol{v}_1=15\boldsymbol{j}$ 时，风速为 $\boldsymbol{v}_{10}=v_{10}\boldsymbol{i}$；蒸汽船的速度为 $\boldsymbol{v}_2=24\boldsymbol{i}$ 时，风速为 $\boldsymbol{v}_{20}=\dfrac{v_{20}}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$.

若蒸汽船静止时，风速为 $\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}$，有

$$\boldsymbol{v}_{10}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_1,\qquad \boldsymbol{v}_{20}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_2$$

将上述假设代入得

$$v_{10}\boldsymbol{i} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} - 15\boldsymbol{j} \quad ①$$

$$\frac{v_{20}}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}) = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} - 24\boldsymbol{i} \quad ②$$

方程①和方程②可解得 $v_x = 9$，$v_y = 15$，于是

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = 9\boldsymbol{i} + 15\boldsymbol{j}$$

即风从西南吹来，与 x 轴夹角为

$$\theta = \arctan(v_x / v_y) = 59^\circ$$

风速为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{306} \approx 17.5(\text{km/h})$$

3.3　A 船以 $v_A = 30\text{km/h}$ 的速度向东航行，B 船以 45km/h 的速度向正北航行．求 A 船上的人观察到的 B 船的航速和航向．

解　参考上题的坐标系，题设 $\boldsymbol{v}_A = 30\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{v}_B = 45\boldsymbol{j}$．

以 A 船为参考系，则 B 船的速度为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A = 45\boldsymbol{j} - 30\boldsymbol{i}$$

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_B^2 + v_A^2} = 54.1\text{km/h}$$

$\tan\alpha = \dfrac{45}{-30} = -\dfrac{3}{2}$，得 $\alpha \approx 123.7^\circ$，即 A 船上的人观察到 B 船的航向为西偏北 56.3°．

3.4　一溜冰者在冰面上以 $v_0 = 7\text{m/s}$ 的速度沿半径 $R = 15\text{m}$ 的圆周溜冰．某时刻他平抛出一小球，为使小球能击中冰面上圆心处，他应以多大的相对于他的速度抛球，并求出该速度的方向（用与他溜冰速度之间的夹角 θ 表示）．已知人抛球时手的高度 $h = 1.5\text{m}$．

解　设溜冰者以速度 v_1 抛球，该球相对于地面的速度 v' 应该沿圆的半径方向，如图 3.4a 所示．有

$$v_0 + v_1\cos\theta = 0 \quad ①$$

$$v_1\sin\theta = v' \quad ②$$

$$\frac{1}{2}gt^2 = h \quad ③$$

$$v't = R \quad ④$$

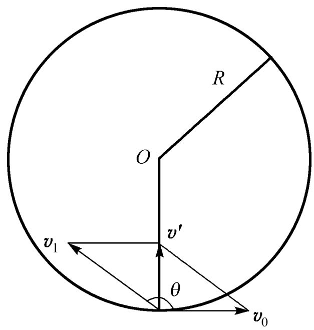


图 3.4a

联立式①～式④解得

$$v_1 = 28\text{m/s}, \qquad v' = 27.1\text{m/s}, \qquad \theta = 104^\circ 29'$$

即他应以 28m/s 的速度抛球，方向与溜冰速度之间的夹角为 $\theta = 104^\circ 29'$．

3.5*　一架飞机在无风时以匀速 v 相对地面飞行，能飞出的最远距离为 R（包

括飞出和飞回）. 现在风速为 u，方向为北偏东 α 度，而飞行的实际航向为北偏东 β 度. 求证，在这种情况下，飞机能飞出的最远距离为

$$\frac{R(v^2-u^2)}{v\sqrt{v^2-u^2\sin^2(\beta-\alpha)}}$$

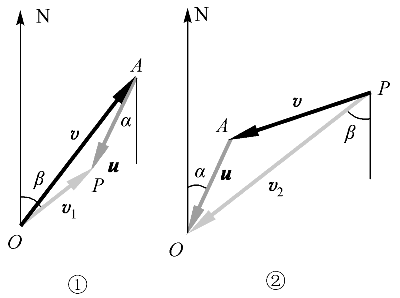


图 3.5a

证明　不妨设 $\beta>\alpha$（$\beta\leqslant\alpha$ 时结论一样）.

去时速度关系如图 3.5a①所示，回时速度关系如图 3.5a②所示. 设飞行航向去时为 $\boldsymbol{v}_{10}$，回时为 $\boldsymbol{v}_{20}$（图上都用 $\boldsymbol{v}$ 表示），有 $v_{10}^2=v_{20}^2=v^2$；实际航向为去时速度 $\boldsymbol{v}_1$，回时速度 $\boldsymbol{v}_2$（如图，即 OP 来回，OP 与北的夹角为 β 度）；风向去时为 AP，回时为 AO（与北的夹角都为 α 度）. 有

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}_{10}=\boldsymbol{v}_1,\qquad \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}_{20}=\boldsymbol{v}_2$$

设飞出和飞回共历时 t，题设

$$vt=2R \tag{①}$$

由 O 去 P 时的图 3.5a①，知

$$\angle OPA=\pi-\beta+\alpha$$

余弦定理

$$v^2=u^2+v_1^2-2uv_1\cos(\pi-\beta+\alpha)=u^2+v_1^2+2uv_1\cos(\beta-\alpha)$$

解得

$$v_1=-u\cos(\beta-\alpha)+\sqrt{v^2-u^2\sin^2(\beta-\alpha)} \tag{②}$$

同理由 P 回 O 时的图 3.5a②，有

$$v^2=u^2+v_2^2-2uv_2\cos(\beta-\alpha)$$

解得

$$v_2=u\cos(\beta-\alpha)+\sqrt{v^2-u^2\sin^2(\beta-\alpha)} \tag{③}$$

飞机能飞出最远 l，则

$$\frac{l}{v_1}+\frac{l}{v_2}=t \tag{④}$$

联立式①～式④得

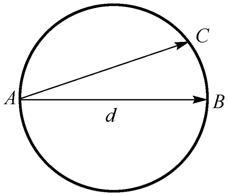
$$l=\frac{R(v^2-u^2)}{v\sqrt{v^2-u^2\sin^2(\beta-\alpha)}}$$

3.6*　如图所示，一个圆盘直径为 d，绕通过圆心的垂直轴以角速度 ω 匀速旋

转，今有一人站在圆盘上的点 A 射出一颗子弹，已知子弹出膛速度为 v，$v \gg \omega d$. 现在希望子弹击中点 A 的对径点 B（AB 是圆盘直径），则应瞄准点 C，问 BC 的弧长是多少？又问这颗子弹在圆盘上的轨迹是什么？求出相应的曲率半径.

解　参见图 3.6a. 设圆盘为 K' 系，这是非惯性参考系. 在地面参考系子弹的加速度为（不考虑重力）

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0 + 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{0}$$



题 3.6 图

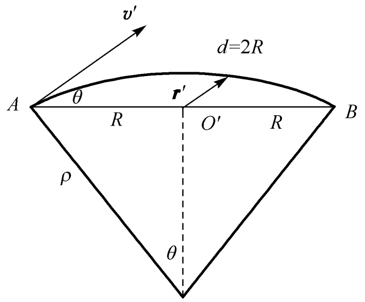


图 3.6a

由于

$$\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{r}'$$

有

$$\boldsymbol{a}' = \omega^2\boldsymbol{r}' - 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$$

而 $\boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{v}'$，由题设知

$$\left|\frac{2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'}{\omega^2\boldsymbol{r}'}\right| = \frac{2\omega v'}{\omega^2 r'} > \frac{2\omega v'}{\omega^2 R} > \frac{v'}{\omega d} \gg 1$$

于是

$$\boldsymbol{a}' \approx -2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' \perp \boldsymbol{v}'$$

即轨迹是圆的一部分.

$$\rho = \frac{v'^3}{|\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{v}'|} = \frac{v'^3}{2\omega v'^2} = \frac{v}{2\omega}$$

$$\theta = \frac{R}{\rho} = \frac{2R\omega}{v'} = \frac{\omega d}{v}$$

$$BC\text{弧长} = \theta d = \frac{\omega d^2}{v}$$

即 BC 的弧长 $=\omega d^2/v$；子弹在圆盘上的轨迹是圆弧，曲率半径 $\rho = v/(2\omega)$.

3.7　假使汽车能以速率 $v = 100\text{km/h}$ 驶过半径 $R = 200\text{m}$ 的水平弯道，车胎与地面间的摩擦系数至少要多大？

解　汽车所需的向心力 $F = mv^2 / R \leqslant mg\mu$ ，所以 $\mu \geqslant v^2 / (Rg) = 0.394$.

3.8　一飞机在竖直平面内以 540km/h 的速度沿一圆周飞行，为使在飞机飞行过程中，驾驶员与座椅之间的相互作用力不大于驾驶员重力的 8 倍，试求此圆周的最小半径.

解　飞机在竖直平面内做圆周运动，其向心力应为

$$F = mv^2 / R$$

且当飞机位于最低点时 $N - mg = F$ ，这时所需的 N 最大.

又 $N \leqslant 8mg$ ，所以

$$F = mv^2 / R \leqslant 7mg$$

从而解得 $R \geqslant 328\text{m}$.

3.9　长为 $l = 40\text{cm}$ 的绳，一端固定于一点 O，另一端系一质量 $m = 100\text{g}$ 的小球，绳不可伸长，其质量可忽略. 让小球在铅直平面做圆周运动. 问：

（1）小球通过最高点时，若绳的张力为零，小球的速度 v_0 为多少？

（2）若小球通过最高点时的速度为 $2v_0$ ，绳中的张力 T 是多少？

解　（1）小球通过最高点且张力为 0. 向心力由 mg 提供，即

$$mv_0^2 / l = mg$$

得

$$v_0 = \sqrt{gl} = 1.98\text{m/s}$$

（2）
$$F = T + mg = m(2v_0)^2 / l = 4mg$$

解得

$$T = 3mg = 2.94\text{N}$$

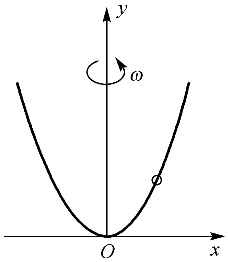
3.10　一根光滑的钢丝弯成如图所示的形状，其上套有一小环. 当钢丝以恒定角速度 ω 绕其竖直对称轴旋转时，小环在其上任何位置都能相对静止. 求钢丝的形状（即写出 y 与 x 的关系）.

解　小球受力分析如图 3.10a 所示，小球受力为：重力 F_1 、惯性离心力 F_2 、钢丝的正压力 N. $F_1 = mg$ ， $F_2 = m\omega^2 x$. 因为任一时刻，小球都是静止的，这三个力平衡，即

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$$

于是 $\dfrac{F_2}{F_1} = \tan\theta$ ，且 $\tan\theta = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ，得

$$\frac{\omega^2 x}{g} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$



题 3.10 图

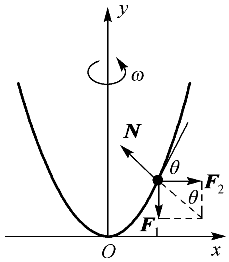


图 3.10a

且 $x=0, y=0$，所以

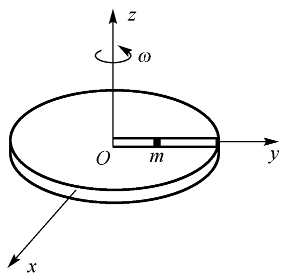
$$y=\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}x^2$$

3.11　一圆盘绕其竖直的对称轴以恒定的角速度 ω 旋转. 在圆盘上沿径向开有一光滑小槽，槽内一质量为 m 的质点以 v_0 的初速从圆心开始沿半径向外运动. 试求：

（1）质点到达图示位置（即 $y=y_0$）时的速度 v；

（2）质点到达该处所需的时间 t；

（3）质点在该处所受到的槽壁对它的侧向作用力 $\boldsymbol{F}$.



题 3.11 图

解　（1）在随转动的参考系中，小球所受惯性力 $F=m\omega^2 y$，方向 $+y$，所以在 y 方向上

$$\ddot{y}=\omega^2 y$$

上式可化为

$$\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}y}\cdot\dot{y}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{y}^2}{\mathrm{d}y}=\omega^2 y \qquad ①$$

积分得

$$\int_{v_0}^{v_1}\frac{1}{2}\mathrm{d}\dot{y}^2=\int_0^{y_0}\omega^2 y\mathrm{d}y\,,\quad v_1^2-v_0^2=\omega^2 y_0^2 \qquad ②$$

所以 y 方向上

$$v_1^2=v_0^2+\omega^2 y_0^2$$

在惯性参考系中，该质点还有垂直于 y 方向上的速度 $v_2=\omega y_0$，所以速率为

$$v=\sqrt{v^2+v_2^2}=\sqrt{v_0^2+2\omega^2 y_0^2}$$

（2）由式②得

$$v_1^2=\omega^2 y^2+v_0^2$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\omega^2y^2+v_0^2}\qquad (y|_{t=0}=0)$$

解得

$$t=\int_0^{y_0}\frac{1}{\sqrt{\omega^2y^2+v_0^2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{\omega}\ln\left(\frac{\omega y_0}{v_0}+\sqrt{\frac{1+\omega^2y_0^2}{v_0^2}}\right)$$

（3）这时所受切向作用力为

$$F=2m\omega v_1=2m\omega\sqrt{v_0^2+\omega^2y_0^2}$$

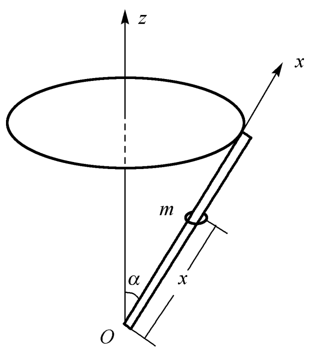
3.12　一圆柱形刚性杆 Ox 上套有一质量为 m 的小环，杆的一端固定，整个杆绕着通过固定端 O 的竖直轴 Oz 以恒定的角速度旋转，旋转时杆与竖直轴的夹角 α 保持不变. 设小环与杆之间的摩擦系数为 μ，已知当小环相对杆运动到图示位置 x 时其相对于杆的速度为 $\dot{x}$，试列出此时小环沿杆的运动方程（不要求解出此方程）.

解　取相对于杆静止的转动参考系，受力如图 3.12a 所示.

所受科里奥利力

$$F_{\mathrm{cor}}=2m|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}|=2m\omega\dot{x}\sin\alpha$$

科里奥利力的方向垂直于 Oz 和 Ox 所确定的平面.



题 3.12 图

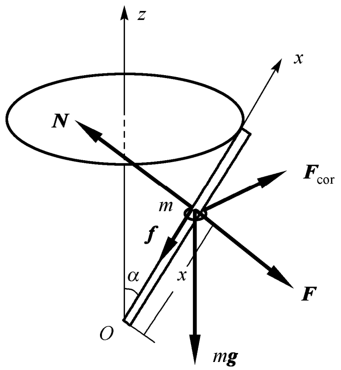


图 3.12a

惯性离心力

$$F=m\omega^2x\sin\alpha$$

惯性离心力和重力的方向在 Oz 和 Ox 所确定的平面上.

在垂直于杆 Ox 的平面上，正压力 $\boldsymbol{N}$、科里奥利力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{cor}}$、惯性离心力 $\boldsymbol{F}$ 和重力 $m\boldsymbol{g}$ 在该平面的分量四个力平衡，于是正压力的绝对值为

$$N=\sqrt{(F\cos\alpha+mg\sin\alpha)^2+F_{\mathrm{cor}}^2}$$

摩擦力：

$$f=\mu N=\mu\sqrt{(F\cos\alpha+mg\sin\alpha)^2+F_{\mathrm{cor}}^2}$$

于是沿 Ox 方向的运动方程（小环沿杆向上运动）为

$$m\ddot{x}=F\sin\alpha-mg\cos\alpha-f \tag{①}$$

代入化简，有

$$\begin{aligned}m\ddot{x}&=m\omega^2x\sin^2\alpha-mg\cos\alpha-\mu\sqrt{(F\cos\alpha+mg\sin\alpha)^2+(2m\omega\dot{x}\sin\alpha)^2}\\&=m\omega^2x\sin^2\alpha-mg\cos\alpha-\mu\sqrt{(m\omega^2x\sin\alpha\cos\alpha+mg\sin\alpha)^2+(2m\omega\dot{x}\sin\alpha)^2}\\&=m\omega^2x\sin^2\alpha-mg\cos\alpha-\mu m\sin\alpha\sqrt{(\omega^2x\cos\alpha+g)^2+4\omega^2\dot{x}^2}\end{aligned}$$

即小环沿杆 Ox 向上运动时

$$m\ddot{x}=m\omega^2x\sin^2\alpha-mg\cos\alpha-\mu m\sin\alpha\sqrt{(\omega^2x\cos\alpha+g)^2+4\omega^2\dot{x}^2} \tag{②}$$

同理可得小环沿杆 Ox 向下运动时

$$m\ddot{x}=m\omega^2x\sin^2\alpha-mg\cos\alpha+\mu m\sin\alpha\sqrt{(\omega^2x\cos\alpha+g)^2+4\omega^2\dot{x}^2} \tag{③}$$

小环沿杆 Ox 上静止时，在方程①中，$\ddot{x}=\dot{x}=0$，$-\mu N\leqslant f\leqslant\mu N$，方程①变成

$$-\mu m\sin\alpha(\omega^2x\cos\alpha+g)\leqslant m\omega^2x\sin^2\alpha-mg\cos\alpha\leqslant\mu m\sin\alpha(\omega^2x\cos\alpha+g)$$

化简得

$$\frac{g(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}{\omega^2\sin\alpha(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}\leqslant x\leqslant\frac{g(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}{\omega^2\sin\alpha(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)} \tag{④}$$

3.13　质量为 m 的小球置于光滑水平台面，用长为 l 的细线系于台面上的 P 点，水平台面绕着过 O 点的铅垂轴以恒定角速度 ω 旋转，P 点与 O 点的距离为 b，试列出小球的运动方程. 设在小球运动过程中，线始终保持拉直状态.

解　由于水平面光滑，小球仅受绳子拉力（真实力）.

取 O 点为原点，相对于 OP 静止的参考系为 K' 系，如图 3.13a 所示. 在 K' 系中，设 OP 为 x' 轴，Pm 与 OP 的夹角为 $\theta(t)$，m 点的坐标、速度和加速度分别为 $\boldsymbol{r}'(t)$、$\boldsymbol{v}'(t)$、$\boldsymbol{a}'(t)$，且设 $\overrightarrow{Pm}=\boldsymbol{R}(t)$，题设 $|\boldsymbol{R}(t)|=l$.

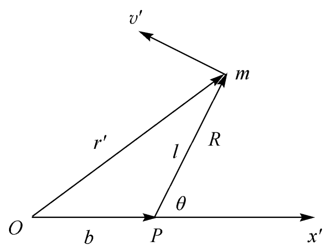


图 3.13a

由于 K' 系为非惯性系，作用于 m 点的力除了真实力 $\boldsymbol{T}=-T\hat{\boldsymbol{R}}$（$\hat{\boldsymbol{R}}=\dfrac{\boldsymbol{R}}{R}$ 为单位向量）外，还有惯性离心力和科里奥利力.

惯性离心力　　$\boldsymbol{F}=m\omega^2\boldsymbol{r}'$

科里奥利力　　$\boldsymbol{F}_{\mathrm{cor}}=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'=2m\omega v'\hat{\boldsymbol{R}}$

其中

$v' = l\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$　（v' 可正可负，v' 为负值时矢量 $\boldsymbol{v}'$ 的方向与图 3.13a 所示方向相反）

于是有

$$m\boldsymbol{a}' = -T\hat{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\text{cor}} = -T\hat{\boldsymbol{R}} + m\omega^2\boldsymbol{r}' + 2m\omega v'\hat{\boldsymbol{R}} \quad ①$$

设 x' 轴的单位向量为 $\hat{\boldsymbol{i}}'$，由图可知

$$\boldsymbol{r}' = b\hat{\boldsymbol{i}}' + \boldsymbol{R} = b\hat{\boldsymbol{i}}' + R\hat{\boldsymbol{R}}$$

代入式①得

$$m\boldsymbol{a}' = -T\hat{\boldsymbol{R}} + m\omega^2(b\hat{\boldsymbol{i}}' + R\hat{\boldsymbol{R}}) + 2m\omega v'\hat{\boldsymbol{R}} \quad ②$$

在 K' 系中，将原点换为 P，建立极坐标 $(R(t),\theta(t))$，坐标单位向量为 $\hat{\boldsymbol{R}}$、$\hat{\boldsymbol{\theta}}$，有

$$\hat{\boldsymbol{i}}' = \hat{\boldsymbol{R}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta \quad ③$$

代入式②得

$$m\boldsymbol{a}' = (-T + m\omega^2 b\cos\theta + m\omega^2 R + 2m\omega v')\hat{\boldsymbol{R}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}m\omega^2 b\sin\theta$$

由于题设在小球运动过程中，线不可伸长并始终保持拉直状态，故小球沿绳方向的加速度 $a'_R(t) = 0$，垂直于绳方向的加速度

$$a'_\theta = -\omega^2 b\sin\theta \quad ④$$

而 $a'_\theta = 2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta} = l\ddot{\theta}$，代入得

$$l\ddot{\theta} + \omega^2 b\sin\theta = 0$$

这是一个振动方程.

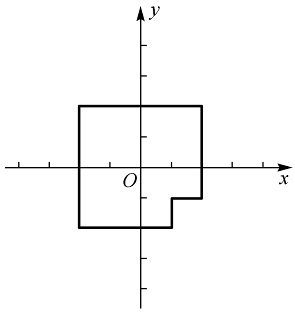
第 4 章　动 量 定 理

4.1　三个质量分别为 100g、200g 和 300g 的物体，分别放在（0,30cm）、（40cm,0）和（0,0）处，试求质心位置.

解　$x_C = \dfrac{100\times 0 + 200\times 40 + 300\times 0}{100+200+300} = \dfrac{40}{3}$，　$y_C = \dfrac{100\times 30 + 200\times 0 + 300\times 0}{100+200+300} = 5$

所以质心的位置为$\left(\dfrac{40}{3}\text{cm}, 5\text{cm}\right)$.

4.2　一均匀材料做成正方形，每边长 4.0m，在其一角上切去一个边长为 1.0m 的小正方形后，放置如图形状，求余下物体的质心位置.



题 4.2 图

解　未切时的总质量 $m_0 = 4^2 k$（k 为每单位面积的质量），对应质心为 $(0,0)$，切去的质量 $m_1 = 1^2 k$，对应质心在$\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$，所以余下物体质心位置

$$x_C = \frac{0 - 1^2 k\cdot\dfrac{3}{2}}{4^2 k - 1^2 k} = -\frac{1}{10},\quad y_C = -x_C = \frac{1}{10}$$

所以质心位置为$\left(-\dfrac{1}{10}\text{m}, \dfrac{1}{10}\text{m}\right)$.

4.3　在半径为 50cm 的均匀圆盘上，有一半径为 30cm 的圆孔，孔的中心距圆盘中心为 10cm. 求圆盘剩下部分的质心位置.

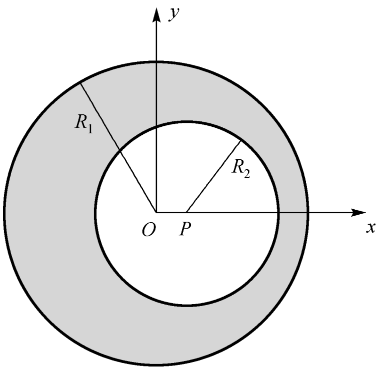


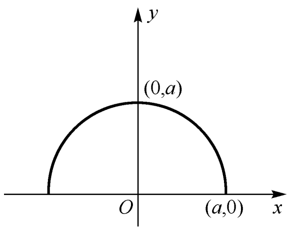
图 4.3a

解　如图 4.3a 建立坐标系，设半径为 50cm 的均匀圆盘的质心在原点 O. 即补上孔以后总质量 $m_0 = k\cdot\pi\cdot 50^2$，质心在 $(0,0)$ 点. 题设“孔”本身具有质量 $m_1 = k\cdot\pi\cdot 30^2$，质心在 $(10\text{cm}, 0)$ 点. 故所求的圆盘剩余部分的质心在 (x_C, y_C) 点：

$$x_C = \frac{0 - k\pi\cdot 30^2\cdot 10}{k\pi\cdot 50^2 - k\pi\cdot 30^2} = -\frac{45}{8}(\text{cm})$$

$$y_C = \frac{0 - k\pi\cdot 30^2\cdot 0}{k\pi\cdot 50^2 - k\pi\cdot 30^2} = 0$$

4.4　试求一个半径为 a 的半圆形均匀平板的质心. 它的安放如图所示.



题 4.4 图

解　设该均匀平板的密度为 k，显然

$$x_C = 0,\quad y_C = \frac{\iint y\cdot k\cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{k\cdot\dfrac{\pi}{2}a^2} = \frac{4a}{3\pi}$$

所以质心为 $\left(0,\dfrac{4a}{3\pi}\right)$.

4.5　有一个 90kg 重的人，从 2.0m 高处往地面跳，若他每只脚踝骨的接触面积是 5.0cm^2，已知人的骨头抗压强度约为 $1.5\times10^4\ \text{N/cm}^2$. 试问：

（1）若他与地面碰撞期间，他的质心向下运动了 1.0cm，那么，他的踝骨会发生骨折吗?

（2）若他与地面碰撞期间，他的质心降低了 50cm，他的踝骨上单位面积平均接受多大冲力？会骨折吗？

解　（1）从 2m 高处跳下，到达地面时速度 $v_0=\sqrt{2gh}=6.26\text{m/s}$，质心下降 $\Delta s = 1.0\text{cm}$ 以后，认为该人静止，并且在此期间为匀减速，则加速度

$$a = \frac{v_0^2}{2\cdot\Delta l} = \frac{gh}{\Delta l}$$

所以

$$F = ma + mg = mg\left(\frac{h}{\Delta l}+1\right)$$

$$P = \frac{F}{s} = \frac{mg\left(\dfrac{h}{\Delta l}+1\right)}{s} = \frac{90\times9.8\times\left(\dfrac{2.0}{0.01}+1\right)}{5.0\times10^{-4}} = 3.55\times10^8(\text{N/m}^2)$$
$$= 3.55\times10^4(\text{N/cm}^2) > 1.5\times10^4(\text{N/cm}^2)$$

所以会骨折.

（2）仿上，有

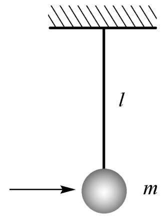
$$P' = \frac{m\left(g\dfrac{h}{\Delta l'}+g\right)}{s} = \frac{90\times9.8\times\left(\dfrac{2.0}{0.5}+1\right)}{5.0\times10^{-4}} = 882\times10^4(\text{N/m}^2) = 882(\text{N/cm}^2) < 1.5\times10^4(\text{N/cm}^2)$$

所以不会骨折.

4.6　如图所示，长为 $l=30.0\text{cm}$、最大强度为 $T=1.00\text{kgf}$ 的绳子，系一质量为 $m=500\text{g}$ 的小球，若 m 原来静止不动，要用多大的水平冲量作用在 m 上，才能把绳子打断？

解　设冲量至少要为 I，于是

$$\begin{cases} I = mv \\ T = \dfrac{mv^2}{l} + mg \end{cases}$$



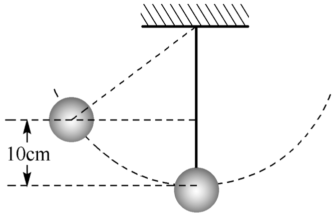
题 4.6 图

解得

$$I = \sqrt{ml(T - mg)} = \sqrt{0.5 \times 0.3(1.00 \times 9.8 - 0.5 \times 9.8)} = 0.857(\mathrm{N \cdot s})$$

即至少要 $0.857\mathrm{N \cdot s}$ 的水平冲量，才能把绳子打断.

4.7　如图是一摆长为 $l = 100\mathrm{cm}$ 、摆锤质量为 $m = 10.0\mathrm{g}$ 的单摆，初始时刻摆锤处于平衡位置. 突然给摆锤一向左的冲量，使摆锤达到的最高位置比平衡位置高 10.0cm，设冲力的作用时间为 0.001s，求此时间内的平均作用力.



题 4.7 图

解　设平均作用力为 F ，则

$$\begin{cases} mv_0 = F \cdot \Delta T \\ \dfrac{1}{2} mv_0^2 = mg \cdot \Delta h \end{cases}$$

所以

$$F = \frac{m\sqrt{2g\Delta h}}{\Delta T} = \frac{10.0 \times 10^{-3}\sqrt{2 \times 9.80 \times 0.1}}{0.001} = 14(\mathrm{N})$$

4.8　一质量为 10.0g 的小球；从 $h_1 = 25.6\mathrm{cm}$ 高度处由静止下落到一个水平桌面上，反跳的最大高度为 $h_2 = 19.6\mathrm{cm}$. 问小球与桌面碰撞时给桌面的冲量是多少？

解　与桌面碰撞前，小球的速度为 $v_1 = \sqrt{2gh_1}$ ，方向向下；与桌面碰撞后，小球的速度为 $v_2 = \sqrt{2gh_2}$ ，方向向上，所以小球给桌面冲量为

$$\Delta I = mv_1 + mv_2 = m\left(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2}\right) = 0.042\mathrm{N \cdot s}$$

4.9　质量为 2.00g 的子弹，以 500m/s 的速度射进一冲击摆. 子弹穿出时的速率为 100m/s，设摆的质量为 1.00kg，摆长为 1.00m，求摆达到的高度.

解　设摆（质量为 m_1 ）在子弹穿过后瞬间速度为 v_1，记子弹质量为 m_0 ，开始时速为 v_0 ，后来为 v_0' ，由动量守恒，有

$$m_0 v_0 = m_0 v_0' + m_1 v_1$$

所以

$$v_1 = \frac{m_0(v_0 - v_0')}{m_1}$$

所以摆达到的高度为

$$h=\frac{v_1^2}{2g}=\frac{m_0^2(v_0-v_1)^2}{2m_1^2 g}\approx 3.27\text{cm}$$

4.10 湖面上有一小船静止不动，船上有一渔人，质量为 60kg. 设他在船上向船头走了 4.0m，但相对于湖底只移动了 3.0m，若水对船的阻力略去不计，问小船的质量是多少？

解 根据动量守恒，知质心空间位置不变，取 x 为空间坐标，有

$$m_{船}x_{船}+m_{人}x_{人}=m_C x_C=常数 \tag{①}$$

以 Δx 表示相对于湖底的位移，由式①得

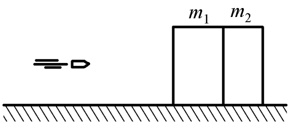
$$m_{船}\Delta x_{船}+m_{人}\Delta x_{人}=0 \tag{②}$$

题设

$$\Delta x_{人}=3, \qquad \Delta x_{船}=3-4=-1$$

代入式②得

$$m_{船}=-m_{人}\Delta x_{人}/\Delta x_{船}=180\text{kg}$$



题 4.11 图

4.11 如图，一子弹水平地穿过两个前后并排、静止地放在光滑水平面上的木块，木块的质量分别为 m_1 和 m_2，设子弹穿过木块所用的时间分别为 Δt_1 和 Δt_2. 求子弹穿过两木块后两木块的运动速度.（设木块对于弹的阻力为恒力 F.）

解 取 Δt_1 时刻 m_1 速度为 v_1，$\Delta t_1+\Delta t_2$ 时刻 m_2 速度为 v_2，则由动量定理

$$F\Delta t_1=(m_1+m_2)v_1 \tag{①}$$

$$F(\Delta t_1+\Delta t_2)=m_1v_1+m_2v_2 \tag{②}$$

得

$$v_1=\frac{F\Delta t_1}{m_1+m_2}, \qquad v_2=\frac{F\Delta t_1}{m_1+m_2}+\frac{F\Delta t_2}{m_2}$$

4.12 一半径为 R 的光滑球，质量为 M，静止在光滑的水平桌面上. 在球顶点上有一质量为 m 的质点. m 自 M 球自由下滑. 试求 m 离开 M 之前的轨迹.

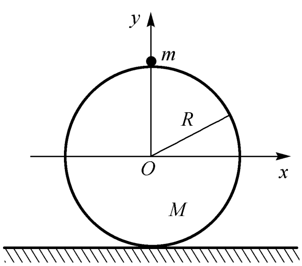


图 4.12a

解 如图 4.12a 取坐标系，设开始时球心位于原点. 设 m 的坐标为 (x,y)，球心的坐标为 (x_0,y_0)，则 $y_0\equiv 0$.

由 x 方向动量守恒知

$$mx+Mx_0=0 \tag{①}$$

m 离开 M 之前满足约束方程

$$(x-x_0)^2+y^2=R^2 \quad ②$$

由式①和式②即可得 m 的轨迹方程

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{M}{M+m}R\right)^2}+\frac{y^2}{R^2}=1$$

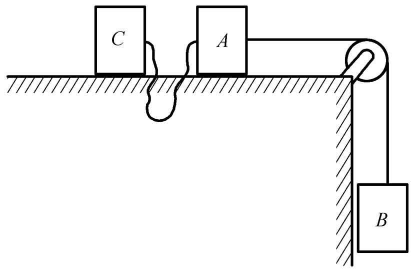
4.13　三个物体 A、B、C，质量都是 m，开始时，A、C 靠在一起，中间用一长为 $l=98\text{cm}$ 的细绳连接，放在光滑水平桌面上，A 又通过一跨过桌边的定滑轮的细绳与 B 相连，如图所示. 滑轮和绳子的质量以及滑轮轴上的摩擦均可不计，绳子的长度不变. 问 A 和 B 运动后多长时间 C 开始运动？C 开始运动时的速度是多少？

解　（1）取 A、B 为一系统，在 C 运动之前，该系统只受 B 的重力对其加速.

隔离物体，设 A、B 之间绳的张力为 T，有

$$m_Bg-T=m_Ba$$

$$T-m_Ag=m_Aa$$



题 4.13 图

解得

$$a=\frac{m_Bg}{m_A+m_B}=\frac{g}{2}$$

而

$$l=\frac{1}{2}at^2$$

代入数据，得

$$t=\sqrt{\frac{2l}{a}}=2\sqrt{\frac{l}{g}}=2\sqrt{\frac{0.98}{9.8}}\approx 0.632(\text{s})$$

速度

$$v=at=\sqrt{gl}\approx 3.1\text{m/s}$$

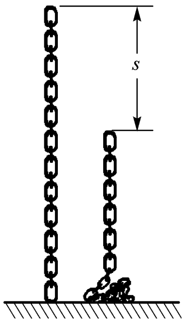
（2）而在 C 开始运动时，设速度为 v_0，此时 A、B、C 应具有相同速率，而在 C 运动前后动量守恒，以 A、B、C 系统为研究对象：

$$(m_A+m_B+m_C)v_0=(m_A+m_B)v=(m_A+m_B)\sqrt{gl}$$

得

$$v_0=\frac{m_A+m_B}{m_A+m_B+m_C}\sqrt{gl}=\frac{2}{3}\sqrt{9.8\times 0.98}=2.07(\text{m/s})$$

4.14　线密度为 ρ，长度为 L 的链条，用手提着一头，另一头刚好触及地面，



题 4.14 图

静止不动. 突然放手，使链条自由下落，求证：当键条的上端下落的距离为 s 时，链条作用在地面上的力为 $3\rho gs$.

解　链条作用在地面上的力与地面对链条的力大小相等、方向相反，链条受到地面的力可分为两部分：对已落地静止的链条 F_1 的支持力与对瞬间静止部分的作用力 F_2.

$$F_1 = \rho gs \quad ①$$

$$F_2 \cdot \Delta t = \Delta m \cdot v \quad ②$$

$$\Delta m = \rho \cdot \Delta s \quad ③$$

$$v^2 = 2gs \quad ④$$

由式①～式④得

$$F = F_1 + F_2 = 3\rho gs$$

4.15*　一长为 l ，重为 w 的均匀细绳挂在一光滑细钉上自由下滑. 当两边的绳长相等时，细绳处于平衡状态. 在小扰动下从钉上滑落. 求：

（1）当绳刚脱离细钉时，细绳的速度；

（2）当绳长一边为 b ，另一边为 c 时，它对钉子的压力.

解　如图 4.15a 所示，设钉子的半径为 R， $R \to 0$ ，长为 c 的一段绳子质量为 m_1 ，长为 b 的绳子质量为 m_2 ，将绳子分为三段，段间的拉力分别为 T_1 、 T_2 ，隔离物体，有

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \quad ①$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a \quad ②$$

$$T_1 - T_2 = \frac{m}{l}\pi Ra \quad ③$$

$$F = T_1 + T_2 \quad ④$$

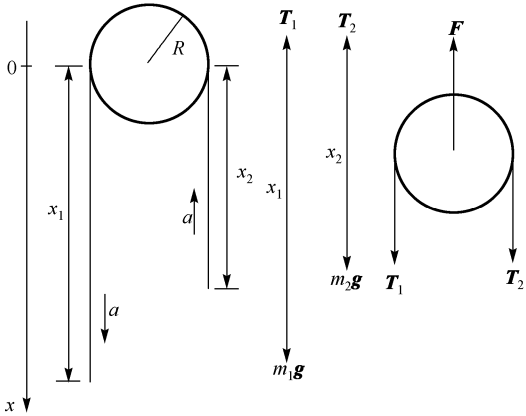


图 4.15a

设 $x_1 = x$ 得

$$m_1 = \frac{m}{l}x_1 = \frac{m}{l}x\,, \qquad m_2 = \frac{m}{l}x_2 = \frac{m}{l}(l - \pi R - x) \tag{⑤}$$

由式①～式③和式⑤得

$$a = \frac{g}{l}(2x - l + \pi R) \tag{⑥}$$

初始条件：

$$t = 0\text{ 时，}\quad x = x_0 = \frac{1}{2}(l - \pi R)\,,\quad v = v_0 = 0 \tag{⑦}$$

由式⑥得

$$\int_{v_0}^{v} v'\mathrm{d}v' = \int_{x_0}^{x} \frac{g}{l}(2x' - l + \pi R)\mathrm{d}x'$$

即

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{g}{l}(x - x_0)(x + x_0 - l + \pi R)$$

当 $R \to 0$， $x = l$ 时，得

$$v = \sqrt{\frac{gl}{2}}$$

由 $R \to 0$，式③得 $T_1 = T_2 = T$ ，由式①、式②和式④解得

$$F = 2T = \frac{4gm_1m_2}{m_1 + m_2}$$

当 $x_1 = c$， $x_2 = b$ 时，得

$$m_1 = \frac{c}{l}\frac{w}{g}\,, \qquad m_2 = \frac{b}{l}\frac{w}{g}$$

代入有 $F = 4w\dfrac{bc}{l^2}$，即

（1）当绳刚脱离细钉时，细绳的速度 $v = \sqrt{gl/2}$；

（2）当绳长一边为 b，另一边为 c 时，它对钉子的压力 $F = 4wbc/l^2$.

4.16 两个质量都是 M 的冰车，并排静止在光滑的水平冰面上. 一个质量为 m 的人，从第一个冰车跳到第二个冰车，再由第二个冰车跳回第一个冰车. 证明：两个冰车的末速度之比为 $(m + M):M$.

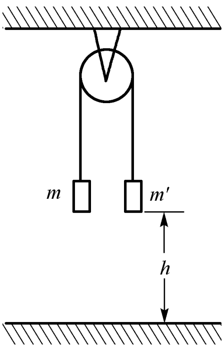
解 设两个冰车的末速度分别为 v_1 和 v_2，取冰车与人作为一系统看待，系统动量守恒，有

$$(M + m)v_1 + Mv_2 = 0$$

所以

$$\frac{|v_2|}{|v_1|}=\frac{M+m}{M}$$

4.17 如图所示，一长为 l 的细绳跨过一定滑轮，两端分别挂着质量为 m 和 m'（$m>m'$）的物体，物体距地面的高度都是 h，且 $2h<l$．让物体从静止开始运动，m 落地后，m' 将继续向上运动一段距离，而后 m' 向下运动通过绳子把 m 拉起．设 m 与地面的碰撞是完全非弹性的，绳子和滑轮的质量以及滑轮轴承处的摩擦力均可不计，绳子长度不变，求 m 能上升的最大高度．



题 4.17 图

解 取 m 与 m' 为一系统，在 m 落地前，系统速度为 v_1，则

$$(m-m')gh=\frac{1}{2}(m+m')v_1^2 \qquad ①$$

m' 上升后又下降，将 m 拉动，则此时系统初速度

$$v_2\cdot(m+m')=v_1\cdot m' \qquad ②$$

m 上升到 $h_{\max}$ 时，应有

$$(m-m')gh_{\max}=\frac{1}{2}(m+m')v_2^2 \qquad ③$$

由式①～式③，得

$$h_{\max}=\left(\frac{m'}{m+m'}\right)^2 h$$

4.18 一火箭均匀地向后喷气，每秒钟喷出 90.0g 的气体，喷出的气体相对于火箭的速度为 v_0=300m/s，设火箭开始时静止，火箭体和燃料的总质量为 m_0=270g．试问：

（1）喷气后多少时间，火箭速度达到 40.0m/s？

（2）若火箭的燃料是 m=180g，它能达到多大的速度？（本题不计重力和空气阻力．）

解 （1）由 $[(m-\Delta m)\cdot(v+\Delta v)+u\Delta m]-mv=F\Delta t$，且 $\Delta m=-\mathrm{d}m$，得

$$m\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(u-v)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-v_0\cdot\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \qquad ①$$

题设

$$\mathrm{d}m/\mathrm{d}t=-90\mathrm{g/s},\qquad m_0=270\mathrm{g}$$

故

$$m = m_0 - 90t \qquad ②$$

将式②代入式①解得

$$v = v_0 \ln \frac{270}{270 - 90t} = v_0 \ln \frac{3}{3 - t}, \qquad 或 \qquad t = 3(1 - e^{-v/v_0})$$

当 $v = 40\text{m/s}$时，$t = 0.374\text{s}$.

（2）$m = 180\text{g}$，则 $t_{\max} = 2\text{s}$，得

$$v = 300 \ln \frac{270}{270 - 90 \times 2} = 300 \ln 3 \approx 330(\text{m/s})$$

4.19 N 个质量均为 m 的人，站在质量为 M 的铁路平板车上. 车沿着平直路轨无摩擦地向前运动，速度为 v_0. 如果每个人都以相对于车的速率 v 向车后跑并跳下车，求下列两种情况下，人都跳下车后，车的速度.

（1）一个一个地跳（一个人跳下后，另一个人才起跑）；

（2）全体同时跑，同时跳.

解 （1）设第 i 个人跳下后车速为 v_i，第 $(i+1)$ 个人跳下后车速为 v_{i+1}，有

$$\left[(n-i)m + M\right]v_i = \left[(u-i-1)m + M\right]v_{i+1} - m(v - v_{i+1}) \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$$

整理得

$$v_{i+1} - v_i = \frac{m}{(n-i)m + M} v \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, N-1) \qquad ①$$

对式①求和得

$$v_n = \left[\frac{m}{Nm + M} + \frac{m}{(N-1)m + M} + \cdots + \frac{m}{m + M}\right] v + v_0$$

（2）由动量定理

$$-Nm \cdot (v - v_{车}) + M v_{车} = (Nm + M) v_0$$

所以

$$v_{车} = v_0 + \frac{Nm}{Nm + M} v$$

4.20 一初始质量为 M_0 的火箭，以恒定的比率 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -r_0(\text{kg/s})$ 向后喷出燃料，喷出气体的速率相对于火箭为 v_0.

（1）若不计重力，求火箭的初始加速度；

（2）若 $v_0 = 2.0\text{km/s}$，问每秒钟喷出多少千克燃料，火箭的推力才能达到10^5kgf？

（3）写出表示火箭速度与其剩余质量的关系式.

解 （1）由动量定理

$$F+(-v_0)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad ①$$

题设 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t=-r_0$，且不计重力，故 $F=0$，

$$a_0=\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\left.\frac{F-v_0\cdot(-r_0)}{m}\right|_{t=0}=\frac{0+v_0r_0}{M_0}=\frac{r_0v_0}{M_0}$$

（2）推力 $F'=-v_0\cdot\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=v_0r_0$，所以

$$r_0=\frac{F'}{v_0}=\frac{10^5\times9.8}{2000}=490(\mathrm{kg/s})$$

即每秒钟需喷出 490kg 燃料.

（3）由式①得

$$-v_0\mathrm{d}m=m\mathrm{d}v\,,\qquad \mathrm{d}v=-v_0\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

两边积分得

$$v(t)=v(0)-v_0\int_{M_0}^{M}\frac{\mathrm{d}m}{m}=v(0)+v_0\ln\frac{M_0}{M}=v_0\ln\frac{M_0}{M}$$

4.21　一质量为 $M=3.0\mathrm{kg}$ 的物体，被一根绳子拴着与绳子一起放在地上，绳子的长大于 10m，线密度 $\lambda=0.50\mathrm{kg/m}$. 现在由地面向上抛出该物体，当物体高出地面 10m 时，速度为 4.0m/s，问此时它的加速度是多少？（设绳子堆在一起，被拉起时其余部分保持不动.）

解　运动部分的质量 $m=M+\lambda x$（选向上方向为 x 轴正方向），$\mathrm{d}m/\mathrm{d}t=\lambda\dot{x}$，$\Delta m$ 相对 m 的速度 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=-\dot{x}$.

由变质量动量定理有

$$-mg+(-\dot{x})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=m\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

即

$$-(M+\lambda x)g-\lambda\dot{x}^2=(M+\lambda x)\cdot\ddot{x}$$

加速度

$$a=\ddot{x}=-g-\frac{\lambda\dot{x}^2}{M+\lambda x}$$

题设当 $x=10$时，$\dot{x}=4$，故

$$a=-9.8-\frac{0.5\times4^2}{3+0.5\times10}=-10.8(\mathrm{m/s^2})$$

即当 $x=10\mathrm{m}$时，加速度方向竖直向下，大小为$10.8\mathrm{m/s^2}$.

4.22　一质量为 M 的宇宙飞船在星际空间飞行. 它用一面积为 A 的洞捕集静止的氢（每单位体积的质量为 ρ），再将其排出，排气的方向与飞船飞行的方向相反，排气的速率相对于飞船为 v_r，问飞船的速率 v 等于多少时，它的加速度最大？用 M，ρ，A，v_r 表示此最大加速度.

解　捕到的氢为 $\mathrm{d}m_1=\rho Av\mathrm{d}t$，其相对于飞船速度为 $-v$，排出的氢与捕到的氢相等，为 $\mathrm{d}m_2=-\rho Av\mathrm{d}t$，其相对于飞船速度为 $-v_r$. 所以由变质量动量定理有

$$-v\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t}-v_r\frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t}=M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\rho Av(v_r-v)}{M}=\frac{\rho A}{M}\left[\frac{v_r^2}{4}-\left(v-\frac{v_r}{2}\right)^2\right]\leqslant\frac{\rho A}{4M}v_r^2$$

当且仅当 $v=\dfrac{v_r}{2}$ 时，加速度 a 最大为

$$a=\frac{\rho Av_r^2}{4M}$$

4.23　一雨滴的初始质量为 m_0，在重力作用下从静止开始降落. 假定此雨滴从云中得到质量，其质量的增长率正比于它的瞬时质量和瞬时速率的乘积，即 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t=kmv$，其中 k 为常数. 若忽略空气阻力，试证明雨滴的速率最终成为恒量，并给出最终速率的表达式.

解　雨滴从云中获得水气相对于雨滴的速度为 $-v$（v 以竖直向下为正）.

由变质量问题的动量定理

$$mg-v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad ①$$

题设

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=kmv \quad ②$$

由式①和式②得

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}v}{g-kv^2}$$

积分得

$$t=\frac{1}{2\sqrt{gk}}\ln\left|\frac{v+\sqrt{g/k}}{v-\sqrt{g/k}}\right|_0^{v(t)}=\frac{1}{2\sqrt{gk}}\ln\left|\frac{v(t)+\sqrt{g/k}}{v(t)-\sqrt{g/k}}\right|$$

解得

$$v(t)=\sqrt{\frac{g}{k}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{gk}\,t}-1}{\mathrm{e}^{2\sqrt{gk}\,t}+1}$$

所以当 $t\to+\infty$ 时，$v(t)\to\sqrt{\dfrac{g}{k}}$.

4.24　一个下雨天，5.0t 重的敞蓬货车在一平直的轨道上无摩擦地靠惯性滑行，设雨滴是竖直下落的，如果货车空载时，其滑行速率为 1.0m/s. 问当货车经过一段距离后，车上积了 0.5t 雨水时，货车的滑行速率变为多少？

解　利用变质量问题动量定理，雨水水平方向对车的速度为 $-v$（v 为车速），得

$$0-v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,,\qquad \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}=0$$

即

$$mv=m_0v_0$$

题设

$$m_0=5\mathrm{t}\,,\quad v_0=1\mathrm{m/s}\,,\quad \Delta m=0.5\mathrm{t}$$

所以

$$v(t)=\frac{m_0}{m_0+\Delta m}v_0=\frac{5}{5+0.5}\times1.0=0.905(\mathrm{m/s})$$

第 5 章　动 能 定 理

5.1　一物体受到 $F=-6x^3$ 的力的作用，x 以 m 为单位，F 以 kg 为单位. 问物体从 $x=1.0\text{m}$ 移到 $x=2.0\text{m}$ 时，力 F 做了多少功？

解　$$W=\int_{x_1}^{x_2}F\cdot \mathrm{d}x=-\int_1^2 6x^3\mathrm{d}x=-\frac{6}{4}x^4\Big|_1^2=-22.5(\text{kg}\cdot\text{m})$$

5.2　一列火车以 72 km/h 的速度匀速前进，阻力等于列车自重的 0.0030 倍. 若列车重 1800t，求机车的牵引功率.

解　因为

$$u=72\text{km/h}=20\text{m/s},\quad m=1.8\times10^6\text{kg},\quad \mu=0.003$$

所以

$$P=F\cdot v=f\cdot v=\mu mg\cdot v=0.003\times1.8\times10^6\times9.8\times20=1.058\times10^6(\text{W})$$

即机车的牵引功率为 1058kW.

5.3　一重为 2.0 kg 的物体静止在一光滑的水平面上，因受到一固定的水平力的作用开始运动，力的大小为 4.0N，分别求：

（1）第 1s 末和第 5s 末该力的瞬时功率；

（2）在开始运动后 1s 内和 5s 内该力作用于物体的平均功率.

解　（1）因为 $a=\dfrac{F}{m}=\dfrac{4.0}{2.0}=2(\text{m/s}^2)$，初速度 $v_0=0$，所以

$t_1=1\text{s}$ 时，$v_1=at_1=2\text{m/s}$，$P_1=F\cdot v_1=4.0\times2=8.0(\text{W})$

$t_2=5\text{s}$ 时，$v_2=at_2=10\text{m/s}$，$P_2=F\cdot v_2=4.0\times10=40(\text{W})$

（2）开始运动后 1s 内，$\bar{v}_1=\dfrac{v_1}{2}=1\text{m/s}$，$\bar{P}_1=F\cdot\bar{v}_1=4.0\text{W}$

开始运动后 5s 内，$\bar{v}_2=\dfrac{v_2}{2}=5\text{m/s}$，$\bar{P}_2=F\cdot\bar{v}_2=20\text{W}$

5.4　总重为 5000t 的火车在水平轨道上行驶，车轮与轨道间的摩擦系数为 0.01，设车头的牵引功率为 $P=4000\text{kW}$，并保持不变. 试问：

（1）当火车的速度等于 1.0m/s 和 10m/s 时，火车的加速度各等于多少？

（2）火车最终能达到的速度为多大？

解　（1）因为 $m=5\times10^6\text{kg}$，摩擦系数 $\mu=0.01$，车头的牵引功率 $P=4\times10^6\text{W}$，故摩擦力

$$f=\mu mg=0.01\times5\times10^6\times9.8=4.9\times10^5(\text{N})$$

当 $v_1 = 1.0\text{m/s}$ 时，车头的牵引力

$$F_1 = \frac{P}{u_1} = 4\times10^6\,\text{N}$$

火车的加速度

$$a_1 = \frac{F_1 - f}{m} = 0.7\text{m/s}^2$$

当 $v_1 = 10\text{m/s}$ 时，车头的牵引力

$$F_2 = \frac{P}{u_2} = 4\times10^5\,\text{N}$$

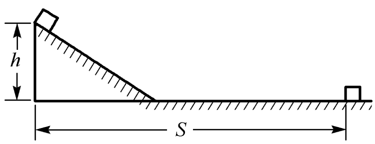
火车的加速度

$$a_1 = \frac{F_1 - f}{m} = -0.018\text{m/s}^2$$

（2）当车头的牵引力与摩擦力相等时，火车的速度最大，为

$$u_{\text{m}} = \frac{P}{f} = \frac{4\times10^6}{4.9\times10^5} = 8.16(\text{m/s})$$

5.5　如图所示，物体从高为 h 的斜面顶端自静止开始滑下，最后停在与起点的水平距离为 S 的水平地面上. 若物体与斜面和地面间的摩擦系数均为 μ，证明：$\mu = h/S$.



题 5.5 图

证明　设斜面的倾角为 θ，则物体在斜面上的摩擦力为 $f_1 = \mu mg\cos\theta$，在水平面上的摩擦力为 $f_2 = \mu mg$.

斜面长度 $S_1 = h/\sin\theta$，水平面长度 $S_2 = S - h/\tan\theta$.

由能量守恒

$$mgh = f_1S_1 + f_2S_2 = \mu mg\cos\theta\cdot\frac{h}{\sin\theta} + \mu mg\cdot\left(S - h\frac{h\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \mu mgS$$

即得

$$\mu = \frac{h}{S}$$

5.6　若上题中物体与斜面间摩擦系数和物体与地面之间的摩擦系数并不相同. 当物体自斜面顶端静止滑下时，停在地面上 A 点，而当物体以 v_0 的初速（方向沿斜面向下）自同一点滑下时，则停在地面上 B 点. 已知 A、B 点与斜面底端 C 点的距离之间满足 $\overline{BC} = 2\overline{AC}$. 试求物体在斜面上运动的过程中摩擦力所做的功.

解　设 $\overline{AC} = S$，由题意 $\overline{BC} = 2S$，如图 5.6a 所示. 若物体在斜面上运动的过程中克服摩擦力所做的功为 W. 由题设

$$mgh = W + \mu \cdot mg \cdot \overline{AC} = W + \mu mgS \qquad ①$$

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = W + \mu \cdot mg \cdot \overline{BC} = W + 2\mu mgS \qquad ②$$

方程①和方程②消去 μmgS，得

$$W = mgh - \frac{1}{2}mv_0^2$$

所以摩擦力做功

$$A_f = -W = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh$$

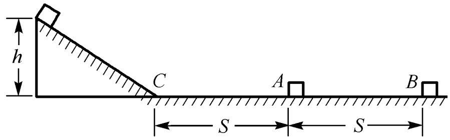


图 5.6a

5.7　一块长为 l，质量为 M 的木板静置于光滑的水平桌面上，在板的左端有一质量为 m 的小物体（大小可忽略）以 v_0 的初速相对板向右滑动，当它滑至板的右端时相对板静止. 试求：

（1）物体与板之间的摩擦系数；

（2）在此过程中板的位移.

解　取桌面参考系，规定向右的方向为正. 在该参考系中，小物体和木板都向右运动，设此过程中板的位移为 L，则小物体的位移为 $L+l$.

（1）题设物体滑至板的右端时与板的速度相同，设为 v_t，由动量守恒

$$mv_0 = (M+m)v_t \qquad ①$$

小物体受摩擦力 $f_1 = -\mu mg$，位移为 $L+l$；木板受摩擦力 $f_2 = -f_1 = \mu mg$，位移为 L.

由能量守恒

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + f_1(L+l) + f_2L = \frac{1}{2}(M+m)v_t^2 \qquad ②$$

解得

$$v_t = \frac{mv_0}{M+m}, \qquad \mu = \frac{1}{2mgl}\left[mv_0^2 - (M+m)v_t^2\right] = \frac{Mv_0^2}{2(M+m)gl} \qquad ③$$

即物体与板之间的摩擦系数

$$\mu = \frac{Mv_0^2}{2(M+m)gl}$$

（2）考虑木板运动：木板受恒力 $f_2 = \mu mg$ 作用，位移为 L. 初速度为 0，末速度为 v_t.

由动能定理

$$\frac{1}{2}Mv_t^2 = f_2L = \mu mgL \qquad ④$$

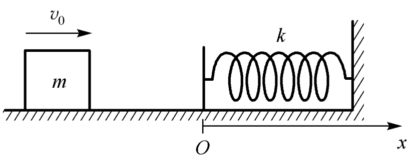
将式③代入式④，解得

$$L = \frac{Mv_t^2}{2\mu mg} = \frac{ml}{M+m}$$

5.8　质量为 m 的物体以 v_0 的速度在光滑的水平面上沿 x 正方向运动，当它到达原点 O 点时，撞击一倔强系数为 k 的轻弹簧，并开始受到摩擦力的作用，摩擦系数是位置的函数，可表示为 $\mu = ax$（a 为一较小的常数）．求物体第一次返回 O 点时的速度.

解　$$f = -\mu mg = -amg \cdot x, \quad F = -k \cdot x$$

设物体沿正方向达最远处位置为 x_0.



题 5.8 图

由动能定理

$$\int_0^{x_0} (f+F)\mathrm{d}x = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

即

$$-\frac{k+amg}{2}x_0^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

所以

$$x_0^2 = \frac{mv_0^2}{amg+k}$$

由能量守恒，设物体第一次返回 O 点时速度 v_t，则

$$\frac{1}{2}mv_t^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - 2amg \cdot \frac{x_0^2}{2}$$

代入 x_0^2，得

$$v_t = \sqrt{\frac{k-mga}{k+mga}}v_0$$

5.9　一颗质量为 m 的人造地球卫星以圆形轨道环绕地球飞行．由于受到空气阻力的作用，其轨道半径从 r_1 变小到 r_2，求在此过程中空气阻力所做的功.

解　设地球质量为 M.

在 r_1 轨道，卫星机械能为

$$E_{星}(r_1) = \frac{1}{2}mv^2(r_1) - \frac{GMm}{r_1} \quad ①$$

又 $\dfrac{GMm}{r_1^2} = \dfrac{mv^2(r_1)}{r_1}$，所以

$$mv^2(r_1)=\frac{GMm}{r_1} \qquad ②$$

将式②代入式①，得

$$E_{星}(r_1)=-\frac{GMm}{2r_1}$$

同理在 r_2 轨道，则 $E_{星}(r_2)=-\dfrac{GMm}{2r_2}$，所以

$$W_{阻力}=E_{星}(r_2)-E_{星}(r_1)=-\frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

即空气阻力做功为

$$-\frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

5.10　一质点在保守力场中沿 x 轴（在 $x>0$ 范围内）运动，其势能为 $V(x)=kx/(x^2+a^2)$　式中 k 、a 均为大于零的常数. 试求：

（1）质点所受到的力的表示式；

（2）质点的平衡位置.

解　（1）质点受到的力

$$F=-\nabla v(x)=-\left(\frac{kx}{x^2+a^2}\right)'=\frac{k(x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^2}$$

（2）势能最小处即为质点的平衡位置，亦即 $F=0$ 处，令（1）中 $F=0$，又 $x>0$，所以 $x=a$ 即为质点平衡位置.

5.11　一质量为 m 的质点在保守力的作用下沿 x 轴（在 $x>0$ 范围内）运动，其势能为 $V(x)=A/x^3-B/x$，其中 A、B 均为大于零的常数.

（1）画出势能曲线图；

（2）找出质点运动中受到沿 x 负方向最大力的位置；

（3）若质点的总能量 $E=0$，试确定质点的运动范围.

解　（1）画 $x>0$ 势能曲线图 5.11a，

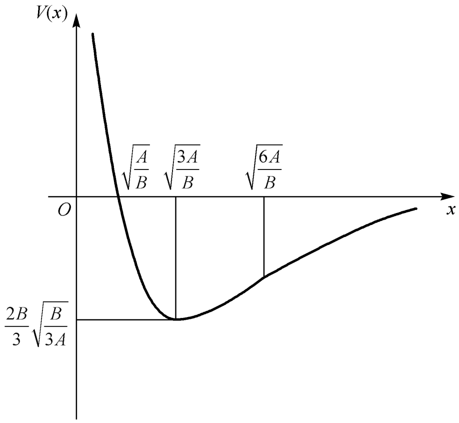


图 5.11a

$$x=\sqrt{\frac{A}{B}}时，V(x)=0$$

$$x=\sqrt{\frac{3A}{B}}\text{时，}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(x)=0$$

$$x=\sqrt{\frac{6A}{B}}\text{时，}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}V(x)=0$$

（2）$F=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(x)$，求 F 的最大值，对 F 再求导.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}V(x)=\frac{12A}{x^5}-\frac{2B}{x^3}$$

令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F=0$，即得沿 x 负方向最大力的位置 x_0，

$$x_0=\sqrt{\frac{6A}{B}}$$

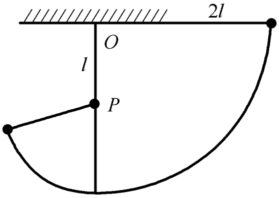
（3）由于动能 $E_k\geqslant 0$，而 $E=E_k+V(r)$，$E=0$ 时，$V(r)\leqslant 0$，由（1）中势能曲线可知，当 $\sqrt{\frac{A}{B}}\leqslant x<\infty$ 时，符合要求，故质点运动范围为

$$\sqrt{\frac{A}{B}}\leqslant x<+\infty$$

5.12　质量为 m 的小球通过一根长为 $2l$ 的细绳悬挂于 O 点. 在 O 点的正下方 l 远处有一个固定的钉子 P. 开始时，把绳拉至水平位置，然后释放小球. 试求：当细绳碰到钉子后小球所能上升的最大高度.

解　如图 5.12a 所示，一开始，小球绕 O 点做圆周运动，当达到最低点后，细绳碰到钉子，接着绕 P 点做圆周运动，由于能量守恒，当 $h=l$ 时，小球还有动能，即小球还会向上运动，所以 $l<h<2l$. 设在如图所示的 θ 位置，小球不再沿圆轨道运动（绳松），而做斜抛运动，此时 $mg\cdot\cos\theta$ 作为向心力，即有

$$mg\cdot\cos\theta=m\frac{v^2}{l}\qquad ①$$



题 5.12 图

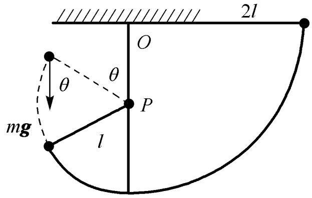


图 5.12a

由机械能守恒

$$mg(l+l\cos\theta)+\frac{1}{2}mv^2=mg\cdot 2l\qquad ②$$

解式①和式②得

$$\cos\theta = \frac{2}{3},\quad v = \sqrt{\frac{2}{3}gl}$$

此时

$$h_{脱离} = \left(1 + \frac{2}{3}\right)l = \frac{5}{3}l$$

小球沿 y 方向速度为

$$v_y = \sqrt{\frac{2}{3}gl}\cdot\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}gl} = \sqrt{\frac{10}{27}gl}$$

小球还能上升高度

$$\Delta h = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{5}{27}l$$

所以小球上升最大高度

$$h_{\max} = \frac{5}{27}l + \frac{5}{3}l = \frac{50}{27}l$$

5.13　在光滑的水平面上有两个质量分别为 m_1 和 m_2（$m_1 < m_2$）的物块，m_2 上连有一轻弹簧，如图所示. 第一次，具有动能 E_0 的 m_1 与静止的 m_2 相碰；第二次，m_2 具有动能 E_0 去和静止的 m_1 相碰，两次碰撞均压缩轻弹簧. 试问：

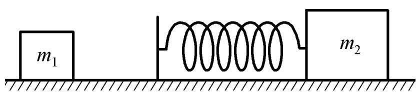
（1）两次碰撞中哪一次弹簧的最大压缩量较大？

（2）若碰前两物块的总动能为 E_0，则 E_0 如何分配，才能使在两物块碰撞过程中弹簧的最大压缩量最大？

解　（1）动能损失越大，弹簧压缩量越大. 弹簧在两物体速度相等时压缩量最大.

m_1 碰 m_2 时，m_1 的初速为

$$v_{m10} = \sqrt{\frac{2E_0}{m_1}}$$



题 5.13 图

碰后，由动量守恒 $m_1 v_{m10} = (m_1 + m_2)v_{共0}$，得

$$v_{共0} = \frac{1}{m_1 + m_2}m_1 v_{m10}$$

此时，总动能为

$$E_{(1\to 2)k} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\cdot\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2\cdot\frac{2E_0}{m_1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}E_0$$

动能损失为

$$\Delta E_{k1} = E_{(1\to 2)k} - E_0 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}E_0$$

同理 m_2 碰 m_1 时，动能损失为

$$\Delta E_{k2} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}E_0$$

题设 $m_1 < m_2$，所以

$$|\Delta E_{k1}| > |\Delta E_{k2}|$$

即第一次弹簧压缩量大.

（2）两物块对碰，若使 $\Delta E_k = E_0$ 时，动能全部转化为弹性势能，此时，弹簧压缩量最大. 故

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = E_0 \qquad ①$$

碰撞前后动量守恒：

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \qquad ②$$

解得

$$v_1^2 = \frac{2m_2}{m_1(m_1+m_2)}E_0, \qquad v_2^2 = \frac{2m_1}{m_2(m_1+m_2)}E_0$$

于是

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}E_0, \qquad \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}E_0$$

即碰撞过程中弹簧的压缩量最大时的动能分配为

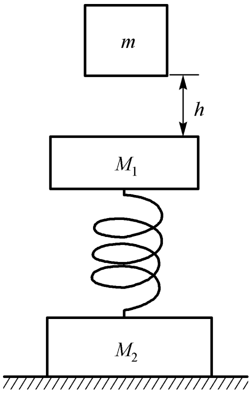
$$m_1\text{动能 } E_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}E_0, \qquad m_2\text{动能 } E_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}E_0$$

5.14　质量分别为 M_1 和 M_2 的两个物块由一倔强系数为 k 的轻弹簧相连，竖直地放在水平桌面上，如图所示. 另有一质量为 m 的物体从高于 M_1 为 h 的地方由静止开始自由落下，当与 M_1 发生碰撞后，即与 M_1 粘合在一起向下运动. 试问 h 至少应多大，才能当弹簧反弹起后 M_2 与桌面互相脱离？

解　如图 5.14a 建立坐标系，取弹簧恢复原长时 M_1 的坐标为原点.

开始时，M_1 的坐标为 x_1，有

$$x_1 = -\frac{M_1 g}{k} \qquad ①$$



题 5.14 图

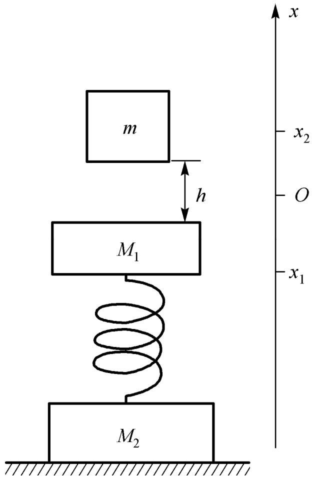


图 5.14a

m 下落碰撞 M_1 达到共同速度 v_1

$$\begin{cases} mgh = \dfrac{1}{2} m v_{\text{碰前}}^2 \\ m v_{\text{碰前}} = (M_1 + m) v_1 \end{cases}$$

解得

$$v_1 = \frac{m}{M_1 + m} \cdot \sqrt{2gh} \qquad ②$$

这时 v_1 的方向向下，m 、M_1 共同向下运动至最低处，然后又以共同速度上升到 x_2 位置时静止（此时弹簧长度大于原长，而 M_2 刚好与桌面互相脱离，这时的 $h = h_{\min}$ 为最小值），有

$$x_2 = \frac{M_2 g}{k} \qquad ③$$

由能量守恒有

$$\frac{1}{2}(M_1 + m)v_1^2 + (M_1 + m)gx_1 + \frac{1}{2}kx_1^2 = (M_1 + m)gx_2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \qquad ④$$

由方程①～方程④可解得

$$h_{\min} = \frac{g}{2km^2}(M_1 + m)(M_1 + M_2)(M_1 + M_2 + 2m)$$

【解后思考】

若 m ，M_1 碰撞后不是始终粘在一起，只要 m 向上运动的速度大于 M_1 向上运动的速度时 m ，M_1 即分离. 则在弹簧恢复原长之前 m 、M_1 共同运动，此后弹簧长度

大于原长，M_1、m 分离，设在弹簧恢复原长时，M_1 与 m 分离前的共同速度为 v_0，那么上述的方程①～方程③不变，方程④应改写为

$$\frac{1}{2}(M_1+m)v_1^2+(M_1+m)gx_1+\frac{1}{2}kx_1^2=\frac{1}{2}(M_1+m)\cdot v_0^2 \tag{⑤}$$

$$\frac{1}{2}M_1v_0^2=M_1gx_2+\frac{1}{2}kx_2^2 \tag{⑥}$$

由方程①～方程③、方程⑤和方程⑥可解得

$$\begin{aligned}h_{\min}&=\frac{g(M_1+m)}{2km^2M_1}[M_1(M_1+M_2)(M_1+M_2+2m)+mM_2^2]\\&=\frac{g(M_1+m)[(M_1+m)(M_1+M_2)^2+mM_1^2]}{2km^2M_1}\end{aligned}$$

5.15　在光滑的水平面上，一质量为 M 的架子内连有一倔强系数为 k 的弹簧，如图所示. 一质量为 m 的小球以 u 的速度射入静止的架子内，并开始压缩弹簧. 设小球与架子内壁间无摩擦力. 试求：

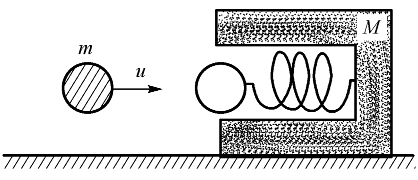
（1）弹簧的最大压缩量；

（2）从弹簧被压缩到弹簧达最大压缩所需的时间；

（3）在此过程中架子的位移.

解　设弹簧原长为 l_0，当小球 m 刚开始压缩弹簧时，把图简化为图 5.15a. 小球与架子都看成质点，坐标分别为 x_1、x_2，开始时的位置分别为 x_{10}、x_{20}，相距 l_0，即 $x_{20}-x_{10}=l_0$. 如图 5.15a 所示，在实验室坐标系中（K 系），取质心为原点. m 和 M 的初始位置为

$$x_{10}=-\frac{Ml_0}{M+m},\qquad x_{20}=\frac{ml_0}{M+m}$$



题 5.15 图

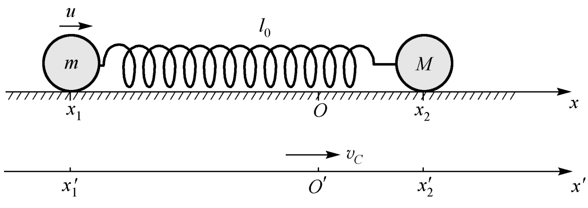


图 5.15a

初始时的速度为

$$v_{10}=u,\qquad v_{20}=0$$

质心速度 $v_C=\dfrac{mu}{M+m}$，由于没有摩擦，质心做匀速直线运动.

再取一个质心系（K' 系），K' 系相对于 K 系以速度 $v_C=\dfrac{mu}{M+m}$ 做匀速直线运动. 在质心系中，小球与架子坐标分别为 x_1'、x_2'. 初始时的坐标分别为 x_{10}'、x_{20}'，速度分别为 v_{10}'、v_{20}'，有

$$x_{10}'=-\frac{Ml_0}{M+m}，\quad x_{20}'=\frac{ml_0}{M+m} \tag{①}$$

$$v_{10}'=\frac{Mu}{M+m}，\quad v_{20}'=-\frac{mu}{M+m} \tag{②}$$

在质心系中有

$$mx_1'+Mx_2'=0，\quad mv_1'+Mv_2'=0$$

于是有

$$x_1'=-\frac{Mx_2'}{m}，\quad v_1'=-\frac{Mv_2'}{m} \tag{③}$$

设弹簧 t 时刻的压缩量为 x，有

$$x=x_2'-x_1'-l_0 \tag{④}$$

由能量守恒

$$\frac{1}{2}mv_1'^2+\frac{1}{2}Mv_2'^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mv_{10}'^2+\frac{1}{2}Mv_{20}'^2 \tag{⑤}$$

在质心系中弹簧达到最大压缩时

$$v_1'=v_2'=0$$

由式②和式⑤可得

$$|x_{\max}|=u\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}$$

在水平方向，M 仅受弹性力作用，列出 M 的运动方程：

$$M\frac{\mathrm{d}^2x_2'}{\mathrm{d}t^2}=-k(x_2'-x_1'-l_0)=-\frac{k(M+m)}{m}x_2'+kl_0$$

利用式①可得

$$\frac{\mathrm{d}^2(x_2'-x_{20}')}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{k(M+m)}{m}(x_2'-x_{20}') \tag{⑥}$$

这是一个振动方程，初始条件为

$$t=0\text{时，}\quad x_2'(0)=x_{20}'=\frac{ml_0}{M+m}，\quad v_2'(0)=v_{20}'=-\frac{mu}{M+m} \tag{⑦}$$

方程⑥的解为

$$x_2'(t)-x_{20}'=A\cos\left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}}t+\varphi\right) \tag{⑧}$$

利用初始条件⑦得

$$A=\frac{mu}{M+m}\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}},\quad \varphi=\frac{\pi}{2} \tag{⑨}$$

将式⑦和式⑨代入式⑧得

$$x_2'(t)=\frac{ml_0}{M+m}-\frac{mu}{M+m}\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}\sin\left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}}t\right) \tag{⑩}$$

$$v_2'(t)=-\frac{mu}{M+m}\cos\left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}}t\right) \tag{⑪}$$

设 $t=t_0$ 时，弹簧达到最大压缩，有 $v_2'(t_0)=0$，由式⑪和式⑩得

$$t_0=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}，\quad x_2'(t_0)=\frac{ml_0}{M+m}-\frac{mu}{M+m}\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}} \tag{⑫}$$

在原参考系中，由于质心以速度 $v_C=\dfrac{mu}{M+m}$ 做匀速直线运动，则架子 M 的坐标为

$$x_2(t_0)=\frac{mu}{M+m}t_0+x_2'(t_0)=\frac{mu}{M+m}t_0+\frac{ml_0}{M+m}-\frac{mu}{M+m}\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}$$

架子 M 的位移为

$$s(t_0)=x_2(t_0)-x_{20}=\frac{mu}{M+m}t_0-\frac{mu}{M+m}\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{mu}{M+m}\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}$$

结论：

（1）弹簧的最大压缩量 $|x_{\max}|=u\sqrt{\dfrac{Mm}{k(M+m)}}$；

（2）从弹簧被压缩到弹簧达最大压缩所需的时间 $t_0=\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{Mm}{k(M+m)}}$；

（3）在此过程中架子的位移 $s(t_0)=\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)\dfrac{mu}{M+m}\sqrt{\dfrac{Mm}{k(M+m)}}$.

【解后思考】

若仅需要求第（1）问，也可以不用质心系，在原坐标系即可.

当弹簧达最大压缩量 $x_{\max}$ 时，球与架子速度相同，又设当弹簧压缩量为 x（在达 $x_{\max}$ 前）时，球与架子的速度分别为 v_1 与 v_2，

动量守恒：$mu = mv_1 + Mv_2$　①

能量守恒：$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}kx^2$　②

当 $v_1 = v_2$ 时，$x = x_{\max}$，由式①和式②解得

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2u^2}{M+m} + \frac{1}{2}kx_{\max}^2$$

即

$$|x_{\max}| = u\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}$$

求第（2）、（3）问，质心系还是要方便一点.

5.16　在水平桌面上，质量分别为 M 和 m 的两物块由一倔强系数为 k 的弹簧相连. 物块与桌面间的摩擦系数均为 μ. 开始时，弹簧处于原长，m 静止，而 M 以 $v_0 = \sqrt{\frac{6Mmg^2\mu^2}{k(M+m)}}$ 的速度拉伸弹簧. 试求：当弹簧达最大拉伸时的伸长量（设 $M > m$）.

解　初始时 M 减速，m 静止，当弹簧伸长 $x_0 = \frac{\mu mg}{k}$ 时，m 开始运动，此时 M 速度 v_0'，则

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 - \frac{1}{2}Mv_0'^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 + \mu mgx_0 \quad ①$$

代入数据，得

$$Mv_0'^2 = \frac{2m\mu^2g^2}{k(M+m)}(3M^2 - mM - m^2) > 0$$

以后，M,m 一起运动，在质心系中（质心速度 $v_C = \frac{Mv_0'}{M+m}$），此时相对于质心：

$$M\text{：}\ v_{10} = \frac{mv_0'}{M+m},\qquad m\text{：}\ v_{20} = -\frac{Mv_0'}{M+m} \quad ②$$

当弹簧达最大伸长 x_{m} 时，M,m 相对于质心静止，由能量定理

$$\frac{1}{2}kx_{\mathrm{m}}^2 - \left(\frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}Mv_{10}^2 + \frac{1}{2}mv_{20}^2\right) = -(\mu Mg\Delta l_1 + \mu mg\Delta l_2) \quad ③$$

Δl_1，Δl_2 分别为 M，m 相对于质心位移.

由于质心位置不变，位于原点：$Ml_1 + ml_2 = 0$，于是 $M\Delta l_1 + m\Delta l_2 = 0$，所以

$$\mu Mgl_1 + \mu mgl_2 = \mu g(Ml_1 + ml_2) = 0$$

式③即

$$\frac{1}{2}kx_0^2+\frac{1}{2}Mv_{10}^2+\frac{1}{2}mv_{20}^2=\frac{1}{2}kx_{\mathrm{m}}^2 \quad ④$$

将数据②代入式④，可得

$$x_{\mathrm{m}}=\frac{\mu mg}{k(M+m)}\sqrt{5M^2-mM}$$

5.17　两个相同的弹性球发生碰撞，如果碰撞前它们的运动方向相互垂直. 证明：碰撞后的运动方向也相互垂直.

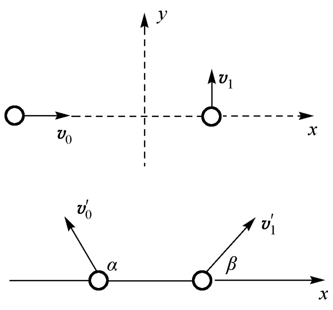


图 5.17a

解　参见图 5.17a. 由于碰撞是弹性的，

x 水平方向动量守恒：$mv_0=mv_0'\cos\alpha+mv_1'\cos\beta$　①

y 方向动量守恒：$mv_1=mv_0'\sin\alpha+mv_1'\sin\beta$　②

碰撞前后机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}mv_0'^2+\frac{1}{2}mv_1'^2 \quad ③$$

联立式①～式③解得

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)=0$$

即 $\alpha-\beta=90^\circ$，故碰撞后运动方向也垂直.

5.18　两个弹性小球 A 和 B，A 的质量为 50g，B 的质量为 100g，B 球静止在光滑的水平面上，A 球以 50cm/s 的速率与 B 球作对心碰撞. 在碰撞过程中，A 球的速率逐渐减小，B 球的速率逐渐增大. 当两球的速率相等时，它们的动量之和是多少？动能之和是多少？弹性位能是多少？

解　由于弹性碰撞，碰撞前后系统动量、机械能均守恒：

$$P_{后}=P_{前}=m_Av_A+m_Bv_B=50\times10^{-3}\times(50\times10^{-2})=2.5\times10^{-2}\mathrm{kg\cdot m/s}$$

当两球速率相等，即 $v_A'=v_B'$ 时，由 $m_Av_A'+m_Bv_B'=P_{后}$，得

$$v_A'=\frac{P_{后}}{m_A+m_B}=\frac{2.5\times10^{-2}}{50\times10^{-3}+100\times10^{-3}}=\frac{1}{6}(\mathrm{m/s})$$

所以

$$E_{k后}=\frac{1}{2}m_Av_A'^2+\frac{1}{2}m_Bv_B'^2=\frac{1}{2}(m_A+m_B)v_A'^2=\frac{1}{2}(50\times10^{-3}+100\times10^{-3})\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=2.1\times10^{-3}(\mathrm{J})$$

碰撞前：

$$E_{机械}=E_{k前}=\frac{1}{2}m_Av_A^2=\frac{1}{2}\times(50\times10^{-3})\times(50\times10^{-2})^2=6.25\times10^{-3}(\mathrm{J})$$

碰撞后：

$$E_{机械}'=E_{k后}+E_{势}$$

又 $E_{机械}=E'_{机械}$，故

$$E_{势}=E_{k前}-E_{k后}=6.25\times10^{-3}-2.1\times10^{-3}=4.15\times10^{-3}(\mathrm{J})$$

即两球的速率相等时，它们的动量之和是 $2.5\times10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m/s}$，动能之和是 $2.1\times10^{-3}\,\mathrm{J}$，弹性位能是 $4.15\times10^{-3}\,\mathrm{J}$.

5.19　一个速率为 v_0、质量为 m 的运动粒子，与一质量为 am 的静止靶粒子作完全弹性对心碰撞. 问 a 的值多大时，靶粒子所获得的动能最大？

解　由于完全弹性碰撞，系统动量、机械能守恒.

由教材式（5.6.8），其中

$$e=1,\quad m_1=m,\quad m_2=am,\quad u_1=v_0,\quad u_2=0$$

得

$$v_2=\frac{(1+e)m_1}{m_1+m_2}u_1+\frac{m_2-em_1}{m_1+m_2}u_2=\frac{2}{1+a}v_0,\qquad E_{k靶}=\frac{1}{2}(am)v_2^2=\frac{2mv_0^2}{2+a+\dfrac{1}{a}}$$

当 $a=\dfrac{1}{a}$，即 $a=1$ 时，靶粒子所获得的动能最大.

5.20　质量为 m_1 的运动粒子与质量为 m_2 的静止粒子发生完全弹性碰撞. 证明：

（1）当 $m_1<m_2$ 时，m_1 的偏转角可能取 0 到 π 之间所有值；

（2）当 $m_1>m_2$ 时，$\theta_{\max}$ 满足公式 $\cos^2\theta_{\max}=1-m_2^2/m_1^2$，$0\leqslant\theta_{\max}<\pi/2$.

解　如图 5.20a 所示. 设碰撞后 m_1 和 m_2 的速率分别为 v_1 和 v_2，在完全弹性碰撞中，动量与能量都守恒，有

$$m_1u_1=m_1v_1\cos\theta_1+m_2v_2\cos\theta_2 \qquad ①$$

$$0=m_1v_1\sin\theta_1-m_2v_2\sin\theta_2 \qquad ②$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad ③$$

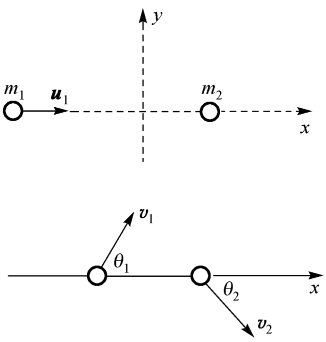


图 5.20a

联立式①～式③得

$$\cos\theta_1=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{v_1}{u_1}+\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{u_1}{v_1}\right]$$

当 $m_1<m_2$，即 $\dfrac{m_2}{m_1}>1$ 时，$\dfrac{1}{2}\left[\left(1+\dfrac{m_2}{m_1}\right)\dfrac{v_1}{u_1}+\left(1-\dfrac{m_2}{m_1}\right)\dfrac{u_1}{v_1}\right]$ 可能为正，可能为负，故 m_1 的偏转角 θ_1 可能取得 0 到 π 之间的所有值.

当 $m_1>m_2$ 时，即 $\dfrac{m_2}{m_1}<1$，有

$$\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{v_1}{u_1}>0\,,\qquad \left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{u_1}{v_1}>0$$

由不等式性质，$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}(a,b>0)$，有

$$\cos\theta_1\geqslant\sqrt{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{v_1}{u_1}\cdot\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{u_1}{v_1}}=\sqrt{1-\frac{m_2^2}{m_1^2}}$$

所以

$$\cos^2\theta_{\max}=1-\frac{m_2^2}{m_1^2}\quad\left(0\leqslant\theta_{\max}<\frac{\pi}{2}\right)$$

5.21　一运动粒子与一质量相等的静止粒子发生完全弹性碰撞. 如果碰撞不是对心的，证明：碰撞后两粒子的运动方向彼此垂直.

证法一　如图 5.21a 所示. 在完全弹性碰撞中，动量和动能都守恒：

$$m_1u_1=m_1v_1\cos\theta_1+m_2v_2\cos\theta_2 \tag{①}$$

$$0=m_1v_1\sin\theta_1-m_2v_2\sin\theta_2 \tag{②}$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2 \tag{③}$$

题设

$$m_1=m_2 \tag{④}$$

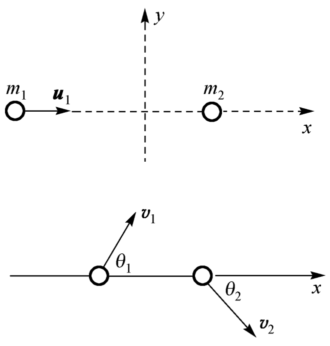


图 5.21a

联立式①～式④得

$$\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2=0$$

即

$$\cos(\theta_1+\theta_2)=0\,,\qquad \theta_1+\theta_2=90^\circ$$

故碰撞后两粒子运动方向垂直.

证法二　由动量和动能守恒得

$$m_1\boldsymbol{u}_1=m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2\,,\qquad \frac{1}{2}m_1\boldsymbol{u}_1^2=\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1^2+\frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2^2$$

题设

$$m_1=m_2$$

于是

$$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2 \tag{⑤}$$

$$u_1^2=v_1^2+v_2^2 \tag{⑥}$$

方程⑤表明 $\boldsymbol{u}_1$ 、$\boldsymbol{v}_1$ 、$\boldsymbol{v}_2$ 三个矢量构成一个三角形，式⑥是勾股定理，表明该三角形是直角三角形，$\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 垂直.

5.22　两个可以在平直导轨上自由运动的滑块，质量分别为 m_1 和 m_2，若 m_1 静止，m_2 向 m_1 运动，且与 m_1 作完全弹性碰撞，碰后分开时它们的速度大小相等而方向相反，问这两滑块的质量之比是多少？

解　设 m_2 初速为 v_0，末速为 v_t，题设 m_1 末速为 $-v_t$.

由动量守恒 $m_2v_0 = m_1v_t - m_2v_t$，所以

$$v_t = \frac{m_2}{m_1 - m_2}v_0$$

由能量守恒

$$\frac{1}{2}m_2v_0^2 = \frac{1}{2}m_1v_t^2 + \frac{1}{2}m_2v_t^2$$

代入 v_t，整理，得

$$m_2(m_1 - m_2)^2 = m_2^2(m_1 + m_2)$$

即

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 = 3\cdot\frac{m_1}{m_2}$$

所以

$$\frac{m_1}{m_2} = 3$$

5.23　一质量为 m_0、速度为 $\boldsymbol{v}_0$ 的粒子与一质量为 am_0 的靶粒子发生弹性碰撞.

（1）碰撞后，靶粒子的速度 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{v}_0$ 间的夹角 β 最大能等于多少？

（2）写出碰撞后靶粒子在实验室坐标系中的动能 E_k（以 a，β 和 $E_0 = m_0v_0^2/2$ 表示）.

解　（1）如图 5.23a 所示，设碰后，粒子速度 $\boldsymbol{v}'$ 与 $\boldsymbol{v}_0$ 夹角为 α. 有

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant \pi \qquad ①$$

动量守恒：

$$m_0\boldsymbol{v}_0 = m_0\boldsymbol{v}' + am_0\boldsymbol{v}$$

即

$$m_0v_0 = m_0v'\cos\alpha + am_0v\cos\beta \qquad ②$$

$$0 = m_0v'\sin\alpha - am_0v\sin\beta \qquad ③$$

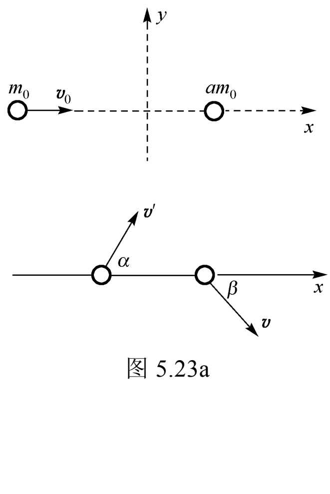


图 5.23a

能量守恒：

$$\frac{1}{2}m_0v_0^2=\frac{1}{2}m_0v'^2+\frac{1}{2}am_0v^2 \qquad ④$$

由式②和式③得

$$v=\frac{\sin\alpha}{a\sin(\alpha+\beta)}v_0\,,\qquad v'=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}v_0 \qquad ⑤$$

代入式④得

$$a\sin^2(\alpha+\beta)=a\sin^2\beta+\sin^2\alpha \qquad ⑥$$

于是

$$a\sin^2(\alpha+\beta)>a\sin^2\beta$$

即

$$\left|\sin(\alpha+\beta)\right|>\left|\sin\beta\right| \qquad ⑦$$

由式①和式⑤可得

$$\beta<\pi/2\,,\qquad \alpha<\pi-2\beta \qquad ⑧$$

即靶粒子的速度 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{v}_0$ 间的夹角 β 最大值为 $\pi/2$.

（2）由式⑤可得碰撞后靶粒子在实验室坐标系中的动能：

$$E_k=\frac{1}{2}am_0\cdot v^2=\frac{m_0v_0^2}{2a}\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\right)^2=\frac{m_0v_0^2}{2a}\cdot\frac{1}{(\sin\beta\cot\alpha+\cos\beta)^2} \qquad ⑨$$

为了化简式⑨，先从式⑥解出 α：

将式⑥展开，所有项移到方程一边得

$$a\sin^2\beta+\sin^2\alpha-a\sin^2\alpha\cos^2\beta-a\cos^2\alpha\sin^2\beta-2a\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta=0$$

化简得

$$\sin^2\alpha-a\sin^2\alpha\cos2\beta-a\sin\alpha\cos\alpha\sin2\beta=0$$

最后得

$$\cot\alpha=\frac{1-a\cos2\beta}{a\sin2\beta} \qquad ⑩$$

将式⑩代入式⑨消去 α 得

$$E_k=\frac{4a}{(1+a)^2}\cos^2\beta\cdot E_0$$

5.24 某建筑工地上，一送料吊车以 1.0 m/s 的速度匀速上升，一物体由距吊车底板 22m 的地方由静止落下，落在吊车底板上. 设物体和吊车底板间的恢复系数为 0.20，问物体第一次回跳的最高点在物体开始落下的那点以下（或以上）多少距离处？

解 题设 $H=22\text{m}$．设物体经过 t 时间落在吊车底板上，取吊车参考系（惯性系），则物体初速向下，$v_0=1\text{m/s}$，$H=v_0t+\dfrac{1}{2}gt^2$，得

$$t=\frac{1}{g}\left(-v_0\pm\sqrt{v_0^2+2gs}\right)$$

解得

$$t=2\text{s}\qquad（另一解\ t=-2.2\text{s}\ 不合题意，舍去）$$

这段时间吊车底板上升高度为

$$H_1=v_0t=2\text{m}$$

取地面参考系（惯性系），向上为正向.

碰撞前，吊车速度：$u_1=1\text{m/s}$，物体速度：$u_2=-gt=-9.8\times2=-19.6(\text{m/s})$

碰撞后，吊车速度：$v_1=u_1$，物体速度：v_2

由课本式（5.6.7），$v_2-v_1=e(u_1-u_2)$，得

$$v_2=(1+e)u_1-eu_2=(1+0.2)\times1-0.2\times(-19.6)=5.12(\text{m/s})$$

回跳高度为

$$H_2=\frac{v_2^2}{2g}=1.3\text{m}\ （此时吊车底板还没有升到这个高度）$$

回跳的最高点在物体开始落下的那点以下的距离为

$$s=H-H_1-H_2=18.7\text{m}$$

5.25 （1）一质量为 m 的运动粒子与一质量为 M（$>m$）的静止粒子发生完全弹性碰撞，碰撞后 m 的运动方向偏转了 90°，问 M 的运动方向如何？

（2）如果碰撞不是完全弹性的，碰撞中损失的动能与原来动能之比为 $1-\alpha^2$，问 M 的运动方向如何？

解 （1）如图 5.25a 所示，设 M 的偏转角度为 θ．由于是弹性碰撞，动量守恒：

$$mu_m=Mv_M\cos\theta \qquad ①$$

$$0=Mv_M\sin\theta-mv_m \qquad ②$$

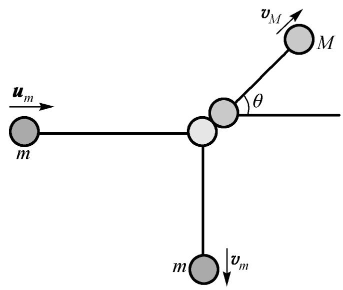


图 5.25a

机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mu_m^2=\frac{1}{2}Mv_M^2+\frac{1}{2}mv_M^2 \qquad ③$$

由式①～式③联立解得

$$\cos2\theta=\frac{m}{M}$$

或

$$\tan^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{1+\cos2\theta}=\frac{M-m}{M+m}$$

即

$$\theta=\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{m}{M}\right)$$

或

$$\theta=\arctan\sqrt{\frac{M-m}{M+m}}$$

（2）不完全弹性碰撞，动量仍守恒：

$$mu_m=Mv_M\cos\theta \tag{④}$$

$$0=Mv_M\sin\theta-mv_m \tag{⑤}$$

机械能不守恒，但由题意

$$\frac{\frac{1}{2}mu_m^2-\frac{1}{2}Mv_m^2-\frac{1}{2}mv_m^2}{\frac{1}{2}mu_m^2}=1-\alpha^2 \tag{⑥}$$

联立式④～式⑥得

$$\alpha^2\cos^2\theta=\sin^2\theta+\frac{m}{M}$$

得

$$\theta=\arctan\sqrt{\frac{\alpha^2M-m}{M+m}}$$

第 6 章　角动量定理

6.1　已知地球的质量为 $5.98\times10^{24}\,\mathrm{kg}$，地球到太阳的距离为 $1.49\times10^{8}\,\mathrm{km}$，地球绕太阳公转的周期为 365.25 天，求地球绕太阳公转的角动量.

解　角动量大小

$$J = Rmv = Rm\cdot\frac{2\pi}{T}R = \frac{2\pi mR^2}{T} = \frac{2\times3.14\times5.98\times10^{24}\times(1.49\times10^{11})^2}{365.25\times24\times3600}$$
$$= 2.64\times10^{40}(\mathrm{kg\cdot m^2/s})$$

6.2　一质量为 m 的地球人造卫星在半径为 r 的圆轨道上运行，用 r 、 G 、 m 、 M 表示它相对于轨道中心的角动量. 其中 G 是万有引力常数， M 是地球质量. 若 $m=100\mathrm{kg}$ ， r 等于地球半径的两倍，此人造卫星的角动量的数值是多少？

解　由于人造卫星在半径为 r 的圆轨道上运行，有 $\dfrac{GMm}{r^2}=m\dfrac{v^2}{r}$ ，于是 $v=\sqrt{\dfrac{GM}{r}}$ ，

$$J = mrv = mr\sqrt{\frac{GM}{r}} = m\sqrt{GMr}$$

题设

$M=5.98\times10^{24}\,\mathrm{kg}$ ，　$m=100\mathrm{kg}$ ，　$r=2\times6400\mathrm{km}$ ，　$G=6.67\times10^{-11}\mathrm{m^3/(kg\cdot s^2)}$

则

$$J = 100\times\sqrt{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times64\times10^5\times2} = 7.14\times10^{12}(\mathrm{kg\cdot m^2/s})$$

6.3　一人造卫星的质量为 m ，在一半径为 r 的圆轨道上运行，其角动量为 L ，求它的动能、位能和总能量.

解　由于 $J=mrv$ ，故 $v=J/mr$.

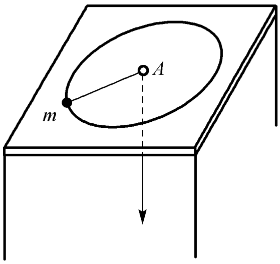
动能： $E=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{m}{2}\cdot\dfrac{L^2}{m^2r^2}=\dfrac{L^2}{2mr^2}$

位能： $V=-2E=-\dfrac{L^2}{mr^2}$ （对于圆形轨道的中心力场， $V=-2E$ ）

总能量： $E_{总}=E+V=-E=-\dfrac{L^2}{2mr^2}$

6.4　绳的一端系一质量为 $m=50\mathrm{g}$ 的物体，绳的另一端穿过一光滑桌面上的小孔 A 用手拉着. 如图所示，物体原以角速度 $\omega_0=3.0\mathrm{rad/s}$ 在桌面上的半径为 $r_0=20\mathrm{cm}$

的圆周上运动. 现将绳往下拉 10cm，将物体作质点看待，求其角速度的变化和能量的变化. （绳子质量以及物体和绳子与桌面之间的摩擦力均可不计. ）



题 6.4 图

解　易见外力力矩为零，$\boldsymbol{M}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=0$，知角动量守恒.

原角动量 $J=m\omega r_0^2$，现角动量 $J'=m\omega'\left(\dfrac{r_0}{2}\right)^2$，所以

$$\omega'=4\omega=12\text{rad/s}, \qquad \Delta\omega=\omega'-\omega=9\text{rad/s}$$

原能量 $E=\dfrac{m}{2}\omega^2r_0^2$，现能量 $E'=\dfrac{m}{2}\omega'^2\left(\dfrac{r_0}{2}\right)^2=2m\omega^2r_0^2$，所以

$$\Delta E=E'-E=\frac{3}{2}m\omega^2r_0^2=2.7\times10^{-2}\,\text{J}$$

即角速度增加了 9rad/s，能量增加了 0.027J.

6.5　在一长度为 a 的棒的两端固定两个质点 A 和 B，形成一个“哑铃”. 整个体系的质心在没有引力的空间静止不动. 两质点绕其质心以 ω 角速度旋转. 在旋转中其中一个质点与一静止的第三个质点 C 相碰，并粘在一起. 已知质点 A、B、C 的质量都是 M，棒的质量可略去不计.

（1）确定碰撞前那一瞬间三个质点共同的质心位置以及此时质心的速度；

（2）碰撞前那一瞬间三个质点的体系绕其质心旋转的角动量是多少？碰撞后三质点体系绕其质心旋转的角动量是多少？

（3）碰撞后系统绕质心的角速度是多少？

（4）碰撞前后的动能各是多少？

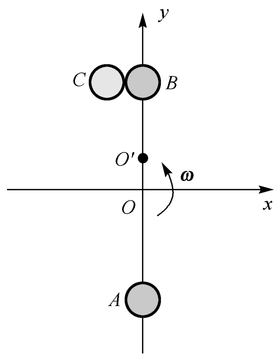


图 6.5a

解（1）如图 6.5a 取坐标系，取坐标原点 O 为质点 A 和 B 的质心，设刚碰撞时 A 和 B 在 y 轴上，即第三个质点 C 也在 y 轴上. 设 O' 点为 A、B、C 体系的质心，于是有

碰撞前 A、B、C 的坐标：$\boldsymbol{r}_A=-\dfrac{a}{2}\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{r}_B=\dfrac{a}{2}\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{r}_C=\dfrac{a}{2}\boldsymbol{j}$

碰撞前 A、B、C 的速度：$\boldsymbol{v}_A=\dfrac{a\omega}{2}\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{v}_B=-\dfrac{a\omega}{2}\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{0}$

其中，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 分别是 x，y 轴的单位向量.

三个质点共同的质心位置 O' 的坐标：$\boldsymbol{r}_{O'}=\dfrac{M\boldsymbol{r}_A+M\boldsymbol{r}_B+M\boldsymbol{r}_C}{3M}=\dfrac{a}{6}\boldsymbol{j}$

三个质点共同的质心的速度：$\boldsymbol{v}_{O'}=\dfrac{M\boldsymbol{v}_A+M\boldsymbol{v}_B+M\boldsymbol{v}_C}{3M}=\boldsymbol{0}$

（2）碰前

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}_A\times M\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{r}_B\times M\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{r}_C\times M\boldsymbol{v}_C=\frac{M\omega a^2}{2}\boldsymbol{k}$$

其中，$\boldsymbol{k}$ 是 z 轴的单位向量，垂直于纸面向外.

碰后：由于体系无外力矩作用，故体系角动量守恒

$$\boldsymbol{J}'=\boldsymbol{J}=\frac{M\omega a^2}{2}\boldsymbol{k}$$

（3）碰后，三个质点共同的质心仍保持静止，转动惯量为

$$I=2M\left(\frac{a}{3}\right)^2+M\left(\frac{2a}{3}\right)^2=\frac{2}{3}Ma^2$$

碰撞后系统绕质心的角速度为

$$\boldsymbol{\omega}'=\frac{\boldsymbol{J}'}{I}=\frac{3}{4}\omega\boldsymbol{k}$$

（4）碰前：

$$E=2\times\frac{1}{2}M\left(\frac{a}{2}\right)^2\omega^2=\frac{1}{4}M\omega^2a^2$$

碰后：

$$E'=\frac{M}{2}\sum_{i=A}^{c}v_i^2=\frac{M}{2}\sum_{i=A}^{c}v_i\omega' r_i=\frac{\omega'}{2}\sum_{i=A}^{c}Mv_ir_i=\frac{\omega'}{2}J=\frac{3}{16}M\omega^2a^2$$

6.6　两个滑冰运动员，体重都是 60kg，在两条相距 10m 的平直跑道上以 6.5 m/s 的速率相向地匀速滑行. 当他们之间的距离恰好等于 10m 时，他们分别抓住一根 10m 长的绳子的两端. 若将每个运动员看成一个质点，绳子质量略去不计.

（1）求他们抓住绳子前后相对于绳子中点的角动量.

（2）他们每人都用力往自己一边拉绳子，当他们之间距离为 5.0m 时，各自的速率是多少？

（3）计算每个运动员在减小他们之间的距离时所做的功. 证明：这个功恰好等于他们动能的变化.

（4）如果在两运动员之间相距刚好等于 5.0m 时绳子断了，问此刻绳子中的张力多大？

解　（1）

$$L_{前}=L_{后}=2mv_0\frac{R}{2}=3900\mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

（2）角动量守恒，$L=3900=5\times60\times v$，得

$$v=13\mathrm{m/s}$$

（3）因为 $v_C=0$（质心速率），故拉力 T 为向心力，有

$$T=m\frac{v^2}{l/2}\qquad（l\ 为两人之间的距离）$$

每个人做功为

$$W=\int_{10}^{5}(-T)\frac{\mathrm{d}l}{2}=\int_{10}^{5}\left(-m\frac{v^2}{l}\right)\mathrm{d}l=\int_{10}^{5}\left(-m\frac{1}{l}\frac{L^2}{m^2l^2}\right)\mathrm{d}l=\frac{L^2}{m}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{100}\right)=3802.5(\mathrm{J})$$

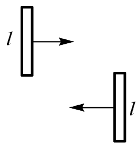
每个人动能的变化为

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}\times 60\times(13^2-6.5^2)=3802.5(\mathrm{J})$$

所以这个功等于他们动能的变化.

（4）
$$T=\frac{mv^2}{l/2}=\frac{2\times 60\times 13^2}{5}=4056(\mathrm{N})$$

6.7　两根均匀细杆，质量都是 m，长度都是 l，都以速率 v 在垂直于长度方向平动，速度方向相反，如图所示. 当它们相遇时，相邻两端恰好相碰，而且粘接在一起形成一根长为 $2l$ 的直杆.



题 6.7 图

（1）问碰撞后它们怎样运动？

（2）求碰撞后的角速度.

解　（1）碰后绕粘接处（质心）转动.

（2）碰撞前后角动量守恒：

$$J=mvl=I\omega$$

碰撞后的转动惯量：

$$I=2\int_0^l r^2\mathrm{d}m=\frac{2m}{l}\int_0^l r^2\mathrm{d}r=\frac{2}{3}ml^2$$

碰撞后的角速度：

$$\omega=\frac{J}{I}=\frac{mvl}{2ml^2/3}=\frac{3v}{2l}$$

6.8　由火箭将一颗人造卫星送入离地面很近的轨道，进入轨道时，卫星的速度方向平行于地面，其大小为在地面附近做圆运动的速度的 $\sqrt{1.5}$ 倍. 试求该卫星在运行中与地球中心的最远距离.

解　设在地面附近做圆运动的速度为 v_0，有 $m\dfrac{v_0^2}{R}=\dfrac{GMm}{R^2}$，即 $v_0=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$（R 为地球半径）.

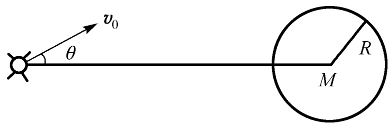
题设：$v=\sqrt{1.5}v_0=\sqrt{\dfrac{3GM}{2R}}$ 时，设该卫星在运行中与地球中心的最远距离为 $r_{\max}$、速度为 v'.

角动量守恒：$mvR = mv'r_{\max}$

能量守恒：$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{GMm}{r_{\max}}$

将两式联立可解得 $r_{\max} = 3R$.

6.9　发射一宇宙飞船去考察一质量为 M、半径为 R 的行星. 当飞船静止于空间离行星中心 $5R$ 处时，以速度 v_0 发射一包仪器，如图所示. 仪器包的质量 m 远小于飞船的质量，要使这仪器包恰好掠擦行星表面着陆，θ 角应是多少？



题 6.9 图

解　仪器受有心力作用，所以相对于行星质心的角动量守恒.

初始时角动量为 $l_0 = 5Rmv_0\sin\theta$，到达行星时角动量为 $mv_1R = 5Rmv_0\sin\theta$，v_1 为掠擦行星表面的着陆速度. 所以

$$v_1 = 5v_0\sin\theta \tag{①}$$

能量守恒：

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{5R} = \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{R} \tag{②}$$

由方程①和方程②可解得

$$\theta = \arcsin\left(\frac{1}{5}\sqrt{\frac{8GM}{5Rv_0^2}+1}\right)$$

6.10　质量为 M 和 m 的两物体系在原长为 a，倔强系数为 k 的弹簧两端，并放在光滑水平面上，现使 M 获得一与弹簧垂直的速度 v_0，若 $v_0 = 3a\sqrt{\frac{k}{2\mu}}$，其中 μ 为折合质量. 试证明，在以后的运动过程中，两物体之间的最大距离为 $3a$.

证明　取相对于 m 静止的参考系，可以将两体问题换化为单体问题.

设两物体之间的最大距离为 r，此时的速度为 v.

角动量守恒：$\mu v_0 a = \mu v r$，可得

$$v = \frac{av_0}{r} \tag{①}$$

能量守恒：

$$\frac{1}{2}\mu v_0^2 = \frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{1}{2}k(r-a)^2 \tag{②}$$

题设

$$v_0 = 3a\sqrt{\frac{k}{2\mu}} \quad ③$$

将式①和式③代入式②整理得

$$2r^4 - 4ar^3 - 7a^2r^2 + 9a^4 = 0$$

该方程有两个实根和两个复根，两个复根不合题意，舍去. 两个实根为

$$r_1 = a \text{ 和 } r_2 = 3a$$

即两物体之间的最大距离为$3a$.

6.11　质量皆为m的两珠子可在光滑轻杆上自由滑动，杆可在水平面内绕过O点的光滑竖直轴自由旋转. 原先两珠对称地位于O点的两边，与O相距a，在$t=0$时刻，对杆施以冲量矩，使杆在极短时间内即以角速度ω_0绕竖直轴旋转，求t时刻杆的角速度ω、角加速度β及两珠与O点的距离r.

解　在水平面上取极坐标系，这是惯性系.

角动量守恒：$\omega_0 a^2 = \omega r^2$，得

$$\omega = \frac{a^2\omega_0}{r^2} \quad ①$$

珠子加速度为

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{r}} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad ②$$

由题设，沿杆的方向珠子不受力，即

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$$

得

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 = r\omega^2 = \frac{a^4\omega_0^2}{r^3} \quad ③$$

初始条件：

$$t=0\text{ 时}，\ r(0) = a，\ v_r(0) = \left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0 \quad ④$$

将式③乘以$\mathrm{d}r$，利用初始条件④积分得

$$v_r^2(t) = a^2\omega_0^2\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \quad ⑤$$

由式⑤得

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}}\mathrm{d}r = a\omega_0\mathrm{d}t$$

利用初始条件④积分得

$$\sqrt{r^2-a^2}=a\omega_0 t$$

解得

$$r=a\sqrt{1+\omega_0^2t^2}$$

代入式①得

$$\omega=\frac{a^2\omega_0}{r^2}=\frac{\omega_0}{1+\omega_0^2t^2}$$

角加速度为

$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\frac{2\omega_0^3t}{(1+\omega_0^2t^2)^2}$$

6.12*　质量均为 m 的小球 1，2 用长为 $4a$ 的细线相连，以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿着与线垂直的方向在光滑水平台面上运动，线处于伸直状态. 在运动过程中，线上距离小球 1 为 a 的一点与固定在台面上的一竖直光滑细钉相碰，设在以后的运动过程中两球不相碰. 求：(1) 小球 1 与钉的最大距离；(2) 线中的最小张力.

解　(1) 题设 $m_1=m_2=m$，初始时刻小球 1，2 到钉子的距离分别为 a 和 $3a$，角动量分别为 mav 和 $-3mav$，方向垂直于纸面向外. t 时刻的情况如图 6.12a 所示，设小球 1，2 到钉子的距离分别为 r 和 $4a-r$，绳张力为 T.

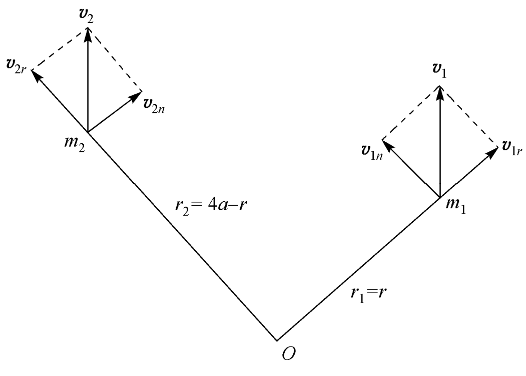


图 6.12a

角动量守恒：

$$mrv_{1n}=mav\,,\qquad m(4a-r)v_{2n}=3av \tag{①}$$

设绳张力为 T，由于绳长不变，则

$$\ddot{r}_1+\ddot{r}_2=0 \tag{②}$$

$$m_1\ddot{r}_1=m\frac{v_{1n}^2}{r}-T \tag{③}$$

$$m_2\ddot{r}_2=\frac{mv_{2n}^2}{4a-r}-T \tag{④}$$

由式①～式④解得

$$T=\frac{ma^2v^2}{2}\left[\frac{1}{r^3}+\frac{9}{(4a-r)^3}\right] \tag{⑤}$$

$$\ddot{r}_1=\frac{a^2v^2}{2}\left[\frac{1}{r^3}-\frac{9}{(4a-r)^3}\right] \tag{⑥}$$

由图可知，$r_1=r$．式⑥乘以 $\mathrm{d}r$ 积分得

$$v_{1r}^2=\int_a^r a^2v^2\left[\frac{1}{r'^3}-\frac{9}{(4a-r')^3}\right]\mathrm{d}r'=-\frac{a^2v^2}{2}\left[\frac{1}{r^2}+\frac{9}{(4a-r)^2}-\frac{2}{a^2}\right] \tag{⑦}$$

$v_{1r}^2=0$ 时，r 最大，令 $x=\dfrac{r}{a}$，由式⑦得

$$x^4-8x^3+11x^2+4x-8=0 \tag{⑧}$$

由题意，寻找方程⑧当 $0<x<4$ 时的解，得

$$x_1=1,\quad x_2\approx 1.653$$

$x_1=1$ 是初始时刻情况，$x_2\approx 1.653$ 是所要求的 r 最大的情况．即小球 1 与钉的最大距离为 $r\approx 1.653a$．

（2）求式⑤的极值，由式⑤对 r 微商为零得

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}=\frac{ma^2v^2}{2}\left[-\frac{3}{r^4}+\frac{27}{(4a-r)^4}\right]=0$$

解得

$$r=\frac{4}{\sqrt{3}+1}a$$

代入式⑤得

$$T_{\min}=\frac{ma^2v^2}{2}\left[\frac{1+\sqrt{3}}{r^3}\right]=\frac{(1+\sqrt{3})^4}{128}\cdot\frac{mv^2}{a}=0.435\frac{mv^2}{a}$$

即线中的最小张力为 $0.435\dfrac{mv^2}{a}$．

第 7 章　万 有 引 力

7.1　在一半径为 R_0 的无空气的小行星表面上，以 v_0 的速度水平抛一物体，使该物体正好在行星表面绕它做圆周运动.

（1）用 v_0、R_0 表示该行星上的逃逸速度.

（2）如在该小行星表面上把一物体竖直上抛，达到的最大高度恰好等于该小行星的半径 R_0. 问上抛速度应为多少？当这物体的高度为 $R_0/2$ 时它的速度为多少？

（3）质量为 m 的物体距离该小行星表面为 y 时，其位能为多少？设 $y<R_0$ 将答案展成 y 的级数（保留到 y^2 项）.

（4）如 $y \ll R_0$，要使物体从星体表面升到高度 y，上抛速度应为多少？

解　（1）物体做圆周运动时

$$m\frac{v_0^2}{R_0}=G\frac{Mm}{R_0^2} \quad ①$$

若要逃逸星球的引力，设速度为 v_1，则其能量 $E=0$，即

$$\frac{1}{2}mv_1^2-G\frac{Mm}{R_0}=0 \quad ②$$

由式①和式②得

$$v_0=\sqrt{\frac{GM}{R_0}}, \qquad v_1=\sqrt{2}v_0 \quad ③$$

即该行星上的逃逸速度为 $\sqrt{2}v_0$.

（2）根据能量守恒，刚抛出时

$$E=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{R_0} \quad ④$$

达到最高点（轨道半径 $2R_0$）

$$E=-G\frac{Mm}{2R_0} \quad ⑤$$

由式③～式⑤可得

$$v=\sqrt{\frac{GM}{R_0}}=v_0$$

高度为$\dfrac{1}{2}R_0$时（轨道半径$\dfrac{3}{2}R_0$）

$$\frac{1}{2}mv'^2-G\frac{Mm}{\frac{3}{2}R_0}=-G\frac{Mm}{2R_0}$$

即

$$v'=\sqrt{\frac{GM}{3R_0}}=\frac{v_0}{\sqrt{3}}$$

（3）以无穷远处为位能零点，位能为

$$V=-\frac{GMm}{R_0+y}=-\frac{GMm}{R_0}\left(\frac{1}{1+y/R_0}\right)=-mv_0^2\left[1-\frac{y}{R_0}+\left(\frac{y}{R_0}\right)^2+\cdots\right]$$

以行星表面处为位能零点，位能为（设V_0为行星表面处位能）

$$V'=V-V_0=-mv_0^2\left[-\frac{y}{R_0}+\left(\frac{y}{R_0}\right)^2+\cdots\right] \quad ⑥$$

（4）利用式⑥，因为$y\ll R_0$，忽略y^2及以上项，位能差为$V'=mv_0^2\dfrac{y}{R_0}$，而$V'=\dfrac{1}{2}mv^2$，解得

$$v=v_0\sqrt{\frac{2y}{R_0}}$$

7.2　两个质量均为 1.0g 的质点，相距 10m. 开始时相对静止，如果它们之间只有万有引力作用，问它们何时相碰？

解法一　利用两体运动理论，将坐标原点取在其中的一个质点上，则运动质点的质量应该用约化质量$\mu=m/2$代替. 考虑两球之间相距为x米时的情况.

$$\frac{Gm^2}{x^2}=\mu\ddot{x}=\frac{m}{2}\ddot{x}$$

即

$$\frac{2Gm}{x^2}\mathrm{d}x=\dot{x}\mathrm{d}\dot{x}$$

两边从$x=10$到x积分并用初始条件$\dot{x}|_{x=10}=0$，得

$$\frac{2Gm}{x}-\frac{2Gm}{10}=\frac{1}{2}\dot{x}^2$$

得

$$2\sqrt{Gm}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{10}}}$$

两边积分（x从$x=10$到$x=0$，t从$t=0$到$t=t_0$），得

$$2\sqrt{Gm}\int_0^{t_0}\mathrm{d}t=\int_{10}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{10}}}$$

对右边的积分，先作代换$u=\dfrac{1}{x}$，再作代换$v=u-0.1$，得

$$2\sqrt{Gm}\int_0^{t_0}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}v}{(v+0.1)^2\sqrt{v}} \qquad ①$$

对右边的积分，作代换$y=\sqrt{v}$，得

$$右边=\int_0^{\infty}\frac{2\mathrm{d}y}{(y^2+0.1)^2}$$

再令$y^2=0.1\tan^2\theta$，

$$右边=200\sqrt{0.1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=200\sqrt{0.1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta=50\sqrt{0.1}\pi$$

代入式①得

$$t_0=\frac{25\pi}{\sqrt{10Gm}}=9.62\times10^7\mathrm{s}$$

即它们$9.62\times10^7\mathrm{s}$后相碰.

解法二　以上解法的积分过于麻烦，本题还可以这样思考.

仍利用两体运动理论，将坐标原点取在其中的一个质点上，设想运动质点开始时具有一个很小的与两质点连线垂直的速度，于是运动质点将做一个轨道很扁的椭圆运动，设该椭圆的半长轴为a，半短轴为b，有$2a\approx10$，$b\to0$. 设该椭圆运动的周期为T，由开普勒第三定律，这个周期与半径为a的圆周运动的周期相同，由圆周运动的速度

$$v=\sqrt{\frac{Gm}{a}}=\frac{2\pi a}{T}$$

得

$$T=\frac{2\pi a\sqrt{a}}{\sqrt{Gm}}$$

两质点相碰时运动质点实际上运动了半个周期，即

$$t_0=\frac{T}{2}=\frac{\pi a\sqrt{a}}{\sqrt{Gm}}=9.62\times10^7\,\mathrm{s}$$

7.3　在地面上质量为 16kg 的物体，在以 $a=g/2$（g 为地面处的重力加速度）上升的人造地球卫星里，视重（即该物体与支持物的作用力）为 9.0kg. 问这时该人造地球卫星离地面多远？

解　题设物体质量 $m=16\mathrm{kg}$，在人造地球卫星里视重 $m'g$，$m'=9.0\mathrm{kg}$. 由于人造地球卫星为非惯性系，需要引入惯性力 $F=ma$，方向向下. 于是视重可以表示为

$$m'g=m(a+g')$$

求得当地的重力加速度为

$$g'=\frac{g}{16}$$

又因为

$$g'=\frac{GMm}{r^2}，\qquad g=\frac{GMm}{R_0^2}$$

所以 $r=4R_0$，即该人造地球卫星离地面为 $3R_0$.

7.4　一密度均匀的球形天体，半径为 R，问它的质量至少为多大时，才能使它的第一宇宙速度大于光在真空中的速度？

解　第一宇宙速度 $v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$，$v>c$，所以 $M>\frac{Rc^2}{G}$，即它的质量至少要大于 $Rc^2/G=1.35\times10^{27}R(\mathrm{kg})$（$R$ 以 m 为单位）.

7.5　一密度均匀的球形天体，它的质量等于太阳质量，$M=1.98\times10^{30}\mathrm{kg}$，它的第一宇宙速度大于光在真空中的速度 $c=3\times10^8\mathrm{m/s}$，引力常数 $G=6.67\times10^{-11}\mathrm{N\cdot m^2/kg}$，问它的半径最大是多少？

解　$v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$，$v>c$，所以 $R<\frac{GM}{c^2}=1467.4\mathrm{m}$.

7.6　在一半径为 $R=2.0\times10^8\mathrm{m}$ 的无空气的星球表面，若以 $v_0=10\mathrm{m/s}$ 的速度竖直上抛一物体，则该物体上升的最大高度为 $h=8\mathrm{m}$. 试问：

（1）该星球的逃逸速度为多大？

（2）若要该星球成为黑洞，则其半径应比现有的半径小几倍？

解　（1）设星球质量为 M_1，上抛物体质量为 m，物体在星球表面的空中加速度为 a.

由

$$v_0^2=2ah \qquad ①$$

$$F=ma=\frac{GMm}{R^2} \quad ②$$

$$v_{逃}=\sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad ③$$

解方程①～方程③可得

$$v_{逃}=\sqrt{\frac{R}{h}}\cdot v_0=\sqrt{\frac{2.0\times10^8}{8}}\times10=5\times10^4(\mathrm{m/s})$$

（2）设该星球成黑洞时半径为现在的$1/k$，得

$$v'_{逃}=\sqrt{\frac{2kGM}{R}}=c$$

得$k=\frac{c^2}{v_{逃}^2}=3.6\times10^7$，即其半径比现有半径小$3.6\times10^7$倍.

7.7　在目前的天文观测范围内，物质的平均密度为$10^{-30}\mathrm{g/cm^3}$. 如果认为我们的宇宙是这样一个均匀大球体，其密度使得它的逃逸速度大于光在真空中的速度c，因此任何物质都不能脱离宇宙，问宇宙的半径至少有多大？

解　设宇宙半径为R.

令$v_{逃}=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{\frac{8G\pi R^2\rho}{3}}\geqslant c$，得

$$R\geqslant c\cdot\sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho}}$$

代入数据，即得

$$R\geqslant4.01\times10^{26}\mathrm{m}=4.23\times10^{10}\mathrm{l.y.}$$

7.8　设某行星绕中心天体在圆轨道上运行，公转周期为T. 用开普勒第三定律证明：一个物体从此轨道由静止落至中心天体所需的时间为$t=\sqrt{2}T/8$.

证明　设该行星的圆轨道半径为R. 开始时一个物体从此轨道由静止落至中心天体，设该物体具有一个很小的与中心天体连线垂直的速度，于是该物体将做一个轨道很扁的椭圆运动，设这个椭圆的半长轴为a，半短轴为b，有$2a\approx R$，$b\to0$. 设该物体椭圆运动的周期为T'，由开普勒第三定律

$$\frac{T^2}{T'^2}=\frac{R^3}{a^3}$$

于是

$$T'=\frac{a^{3/2}}{R^{3/2}}T=\frac{T}{2^{3/2}}=\frac{T}{\sqrt{8}}$$

这个物体从此轨道由静止落至中心天体所需的时间为半个周期：

$$t = \frac{T'}{2} = \frac{\sqrt{2}T}{8}$$

得证.

7.9　设一彗星在一抛物线轨道上运行，这抛物线与地球轨道相交，两个交点在地球轨道（设为圆形）直径的两端.

（1）设地球公转半径为 R_0，地球公转速率为 v_0，写出此彗星轨道方程，并证明这彗星的最大速率为 $2v_0$；

（2）用开普勒第二定律证明彗星在地球轨道内的时间为 $2/(3\pi)$ 年.

解　（1）由于彗星是在抛物线轨道上运行，$\varepsilon = 1$，设轨道方程为

$$\rho = \frac{k}{1+\cos\theta}$$

题设：$\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ 时，$\rho = R_0$. 所以 $k = R_0$，则轨道方程为

$$\rho = \frac{R_0}{1+\cos\theta} \tag{①}$$

由比内公式的求解知

$$R_0 = \frac{h^2}{GM} \tag{②}$$

其中，$h = |\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|$ 是彗星对太阳掠面速度的 2 倍. 由式②知该彗星与地球有相同的掠面速度：$h = R_0 v_0$.

$\theta = 0$ 时彗星到近日点：

$$\rho = \rho_{\min} = \frac{R_0}{2}$$

易知彗星最大速率在近日点处：

$$h = v_{\max}\rho_{\min} = R_0 v_0$$

得

$$v_{\max} = \frac{R_0 v_0}{\rho_{\min}} = 2v_0$$

（2）证明：

将轨道方程①写成直角坐标形式：

$$x = ay^2 + b \tag{③}$$

$y = 0$ 时彗星到近日点：

$$x=\rho_{\min}=\frac{R_0}{2}$$

$x=0$ 时彗星到地球轨道：

$$y=\pm R_0$$

代入方程③得

$$a=-\frac{1}{2R_0},\qquad b=\rho_{\min}=\frac{R_0}{2}$$

于是轨道方程为

$$x=-\frac{y^2}{2R_0}+\frac{R_0}{2}$$

由于彗星与地球有相同的掠面速度，利用开普勒第二定律（面积定律），彗星在地球轨道内对应的面积为

$$S=\int_{-R_0}^{R_0}x\mathrm{d}y=\int_{-R_0}^{R_0}\left(-\frac{y^2}{2R_0}+\frac{R_0}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{2}{3}R_0^2$$

而地球运动 1 年对应面积为 πR_0^2，所以彗星在地球轨道时间为$1年\times\dfrac{(2/3)R_0^2}{\pi R_0^2}=\dfrac{2}{3\pi}年$.

得证.

7.10　一宇宙飞船环绕一行星做匀速圆周运动，轨道半径为 R_0，飞船速率为 v_0. 飞船的火箭发动机突然点火，使飞船的速率 v_0 变到 βv_0，加速度方向与速度方向相同.

（1）求用 R_0 和 β 表示的新轨道方程. 证明：当 $\beta<\sqrt{2}$ 时，轨道为椭圆，总能量为负；当 $\beta>\sqrt{2}$ 时，轨道为双曲线，总能量为正.

（2）在双曲线情形下，设 α 为火箭发动机点火时飞船速度方向与飞船逃逸时速度方向（逃逸时速度方向为飞船离行星无穷远时的速度方向）之间的夹角，求 α 与 β 的关系. 画出 $\beta=\sqrt{3}$ 时的草图.

解　（1）加速前，$\dfrac{GMm}{R_0^2}=\dfrac{mv_0^2}{R_0}$，得

$$GM=v_0^2R_0 \qquad ①$$

加速后，速度矩

$$h=\beta v_0R_0 \qquad ②$$

比内公式

$$r=\frac{h^2/(GM)}{1+\varepsilon\cos\theta} \qquad ③$$

题设 $\theta=0, r=R_0$，由式①～式③得

$$\frac{\beta^2 v_0^2 R_0^2}{v_0^2 R_0(1+\varepsilon)}=R_0$$

解得

$$\varepsilon=\beta^2-1 \tag{④}$$

故轨道方程为

$$r=\frac{h^2/(GM)}{1+\varepsilon\cos\theta}=\frac{\beta^2 R_0}{1+(\beta^2-1)\cos\theta}$$

由式③和式④知 $0<\varepsilon<1$ 时，轨道为椭圆，得

当 $\beta<\sqrt{2}$ 时，轨道为椭圆：

$$E=\frac{1}{2}m\beta^2 v_0^2-\frac{GMm}{R_0}=\frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2-2)<0$$

当 $\beta>\sqrt{2}$ 时，轨道为双曲线：

$$E=\frac{1}{2}m\beta^2 v_0^2-\frac{GMm}{R_0}=\frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2-2)>0$$

（2）设飞船离行星无穷远时，飞船与极轴夹角为 θ. 由式③知

$$1+(\beta^2-1)\cos\theta=0$$

又 $\alpha=\theta-\dfrac{\pi}{2}$，所以

$$\sin\alpha=\frac{1}{\beta^2-1}$$

当 $\beta=\sqrt{3}$时，$\alpha=\arcsin\dfrac{1}{2}=30^\circ$，飞船飞行草图如图 7.10a 所示.

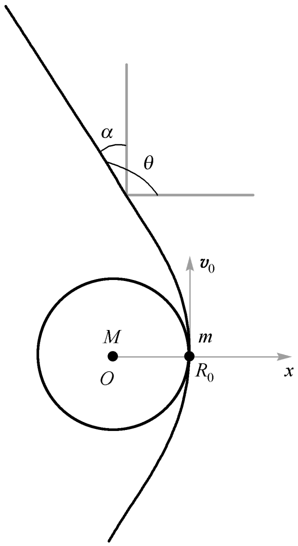


图 7.10a

7.11* 质量为 m 的质点在质量为 M 的质点（视为固定）的引力场中以 M 为中心做半径为 r_0 的圆周运动. 若给 m 以沿径向的冲量 J，并设 J 与质点的原动量之比为一小量，求 m 在以后运动过程中矢径的最大值 r_2 与最小值 r_1，并证明在忽略二级以上小量的情况下，$r_2-r_0\approx r_0-r_1$，即质点 m 的运动轨道近似为一偏心的圆.

解　开始，m 做半径为 r_0 的圆周运动，有 $\dfrac{GMm}{r_0^2}=\dfrac{mv_0^2}{r_0}$，即

$$GMm=mr_0v_0^2 \tag{①}$$

m 得到沿径向的冲量 J 后，总能量

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{J^2}{2m}-\frac{GMm}{r_0}=-\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{J^2}{2m} \quad ②$$

由于冲量 J 沿径向，m 的速度矩没有增加，故矢径 r 取极值时，径向速度为 0，切向速度 $v=\frac{v_0r_0}{r}$，能量为

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=\frac{1}{2}m\frac{v_0^2r_0^2}{r^2}-\frac{mr_0v_0^2}{r} \quad ③$$

方程③解得

$$r=-\frac{mv_0^2r_0}{E}\pm\frac{mv_0^2r_0}{2E}\sqrt{1+\frac{2E}{mv_0^2}} \quad ④$$

将方程②代入方程④得

$$r=\frac{mv_0^2r_0}{mv_0^2-J^2/m}\left(1\pm\frac{J}{mv_0}\right)\approx r_0\left(1+\frac{J^2}{m^2v_0^2}\right)\left(1\pm\frac{J}{mv_0}\right)$$

保留至一阶小量得

$$r_1\approx r_0\left(1-\frac{J}{mv_0}\right)=r_0\left(1-\sqrt{\frac{J^2r_0}{GMm^2}}\right),\qquad r_2\approx r_0\left(1+\frac{J}{mv_0}\right)=r_0\left(1+\sqrt{\frac{J^2r_0}{GMm^2}}\right)$$

于是有

$$r_2-r_0\approx r_0-r_1$$

第 8 章　刚 体 力 学

8.1　力 $\boldsymbol{F}=30\boldsymbol{i}+40\boldsymbol{j}\,\mathrm{N}$，作用在 $\boldsymbol{r}=8\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}\,\mathrm{m}$ 处的一点上．试求：

（1）力 $\boldsymbol{F}$ 绕原点的力矩 $\boldsymbol{L}$；

（2）力臂 d；

（3）力 $\boldsymbol{F}$ 垂直于 $\boldsymbol{r}$ 的分量 $F_{\perp}$．

解　（1）

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 8 & 6 & 0\\ 30 & 40 & 0\end{vmatrix}=140\boldsymbol{k}\ (\mathrm{N\cdot m})$$

（2）$|\boldsymbol{L}|=|\boldsymbol{F}|\cdot d$，所以 $d=\dfrac{140}{\sqrt{30^2+40^2}}=2.8(\mathrm{m})$．

（3）$|\boldsymbol{L}|=F_{\perp}\cdot r$，所以 $F_{\perp}=\dfrac{L}{r}=\dfrac{140}{\sqrt{8^2+6^2}}=14(\mathrm{N})$．

8.2　证明：刚体绕定轴转动时，在垂直于轴的平面上任意两点 A 和 B，它们的速度 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ 在 AB 连接线上的分量相等．并说明这结果的物理意义．

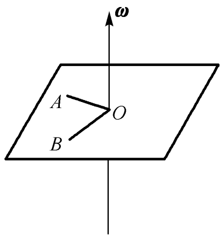


图 8.2a

证明　如图 8.2a 所示．

$$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_A，\qquad \boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_B$$

$\boldsymbol{v}_A$ 在 AB 上的分量：

$$\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{r}_{AB}=(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_A)\cdot\boldsymbol{r}_{AB}=(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_A)\cdot\frac{\boldsymbol{r}_{AB}}{|r_{AB}|}=\frac{(\boldsymbol{r}_A\times\boldsymbol{r}_{AB})\cdot\boldsymbol{\omega}}{|r_{AB}|}$$

$\boldsymbol{v}_B$ 在 AB 上的分量：

$$\boldsymbol{v}_B\cdot\boldsymbol{r}_{AB}=(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_B)\cdot\boldsymbol{r}_{AB}=(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_B)\cdot\frac{\boldsymbol{r}_{AB}}{|r_{AB}|}=\frac{(\boldsymbol{r}_B\times\boldsymbol{r}_{AB})\cdot\boldsymbol{\omega}}{|r_{AB}|}$$

$$\boldsymbol{v}_A\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{AB}-\boldsymbol{v}_B\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{AB}=\frac{\boldsymbol{\omega}}{|r_{AB}|}\cdot(\boldsymbol{r}_A\times\boldsymbol{r}_{AB}-\boldsymbol{r}_B\times\boldsymbol{r}_{AB})=\frac{\boldsymbol{\omega}}{|r_{AB}|}\cdot(\boldsymbol{r}_A-\boldsymbol{r}_B)\times\boldsymbol{r}_{AB}=\frac{\boldsymbol{\omega}}{|r_{AB}|}\cdot(\boldsymbol{r}_{AB}\times\boldsymbol{r}_{AB})=0$$

即

$$(\boldsymbol{v}_A-\boldsymbol{v}_B)\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{AB}=0 \qquad ①$$

证毕．

该结果的物理意义：

由于 $\boldsymbol{v}_A=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t}$，$\boldsymbol{v}_B=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_B}{\mathrm{d}t}$，式①即

$$(v_A - v_B)\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{AB} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_B}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\boldsymbol{r}_{AB}}{|r_{AB}|} = \frac{\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B}{|r_{AB}|}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B) = \frac{1}{|r_{AB}|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B)^2 = 0$$

于是

$$(\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B)^2 = \text{常数}$$

这说明，刚体任意两点间的距离不会改变.

8.3　证明：刚体绕定轴转动时，在垂直于轴的平面上，任意两点 A 、B 的速度 $\boldsymbol{v}_A$ 、$\boldsymbol{v}_B$ 与加速度 $\boldsymbol{a}_A$ 、$\boldsymbol{a}_B$ 之间有下列关系：$\boldsymbol{v}_A$ 与 $\boldsymbol{a}_A$ 之间的夹角等于 $\boldsymbol{v}_B$ 与 $\boldsymbol{a}_B$ 之间的夹角.

证明　题设刚体绕定轴转动，设定轴为 z 轴，角速度 $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\hat{\boldsymbol{z}}$ ，角加速度 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\beta} = \beta\hat{\boldsymbol{z}}$.

参见上题图 8.2a，有

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_A\,,\qquad \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_B \tag{①}$$

可知

$$\boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{v}_A\,,\qquad \boldsymbol{v}_A\perp\boldsymbol{r}_A\,,\qquad \boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{v}_B\,,\qquad \boldsymbol{v}_B\perp\boldsymbol{r}_B$$

题设

$$\boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{r}_A\,,\qquad \boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{r}_B$$

对式①微商可得

$$\boldsymbol{a}_A = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_A = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_A) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}_A - \omega^2\boldsymbol{r}_A \tag{②}$$

即

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_{At} + \boldsymbol{a}_{An}$$

其中

$$\text{切向加速度：}\ \boldsymbol{a}_{At} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}_A\,,\qquad a_{At} = |\boldsymbol{a}_{At}| = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\cdot r_A$$

$$\text{法向加速度：}\ \boldsymbol{a}_{An} = -\omega^2\boldsymbol{r}_A\,,\qquad a_{An} = |\boldsymbol{a}_{An}| = \omega^2 r_A$$

设 $\boldsymbol{v}_A$ 与 $\boldsymbol{a}_A$ 之间的夹角为 θ_A，有

$$\tan\theta_A = \frac{a_{An}}{a_{At}} = \frac{\omega^2 r_A}{\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}r_A} = \frac{\omega^2}{\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}}$$

同理可求得 $\boldsymbol{v}_B$ 与 $\boldsymbol{a}_B$ 之间的夹角 θ_B，有

$$\tan\theta_B = \frac{a_{Bn}}{a_{Bt}} = \frac{\omega^2 r_B}{\dfrac{d\omega}{dt} r_B} = \frac{\omega^2}{\dfrac{d\omega}{dt}}$$

$\theta_A = \theta_B$，即 $\boldsymbol{v}_A$ 与 $\boldsymbol{a}_A$ 之间的夹角等于 $\boldsymbol{v}_B$ 与 $\boldsymbol{a}_B$ 之间的夹角. 证毕.

8.4　下列均匀刚体的质量都是 m，分别求它们对给定轴的转动惯量：

（1）横截面为矩形的圆环，外径为 R_1、内径为 R_2，对几何轴；

（2）球壳，内外半径分别为 R_1 和 R_2，对过中心的轴；

（3）矩形薄板，长为 a、宽为 b，对垂直于板面且过中心的轴；

（4）矩形薄板，长为 a、宽为 b，对过中心且平行于一边 a 的轴；

（5）长方体，长为 a、宽为 b、高为 c，对过中心且平行于 c 边的轴；

（6）细棒，对过中心且垂直于棒的轴，棒长 l；

（7）细棒，对过一端且垂直于棒的轴，棒长 l；

（8）细棒，对过一端且与棒成 α 角的轴，棒长 l.

解　（1）设给定轴为 z 轴. 考虑半径在 $r \to r + dr$ 范围的圆环.

质量微元：$dm = \dfrac{m}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} 2\pi r dr$

转动惯量微元：$dI = r^2 dm$

转动惯量：$I = \displaystyle\int_{R_2}^{R_1} r^2 dm = \frac{m}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4}(R_1^4 - R_2^4) = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)$

（2）设给定轴为 z 轴. 考虑半径在 $r \to r + dr$ 范围的球壳.

$$\rho = \frac{m}{\dfrac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)}$$

质量微元：$dm = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$

转动惯量微元：$dI = \dfrac{2}{3} r^2 dm = \dfrac{2mr^4}{R_2^3 - R_1^3} dr$　　①

【式①是书上图 8.9 给出的结果，可以证明如下：设考虑半径为 r 的球壳质量为 M，则转动惯量为

$$I = \frac{2}{3} r^2 M$$

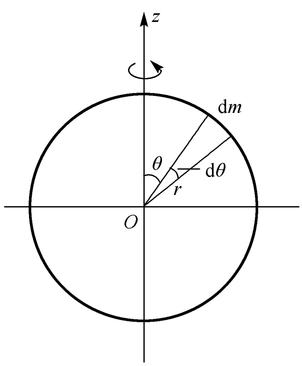


图 8.4a

该结果可以用一维积分算出，具体过程如下（参见图 8.4a）.

考虑垂直于 z 轴的平面所截得的圆环.

密度：$\rho = \dfrac{M}{4\pi r^2}$

$$dm = \rho \cdot 2\pi r \sin\theta \cdot r d\theta = \frac{M\sin\theta}{2} d\theta$$

转动惯量微元：$dI = r^2 \sin^2\theta dm = \frac{Mr^2}{2}\sin^3\theta d\theta$

于是

$$I = \int_0^{\pi} \frac{Mr^2}{2}\sin^3\theta d\theta = \frac{Mr^2}{2}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta$$

$$= -\frac{Mr^2}{2}\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\cos\theta = \frac{Mr^2}{2}\int_0^{\pi}(\cos^2\theta - 1) d\cos\theta = \frac{2}{3}Mr^2$$

证毕.】

由式①得

$$I = \frac{2m}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^4 dr = \frac{2m(R_2^5 - R_1^5)}{5(R_2^3 - R_1^3)}$$

（3）可将板分割成许多小条（参见图 8.4b），即切为杆，杆长 b，质量为

$$dm = m \cdot \frac{dx}{a}$$

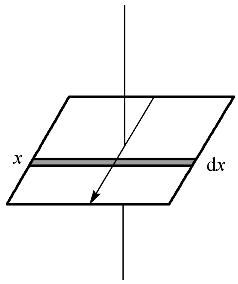


图 8.4b

利用平行轴定理，杆元的转动惯量为

$$dI = \frac{1}{12} dm \cdot b^2 + dm \cdot x^2$$

即

$$dI = \frac{1}{12} \cdot \frac{m dx}{a} \cdot b^2 + \frac{m dx}{a} \cdot x^2$$

所以

$$I = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{1}{12} \cdot \frac{m dx}{a} \cdot b^2 + \frac{m}{a} x^2 dx \right)$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{mb^2}{a} \cdot a + \frac{2m}{a} \cdot \frac{(a/2)^3}{3} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

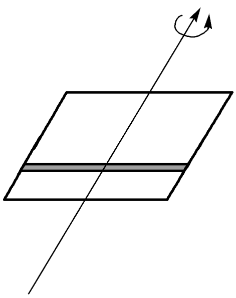


图 8.4c

（4）将板分为许多小板（参见图 8.4c），宽 dx，杆元质量 $dm = \frac{m}{a} dx$，杆元转动惯量 $dI = \frac{1}{12} dm \cdot b^2$，所以

$$I = \int_0^a \frac{1}{12} \cdot \frac{m}{a} dx \cdot b^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{m}{a} b^2 \cdot a = \frac{1}{12} mb^2$$

（5）将长方形分为许多薄板，厚 $\mathrm{d}z$，板元质量 $\frac{m}{c}\mathrm{d}z$.

利用（3）的结论：

$$\mathrm{d}I = \frac{1}{12}\mathrm{d}m\cdot(a^2+b^2)$$

所以

$$I = \int_0^c \cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{m}{c}\mathrm{d}z\cdot(a^2+b^2) = \frac{1}{12}m(a^2+b^2)$$

（6）
$$I = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \cdot r^2\cdot\frac{m}{l}\cdot\mathrm{d}r = \frac{m}{l}\cdot\frac{r^3}{3}\bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{12}ml^2$$

（7）利用平行轴定理：

$$I_D = \frac{1}{12}ml^2 + m\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

（8）
$$I = \int_0^l (r\sin\alpha)^2\cdot\frac{m}{l}\mathrm{d}r = \frac{1}{3}ml^2\sin^2\alpha$$

8.5　三根均匀的细杆长都是 l，质量都是 m，组成一个等边三角框. 分别求它对下列几个轴的转动惯量：

（1）过顶点 A 且与框面垂直的轴；

（2）过一边中点 D 且与框面垂直的轴；

（3）以一边为轴；

（4）以三角形的中垂线 AD 为轴.

解　（1）如图 8.5a 所示，该三角形的质心为三条中垂线的交点 O，AO 长度为 $\frac{\sqrt{3}}{3}l$，OD 长度为 $\frac{\sqrt{3}}{6}l$，BC 对过 D 且与框面垂直的轴的转动惯量为

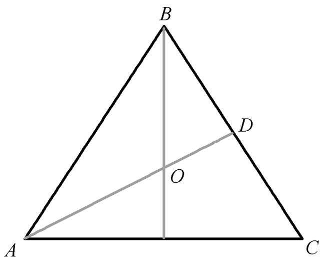


图 8.5a

$$I_{BC} = \frac{1}{12}ml^2$$

利用平行轴定理，BC 对过 O 且与框面垂直的轴的转动惯量为

$$I'_{BC} = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{\sqrt{3}}{6}l\right)^2 = \frac{1}{6}ml^2$$

该三角形对过质心 O 且与框面垂直的轴的转动惯量为

$$I_O = 3I'_{BC} = \frac{1}{2}ml^2 \qquad ①$$

利用平行轴定理，该三角形对过顶点 A 且与框面垂直的轴的转动惯量为

$$I_A = I_O + 3m\left(\frac{\sqrt{3}}{3}l\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2 + ml^2 = \frac{3}{2}ml^2$$

（2）利用平行轴定理，由式①知，该三角形对过一边中点 D 且与框面垂直的轴的转动惯量为

$$I_D = I_O + 3m\left(\frac{\sqrt{3}}{6}l\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{3}{4}ml^2$$

（3）设轴为 AC，则杆 AC 的转动惯量为零.

AB、BC 与 AC 的夹角都是 $\alpha = \pi/3$，因而 AB、BC 对轴 AC 的转动惯量相等. 利用上题（8）的结果知

$$I = I_{AB} + I_{BC} = 2\times\frac{1}{3}ml^2\sin^2\alpha = 2\times\frac{1}{3}ml^2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2$$

（4）以三角形的中垂线 AD 为轴，AB、AC 的转动惯量相等，各为

$$\frac{1}{3}ml^2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}ml^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2$$

BC 的转动惯量为 $\frac{1}{12}ml^2$，总转动惯量为

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{4}ml^2$$

8.6　一块边长为 a 和 b 的均匀矩形薄板，质量为 m.

（1）中间挖去半径为 r 的圆形；

（2）一角上挖去边长为 c 的正方形.

分别求它们对于过中心且垂直于板的轴的转动惯量.

解　（1）利用习题 8.4（3）的结论，未去圆的薄板

$$I_1 = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$

圆形质量 $m' = \frac{m}{ab}\cdot\pi r^2$，而圆形转动惯量为

$$I_2 = \frac{1}{2}m'r^2 = \frac{1}{2}\frac{m\pi r^4}{ab}$$

所以

$$I=I_1-I_2=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)-\frac{1}{2}\frac{m\pi r^4}{ab}=\frac{1}{12}m\left(a^2+b^2-\frac{6\pi r^4}{ab}\right)$$

（2）设原矩形薄板的中心为O，正方形的中心为O'，有

$$|OO'|^2=\left(\frac{a}{2}-\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-\frac{c}{2}\right)^2$$

正方形绕自身几何中心转动时，转动惯量为

$$I_1=\frac{1}{12}m'(c^2+c^2)=\frac{1}{6}m'c^2\,,\qquad m'=\frac{m}{ab}\cdot c^2$$

由平行轴定理得

$$I_2=I_1+m'\cdot|OO'|^2=\frac{1}{6}m'c^2+m'\left(\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}ac+\frac{b^2}{4}-\frac{1}{2}bc+\frac{c^2}{2}\right)$$
$$=\frac{mc^2}{12ab}(3a^2-6ac+3b^2-6bc+8c^2)$$

所以

$$I=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)-\frac{mc^2}{12ab}(3a^2-6ac+3b^2-6bc+8c^2)$$
$$=\frac{m}{12ab}(a^3b+ab^3-3a^2c^2+6ac^3-3b^2c^2+6bc^3-8c^4)$$

8.7　两个小球看作质点，质量分别为$m_1=40\text{g}$和$m_2=120\text{g}$，固定在质量可以忽略的一根细直棒两端，已知棒长$l=20\text{cm}$．试问：对通过棒上一点并且垂直于棒的轴来说，轴在什么地方时这系统的转动惯量最小？

解　设距m_2为r处转动惯量最小，有

$$I=m_2r^2+m_1(l-r)^2\,,\qquad \mathrm{d}I/\mathrm{d}r=2m_2r-2m_1(l-r)$$

令$\mathrm{d}I/\mathrm{d}t=0$，得

$$r=m_1l/(m_1+m_2)=5\text{cm}$$

即距m_2 5cm处转动惯量最小.

8.8　证明正方形均匀薄板对下述两轴的转动惯量相等：

（1）对角线；

（2）通过中心且与一边平行.

证明一：（1）设对角线为x轴，如图8.8a所示.只要算出四分之一的转动惯量即可.

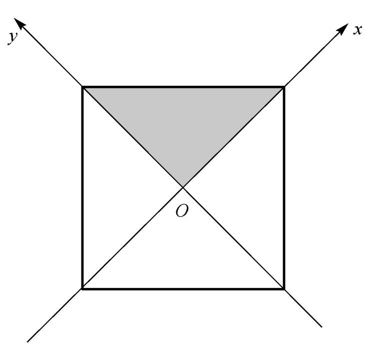


图 8.8a

$$x_{\max}=\frac{a}{\sqrt{2}},\quad \rho=\frac{m}{a^2},\quad \mathrm{d}m=\rho\cdot y\mathrm{d}x,\quad x+y=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

转动惯量为

$$I=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\frac{1}{3}y^2\rho\cdot y\mathrm{d}x=\frac{m}{3a^2}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-x\right)^3\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{48}ma^2$$

所以

$$I_{\text{总}}=4\times I_0=\frac{1}{12}ma^2$$

（2）利用习题 8.4（4）结论令 $a=b$，则立刻得到 $I=\dfrac{1}{12}ma^2$，易见与（1）结果相同.

证明二：利用正交轴定理求通过正方形中心且垂直于薄板的轴的转动惯量立即得到该结果.

8.9　一根长为 $2l$、质量为 $2M$ 的均匀细杆，可以绕过中点的固定轴在水平面内自由转动，在离中心 $l/3$ 处各套有两个质量均为 m 的小珠子. 开始时杆的转动角速度为 ω_0，而两小珠相对杆静止. 当释放小珠后，小珠将沿杆无摩擦地向两端滑动，试问：

（1）当小珠滑至杆端时，杆的角速度为多大？

（2）当小珠滑至杆端时，小珠相对杆的速度为多大？

（3）当小珠滑离杆时，小珠的速度为多大？

解　（1）由角动量守恒得

$$I_M\omega_0+2\cdot m\cdot\left(\frac{1}{3}l\right)^2\cdot\omega_0=I_M\omega+2\cdot ml^2\omega，\qquad I_M=\frac{2}{3}Ml^2$$
$$\Rightarrow\omega=\frac{3M+m}{3M+9m}\cdot\omega_0$$

（2）设小珠相对杆速度为 v'，由题意据动能守恒得

$$\frac{1}{2}I_M\omega_0^2+2\cdot\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}\omega_0 l\right)^2=\frac{1}{2}I_M\omega^2+2\cdot\frac{1}{2}m(l\omega)^2+2\cdot\frac{1}{2}mv'^2$$
$$\Rightarrow v'=\frac{l\omega_0}{3}\sqrt{\frac{8(3M+m)}{3(M+3m)}}$$

（3）设小珠的速度为 v，则

$$v=\sqrt{v'^2+(l\omega)^2}=\frac{l\omega_0}{3(3M+9m)}\sqrt{153M^2+294mM+81m^2}$$

$$=\frac{l\omega_0}{9(M+3m)}\sqrt{3(3M+m)(17M+27m)}$$

8.10　一质量分布均匀的盘状飞轮重 50kg，半径为 1.0m，转速为 300r/min，在一恒定的阻力矩 L 作用下，50s 后停止. 问 L 等于多少？

解　$\omega=\dfrac{300\times 2\pi}{60}=10\pi/\mathrm{s}$，　$I=\dfrac{1}{2}mR^2=25\mathrm{kg\cdot m^2}$，　$I\beta=L$

即 $I\omega=Lt$，所以

$$L=\frac{I\omega}{t}=\frac{25\times 10\pi}{50}=5\pi=15.7(\mathrm{N\cdot m})$$

8.11　一门宽 80cm、重 5.0kg，在距门轴 70cm 处以 1.0kg 的力推门，力的方向与门垂直，求门的角加速度.（不计阻力.）

解

$$I=\int_0^l r^2\cdot\frac{m}{l}\mathrm{d}r=\frac{l^3}{3}\cdot\frac{m}{l}=\frac{ml^2}{3}=\frac{5\times 0.8^2}{3}=\frac{3.2}{3}$$

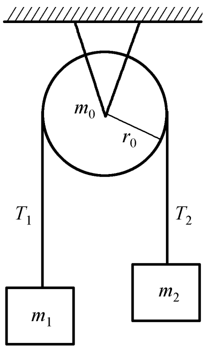
$$I\cdot\beta=F\cdot d，\quad \beta=\frac{Fd}{I}=\frac{1\times 9.8\times 0.7}{3.2/3}\approx 6.4\mathrm{s^{-2}}$$

8.12　如图所示，一条细绳的两端分别拴有质量为 m_1 和 m_2 的两物体，$m_1\neq m_2$，绳子套在质量为 m_0、半径为 r_0 的均匀圆盘形滑轮上，设绳子不在滑轮上滑动，绳子长度不变，绳子的质量以及滑轮与轴间的摩擦力均可不计. 求 m_1 和 m_2 的加速度 a 以及绳子的张力 T_1 和 T_2.

解　如图 8.12a 所示，设 m_2 的加速度向上，

对 m_1 而言：$m_1g-T_1=m_1a$　①

对 m_2 而言：$T_2-m_2g=m_2a$　②



题 8.12 图

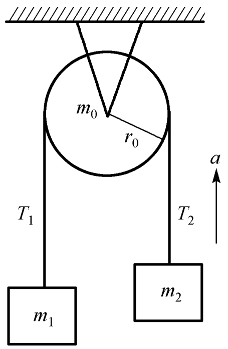


图 8.12a

对 m_0 而言：$(T_1-T_2)R=\frac{1}{2}m_0R^2\cdot\beta$　　③

又有

$$\beta\cdot R=a \qquad ④$$

故式①、式②和式④代入式③，可得

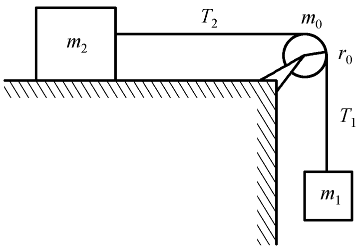
$$a=\frac{2(m_1-m_2)}{m_0+2(m_1+m_2)}g$$

从而得

$$T_1=m_1g-m_1a=\frac{m_1(m_0+4m_2)}{m_0+2(m_1+m_2)}g$$

$$T_2=m_2g+m_2a=\frac{m_2(m_0+4m_1)}{m_0+2(m_1+m_2)}g$$

8.13　如图所示，两个物体 m_1 和 m_2 用细绳相连，绳子套在质量为 m_0、半径为 r_0 的圆滑轮上，滑轮质量集中在边上，m_2 放在水平的光滑桌面上，m_1 吊着，已知 $m_1=100\text{g}$，$m_2=200\text{g}$，$m_3=50\text{g}$，$r_0=5.0\text{cm}$，设绳子长度不变，绳子的质量及滑轮轴上的摩擦力均可不计，绳子与滑轮之间无滑动. 求 m_1 的加速度 a 以及绳子的张力 T_1 和 T_2.



题 8.13 图

解　滑轮的质量集中在边上，相当于一个圆环，其转动惯量 $I=m_0r_0^2$，β 为角加速度.

$$\begin{cases}T_1r_0-T_2r_0=m_0r_0^2\beta\\ a=\beta\, r_0\\ m_1g-T_1=m_1a\\ T_2=m_2a\end{cases}$$

解得

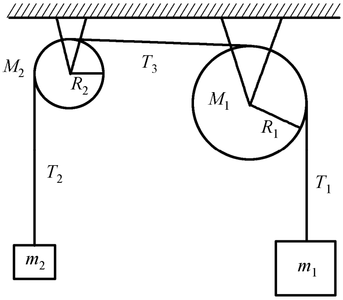
$$a=\frac{m_1g}{m_0+m_1+m_2}=\frac{0.1\times9.8}{0.05+0.1+0.2}\approx2.8(\text{m/s}^2)$$

$$T_1=m_1(g-a)\approx0.7\text{N}，\qquad T_2=m_2a=0.56\text{N}$$

8.14　一个如图所示的装置，其中 m_1、m_2、M_1、M_2、R_1 和 R_2 都已知，且 $m_1>m_2$，滑轮都是圆盘形的. 设绳子长度不变，绳子的质量以及滑轮轴上的摩擦力均可不计，绳子与滑轮间不打滑，滑轮质量均匀分布. 求 m_2 的加速度 a 及绳子的张力 T_2、T_3.

解　圆盘质量均匀分布，所以 $I=\frac{1}{2}Mr^2$.

$$m_1g-T_1=m_1a \qquad ①$$



题 8.14 图

$$m_2 a = T_2 - m_2 g \quad ②$$

$$T_1R_1 - T_3R_1 = \frac{1}{2}M_1R_1^2\beta_1 \quad ③$$

$$T_3R_2 - T_2R_2 = \frac{1}{2}M_2R_2^2\beta_2 \quad ④$$

$$R_1\beta_1 = a \quad ⑤$$

$$R_2\beta_2 = a \quad ⑥$$

上面方程联立解得

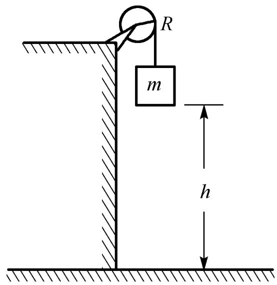
$$a = \frac{2(m_1 - m_2)g}{(M_1 + M_2) + 2(m_2 + m_1)}, \qquad T_1 = \frac{m_1(4m_2 + M_1 + M_2)}{2(m_1 + m_2) + M_1 + M_2}g$$

$$T_2 = \frac{m_2(4m_1 + M_1 + M_2)}{2(m_1 + m_2) + M_1 + M_2}g, \qquad T_3 = \frac{4m_1m_2 + m_1M_2 + m_2M_1}{2(m_1 + m_2) + M_1 + M_2}g$$

8.15　一圆盘半径为 R，装在桌子边上，可绕一水平的中心轴转动. 圆盘上绕着细线，细线的一端系一个质量为 m 的重物，m 距地面为 h，从静止开始下落到地面，需时间为 t，如图所示. 用这样一个实验装置测定圆盘的转动惯量 I，测得当 $m = m_1$ 时，$t = t_1$；$m = m_2$ 时，$t = t_2$. 证明：

$$I = \frac{(m_1 - m_2)g - 2h\left(\frac{m_1}{t_1^2} - \frac{m_2}{t_2^2}\right)}{2h\left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2}\right)}R^2$$

在实验过程中，假定摩擦力维持不变，绳子质量可忽略，绳子长度不变.



题 8.15 图

证明　设绳中的张力为 T，轮轴处摩擦力的力矩为 M.

对轮轴：

$$TR - M = I\beta \quad ①$$

对 m 有

$$mg - T = ma \quad ②$$

$$a = \beta R \quad ③$$

$$\frac{1}{2}at^2 = h \quad ④$$

上面方程联立，消去 a, β, T 得

$$M = mRg - \frac{2hmR}{t^2} - \frac{2hI}{Rt^2}$$

题设：

当 $m = m_1$ 时，$t = t_1$，有

$$M = m_1Rg - \frac{2hm_1R}{t_1^2} - \frac{2hI}{Rt_1^2} \quad ⑤$$

当 $m = m_1$ 时，$t = t_1$，有

$$M = m_2Rg - \frac{2hm_2R}{t_2^2} - \frac{2hI}{Rt_2^2} \quad ⑥$$

联立式⑤和式⑥，解得

$$I = \frac{(m_1 - m_2)g - 2h\left(\frac{m_1}{t_1^2} - \frac{m_2}{t_2^2}\right)}{2h\left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2}\right)}R^2$$

8.16　一个如图所示的装置．已知 m_1、m_2、m_3 以及均匀圆盘状滑轮的 M_1、R_1 和 M_2、R_2．略去绳的质量及轴上的摩擦力，绳子在滑轮上不打滑．求 m_1、m_2、m_3 的加速度 a_1、a_2、a_3．

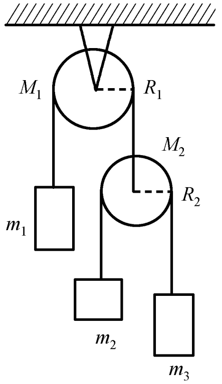
解　如图 8.16a 建立坐标系，设向下的方向为正，M_2 的加速度为 a，得

$$T_4 = T_2 + T_3 + M_2g \quad ①$$

$$m_1g - T_1 = m_1a_1 \quad ②$$

$$m_2g - T_2 = m_2a_2 \quad ③$$

$$m_3g - T_3 = m_3a_3 \quad ④$$



题 8.16 图

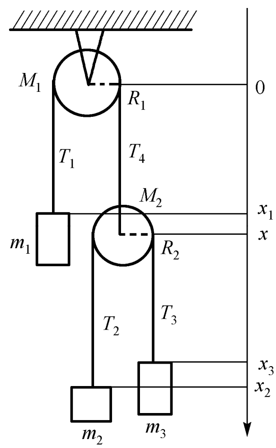


图 8.16a

角动量定理：

$$T_1R_1 - T_4R_1 = \frac{1}{2}M_1R_1^2\beta_1 \qquad ⑤$$

$$T_2R_2 - T_3R_2 = \frac{1}{2}M_2R_2^2\beta_2 \qquad ⑥$$

绳子不伸长：

$$\begin{cases} x + x_1 = l_1 \\ (x_2 - x) + (x_3 - x) = l_2 \end{cases}$$

微商两次得

$$\begin{cases} a + a_1 = 0 \\ a_2 + a_3 - 2a = 0 \end{cases}$$

即

$$a = -a_1 \qquad ⑦$$

$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0 \qquad ⑧$$

绳子在滑轮上不打滑：

$$\beta_1R_1 = a_1 \qquad ⑨$$

$$\beta_2R_2 = a_2 - a = a_2 + a_1 \qquad ⑩$$

由式①～式④得

$$\begin{aligned} T_1 &= m_1(g - a_1) \\ T_2 &= m_2(g - a_2) \\ T_3 &= m_3(g - a_3) \\ T_4 &= M_2g + (m_2 + m_3)g - m_2a_2 - m_3a_3 \end{aligned} \qquad ⑪$$

将式⑨～式⑪代入式⑤和式⑥，得

$$\left(m_1 + \frac{1}{2}M_1\right)a_1 - m_2a_2 - m_3a_3 = (m_1 - m_2 - m_3 - M_2)g \qquad ⑫$$

$$\frac{1}{2}M_2a_1 + \left(m_2 + \frac{1}{2}M_2\right)a_2 - m_3a_3 = (m_2 - m_3)g \qquad ⑬$$

由式⑧、式⑫和式⑬解得

$$a_1 = \frac{\left[(m_1m_2 + m_1m_3 - 4m_2m_3) - \dfrac{M_2}{2}(3m_2 + 3m_3 + M_2 - m_1)\right]g}{(4m_2m_3 + m_1m_2 + m_1m_3) + \dfrac{M_2}{2}(m_1 + m_2 + m_3) + \dfrac{M_1}{2}\left(m_2 + m_3 + \dfrac{M_2}{2}\right)}$$

$$a_2 = \frac{\left[(4m_2m_3 + m_1m_2 - 3m_1m_3) + \frac{M_2}{2}(m_2 + 5m_3 + M_2 - m_1) + \frac{M_1}{2}(m_2 - m_3)\right]g}{(4m_2m_3 + m_1m_2 + m_1m_3) + \frac{M_2}{2}(m_1 + m_2 + m_3) + \frac{M_1}{2}\left(m_2 + m_3 + \frac{M_2}{2}\right)}$$

$$a_3 = \frac{\left[(4m_2m_3 - 3m_1m_2 + m_1m_3) + \frac{M_2}{2}(5m_2 + m_3 + M_2 - m_1) + \frac{M_1}{2}(m_3 - m_2)\right]g}{(4m_2m_3 + m_1m_2 + m_1m_3) + \frac{M_2}{2}(m_1 + m_2 + m_3) + \frac{M_1}{2}\left(m_2 + m_3 + \frac{M_2}{2}\right)}$$

8.17　有一个均匀细棒，质量为 m，长为 l，平放在滑动摩擦系数为 μ 的水平桌面上，一端固定，在外力推动下，绕此固定端在桌面上以角速度 ω_0 转动. 今撤去外力，问从撤去外力开始到停止转动时需经过多长时间？（不考虑轴上的摩擦.）

解　如图 8.17a 所示，距原点为 x 的 $\mathrm{d}x$ 小段所受摩擦力的力矩为

$$\mathrm{d}M = x \cdot \left(\frac{m}{l}\mathrm{d}x\right) \cdot (\mu\, g) = \frac{\mu m g}{l} x \mathrm{d}x$$

总力矩为

$$M = \int \mathrm{d}M = \int_0^l \frac{\mu m g}{l} x \mathrm{d}x = \frac{\mu m g l}{2}$$

细棒绕一端点的转动惯量为

$$I = \frac{1}{3} m l^2$$

由转动定律 $M = I\beta$ 得角加速度

$$\beta = \frac{M}{I} = \frac{3\mu g}{2l}$$

这是匀减速转动.

从撤去外力开始到停止转动时需经过时间

$$t = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{2l\omega_0}{3\mu g}$$

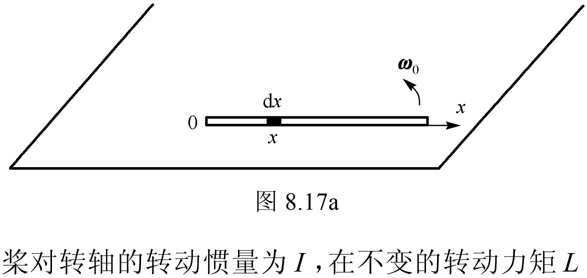


图 8.17a

8.18　一螺旋桨对转轴的转动惯量为 I，在不变的转动力矩 L 的作用下由静止开始转动，阻力矩 L' 与角速度 ω^2 成正比. 比例系数 k 是常数. 试问：

（1）经过多少时间后角速度达到一规定值 ω_1？

（2）这段时间里转过了多少圈？

解　（1）
$$L-k\omega^2=I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t},\qquad \frac{\mathrm{d}t}{I}=\frac{\mathrm{d}\omega}{L-k\omega^2}$$

所以

$$\left.\frac{t}{I}\right|_0^t=\frac{1}{2\sqrt{Lk}}\ln\left.\frac{\sqrt{\frac{L}{k}}+\omega}{\sqrt{\frac{L}{k}}-\omega}\right|_0^{\omega_1},\qquad t=\frac{I}{2\sqrt{Lk}}\ln\frac{\sqrt{\frac{L}{K}}+\omega_1}{\sqrt{\frac{L}{K}}-\omega_1}$$

（2）
$$\mathrm{d}t=\frac{I}{L-k\omega^2}\mathrm{d}\omega$$

$$\int\omega\mathrm{d}t=\int_0^{\omega_1}\frac{\omega I}{L-k\omega^2}\mathrm{d}\omega=\frac{I}{2}\int_0^{\omega_1}\frac{\mathrm{d}\omega^2}{L-k\omega^2}=-\frac{I}{2k}\ln\frac{L-k\omega_1^2}{L}=\frac{I}{2k}\ln\frac{L}{L-k\omega_1^2}$$

所转圈数

$$N=\frac{\int\omega\mathrm{d}t}{2\pi}=\frac{I}{4\pi k}\ln\frac{L}{L-k\omega_1^2}$$

8.19　一飞轮的转动惯量为 I，开始制动时的角速度为 ω_0.

（1）设阻力矩与角速度的平方成正比，比例系数为 k，求开始制动到角速度为 ω_1 的时间内的平均角速度 $\bar{\omega}$；

（2）经过多少时间角速度减少为起始的三分之一？

解　（1）
$$-k\omega^2=I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$
$$-\frac{1}{I}\mathrm{d}t=\frac{1}{k\omega^2}\mathrm{d}\omega$$
$$\int_0^t\frac{\mathrm{d}t}{I}=-\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{k\omega^2}$$

积分得

$$\frac{t}{I}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega_0}\right)\qquad ①$$

角速度与时间的关系：

$$\omega=\frac{I\omega_0}{k\omega_0t+I}$$

当 $\omega=\omega_1$ 时，所需时间为

$$t_1=\frac{I}{k}\left(\frac{1}{\omega_1}-\frac{1}{\omega_0}\right)\qquad ②$$

$$\bar{\omega}=\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\omega\mathrm{d}t=\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{I\omega_0}{k\omega_0 t+I}\mathrm{d}t=\frac{I}{kt_1}\ln\frac{k\omega_0 t_1+I}{I}$$

将式②代入得

$$\bar{\omega}=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{\omega_1}-\dfrac{1}{\omega_0}\right)}\ln\frac{\omega_0}{\omega_1}$$

（2）当 $\omega_1=\dfrac{1}{3}\omega_0$ 时，由式②得

$$t_1=\frac{I}{k}\left(\frac{3}{\omega_0}-\frac{1}{\omega_0}\right)=\frac{2I}{k\omega_0}$$

8.20　一重量均匀分布的 10kg 梯子，等分为二十级，以 60° 的倾斜度架在一面光滑的竖直墙上. 当一个体重为 60kg 的人沿梯子向上很慢地爬到第十五级时，梯子开始滑动，求此时地面给予梯子的摩擦力 f 为多大？

解　刚滑动时，梯子和人的质心的水平加速度近似为零，于是可设 $N_2=f$，以 A 为转轴，设杆长为 l.

由所受力矩为零得

$$\frac{15}{20}lmg\cos60^\circ+\frac{1}{2}lMg\cos60^\circ=N_2 l\sin60^\circ$$

题设：

$$m=60\text{kg},\quad M=10\text{kg}$$

$$\Rightarrow N_2\approx 283\text{N}\qquad\Rightarrow f=283\text{N}$$

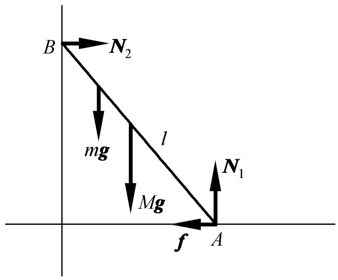
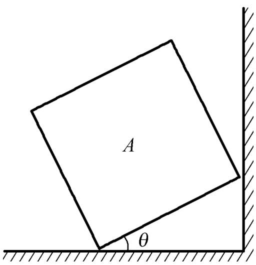


图 8.20a

8.21　一质量为 M 的均匀正立方体 A 斜靠在光滑的竖直墙上，A 与地面之间的摩擦力刚好足以阻止它滑动. 求 μ 与 θ 的关系，μ 是 A 与地面之间的静摩擦系数，θ 是 A 的一边与水平的夹角，如图所示.

解　如图 8.21a 所示，对正方体 A 作受力分析，设正方体边长为 a，根据 A 受力平衡及力矩平衡，得方程组



题 8.21 图

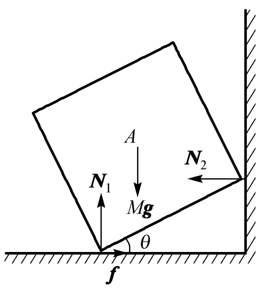


图 8.21a

$$\begin{cases} Mg = N_1 \\ N_2 = f \\ f = \mu N_1 \\ Mg \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = N_2 \cdot a \cdot \sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mu \sin\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta - \sin\theta = 2\mu \sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{1}{1+2\mu}$$

答　μ与θ的关系为$\tan\theta = \dfrac{1}{1+2\mu}$.

8.22　四个均匀的球：（1）实心钢球，半径 5.0cm；（2）实心塑料球，半径 10cm；（3）钢球壳，半径 5.0cm；（4）轻塑料球壳，半径 10cm，从同一斜面上的同一高度由静止开始滚下，设空气的影响不计，设球没有滑动，试比较它们的快慢.

解　如图 8.22a 所示，对球（壳）作受力分析，设斜面倾角为θ，质心加速度为a，对质心轴转动角加速度为β，半径为r.

由题意，得

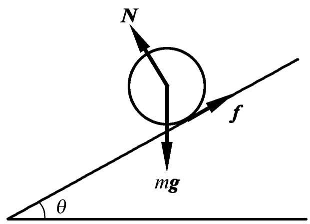


图 8.22a

$$\begin{cases} mg\sin\theta - f = ma \\ f \cdot r = I\beta \\ a = \beta r \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{mr^2}{I + mr^2} g\sin\theta$$

对于（1）、（2）有

$$a_1 = a_2 = \frac{mr^2}{\frac{2}{5}mr^2 + mr^2} g\sin\theta = \frac{5}{7} g\sin\theta$$

对于（3）、（4）有

$$a_3 = a_4 = \frac{mr^2}{\frac{2}{3}mr^2 + mr^2} g\sin\theta = \frac{3}{5} g\sin\theta$$

所以（1）、（2）较快.

8.23　一个直径为 10cm 的木质均匀实心柱体，可装在外径为 12cm 的均匀空心铜柱中，恰好贴紧无隙，两者等长. 已知铜柱的质量等于木柱的 3.5 倍，问从同一

斜面的同一高度由静止开始滚下（设没有滑动）时，（1）木柱；（2）空心铜柱；（3）两者紧套在一起；哪一个滚到底所需时间最短？

解　由习题 8.22 结论知质心加速度为

$$a=\frac{mr^2}{I+mr^2}g\sin\theta$$

设木柱质量为 m，则铜柱为 $M=3.5m$.

对于（1）木柱，有

$$I_1=\frac{1}{2}mr^2$$

所以

$$a_1=\frac{mr^2}{\frac{1}{2}mr^2+mr^2}g\sin\theta=\frac{2}{3}g\sin\theta$$

对于（2）空心铜柱，有（R, r 分别为外径和内径）

$$I_2=\frac{1}{2}M(R^2+r^2)$$

所以

$$a_2=\frac{MR^2}{\frac{1}{2}M(R^2+r^2)+MR^2}g\sin\theta=\frac{2R^2}{3R^2+r^2}g\sin\theta<a_1$$

对于（3）两者紧套在一起，有

$$I_3=\frac{1}{2}M(R^2+r^2)+\frac{1}{2}mr^2$$

所以

$$\begin{aligned}a_3&=\frac{(m+M)R^2}{\frac{1}{2}M(R^2+r^2)+\frac{1}{2}mr^2+(m+M)R^2}g\sin\theta\\&=\frac{2R^2}{\frac{M}{m+M}R^2+r^2+2R^2}g\sin\theta=\frac{2R^2}{\frac{25}{9}R^2+r^2}g\sin\theta>a_2\end{aligned}$$

$R=6\text{cm}$, $r=5\text{cm}$，得

$$a_3=\frac{72}{125}g\sin\theta<a_1$$

所以（1）木柱滚到底时间最短.

8.24　在倾角为 θ 的固定斜面上，有四个均匀物体：（1）圆柱体（轴线水平）；

（2）薄壁圆筒（轴线水平）；（3）实心球体；（4）空心球壳. 它们的半径相同，分别在斜面上的不同位置；都从静止开始下滚，设下滚时没有滑动，出发时间相同，且同时滚到底边. 求它们出发时离斜面底边的距离之比.

解　由习题 8.22 结论知质心加速度为

$$a=\frac{mr^2}{I+mr^2}g\sin\theta$$

对于（1），$I=\frac{1}{2}mr^2$，有

$$a_1=\frac{mr^2}{\frac{1}{2}mr^2+mr^2}g\sin\theta=\frac{2}{3}g\sin\theta$$

对于（2），$I=mr^2$，有

$$a_2=\frac{mr^2}{mr^2+mr^2}g\sin\theta=\frac{1}{2}g\sin\theta$$

对于（3），$I=\frac{2}{5}mr^2$，有

$$a_3=\frac{mr^2}{\frac{2}{5}mr^2+mr^2}g\sin\theta=\frac{5}{7}g\sin\theta$$

对于（4），$I=\frac{2}{3}mr^2$，有

$$a_4=\frac{mr^2}{\frac{2}{3}mr^2+mr^2}g\sin\theta=\frac{3}{5}g\sin\theta$$

因为 $s=\frac{1}{2}at^2$，所以

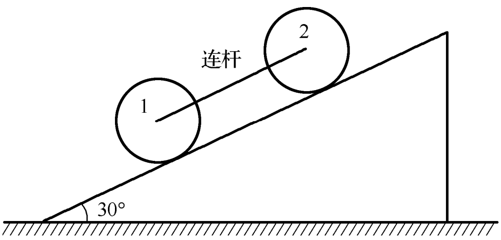
$$s_1:s_2:s_3:s_4=a_1:a_2:a_3:a_4=\frac{2}{3}:\frac{1}{2}:\frac{5}{7}:\frac{3}{5}=140:105:150:126$$

8.25　用连杆连接起来的两个滚子，从倾角为 30° 的固定的斜面上滚下，如图所示. 两个滚子的质量都是 5.0kg、半径都是 $R=5.0\text{cm}$，但转动惯量不相等，分别为 $I_1=80\text{kg}\cdot\text{cm}^2$ 和 $I_2=40\text{kg}\cdot\text{cm}^2$. 滚子的框架和连杆的质量都很小，可略去不计. 试问：

（1）滚子无滑动地从斜面上滚下来时，它们的角加速度等于多少？这时连杆受力的大小和方向如何？

（2）如果滚子 2 在前面而滚子 1 在后，结果又如何？

解　（1）设连杆上的张力为 F，隔离物体，如图 8.25a 所示.



题 8.25 图

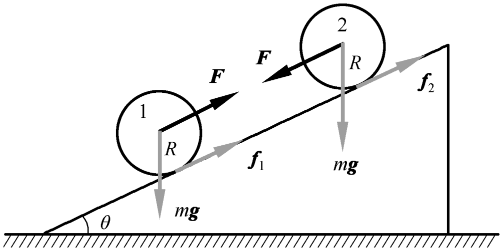


图 8.25a

列出方程：

$$mg\sin\theta - F - f_1 = ma$$
$$mg\sin\theta + F - f_2 = ma$$
$$a = R\beta$$
$$f_1 R = I_1\beta$$
$$f_2 R = I_2\beta$$

解得

$$\beta = \frac{2mg\sin\theta}{2mR + \dfrac{I_1 + I_2}{R}} = 66.2\mathrm{s}^{-2}$$

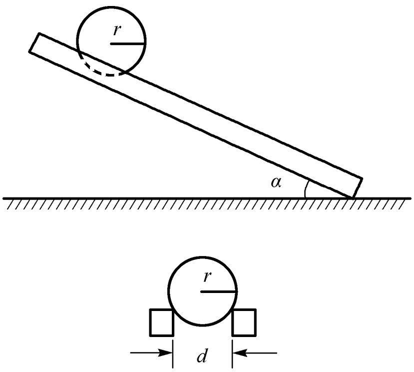
$$F = \frac{I_2 - I_1}{2R}\beta = 2.6\mathrm{N}$$

由于 $F>0$，故 F 的方向与图中所示一致，连杆受力为拉力.

（2）此时只要在上述方程中把下标互换即可，可知 β 大小不变，F 大小不变，但方向相反，连杆受力为压力.

8.26　如图所示，两直尺平行并列，其间相距 $d=2.0\mathrm{cm}$，与水平成 $\alpha=5^\circ$ 角，半径为 $r=1.5\mathrm{cm}$ 的一个均匀小球，沿尺无滑动地滚下，问球心的加速度是多少？

解　如图 8.26a 所示，由于对称性，可设每根直尺上的摩擦力都是 f.



题 8.26 图

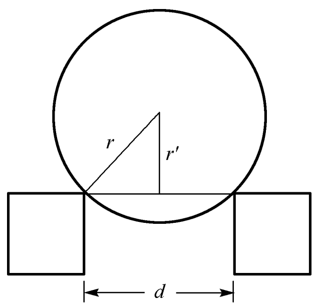


图 8.26a

沿尺方向质心运动定理：$mg\sin\alpha - 2f = ma$

转动定律：$2fr' = I\beta$

纯滚动条件：$a = r'\beta$

$$I = \frac{2}{5}mr^2$$

其中

$$r' = \sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

联立解得

$$a = \frac{g\sin\alpha}{\dfrac{2r^2}{5(r^2 - d^2/4)} + 1} = 49.7\text{cm/s}^2$$

8.27　一质量为 3.0kg 的均匀实心圆球，沿着倾角为 30° 的固定斜面无滑动地滚下，求球与斜面间的摩擦力.

解　设球的半径为 r . 对圆球作受力分析，如图 8.27a 所示.

由题意，得

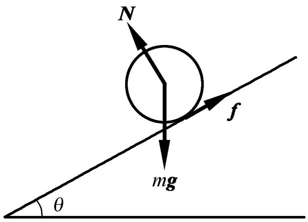


图 8.27a

$$\begin{cases} mg\sin\theta - f = ma \\ f\cdot r = I\beta \\ a = r\beta \\ I = \dfrac{2}{5}mr^2 \end{cases}$$

解得

$$f = \frac{2}{7}mg\sin\theta = 4.2\text{N}$$

即球与斜面间的摩擦力为 4.2N .

8.28　证明：要使一物体在斜面上滚动时不打滑，滑动摩擦系数 μ 必须满足

$$\mu \geqslant \frac{\tan\alpha}{\dfrac{MR^2}{I_C} + 1}$$

其中 α 是斜面倾角，I_C 是该物体绕质心的转动惯量，R 是滚动半径，M 是物体的质量.

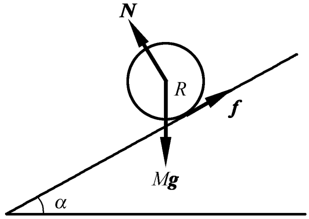


图 8.28a

证明　受力分析如图 8.28a 所示. 由题意，得

$$Mg\cos\alpha = N$$

$$Mg\sin\alpha - f = Ma$$

$$f \leqslant \mu N$$

$$a = R\beta$$

$$fR = I_C\beta$$

上述方程联立解得

$$\mu \geqslant \frac{\tan\alpha}{\frac{MR^2}{I_C}+1}$$

8.29　一个直径为 1.0cm 的均匀圆柱体在平地上滚动了 5.0s 后停止，在停止前走过了 15m，求滚动摩擦系数 k． k 定义为对接触点的滚动摩擦力矩 L 与正压力 N 之比 $k = L / N$．

解　圆柱体绕中心轴滚动，滚动力矩存在使滚动的角速度下降，还将产生静摩擦力 f，使得圆柱体减速以保持纯滚动.

设初始时刻圆柱体的速度为 v_0．

质心运动定理： $f = ma$ （水平方向）　①

$N = mg$ （垂直方向）　②

转动定律： $L - rf = I\beta$　③

纯滚动条件： $a = r\beta$　④

设 f 为常数，由式①知 a 为常数，这是匀加速运动，有

$$S = v_0 t - \frac{1}{2}at^2\,,\qquad v_0 = at \qquad ⑤$$

题设

$$k = L / N\,,\qquad r = 0.005\,,\qquad S = 15\,,\qquad t = 5\,,\qquad I = \frac{1}{2}mr^2$$

由上述方程解得

$$k = \frac{3Sr}{gt^2} = 9.2\times10^{-4}\,\mathrm{m} = 0.092\mathrm{cm}$$

8.30　一个半径为 r 的均匀小球放在一块水平的板上，平板以加速度 a 移动. 球与板之间的滑动摩擦系数为 μ，滚动摩擦系数为 k．试问：

（1）什么情况下球将随板以加速度 a 运动？

（2）什么情况下球只滚动而不滑动?

解　受力分析如图 8.30a 所示. 以木板为参考系，设球相对于板以加速度 a' 运动.

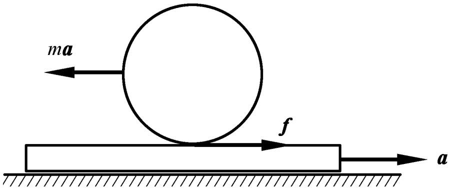


图 8.30a

考虑惯性力，有方程组：

质心运动定理：$ma-f=ma'$（水平方向）　①

$N=mg$（垂直方向）　②

纯滚动条件：$a'=r\beta$　③

f 为静摩擦力：$f\leqslant\mu N$　④

转动定律：$rf-L=I\beta$　（当 $\beta\neq0$ 时）　⑤

$rf\leqslant L$（当 $\beta=0$ 时）　⑥

（滚动摩擦力矩不会主动使物体滚动）

题设：$k=L/N$，　$I=\dfrac{2}{5}mr^2$　⑦

（1）此时，球相对于板静止，$a'=0$，$\beta=0$．

由式②、式④、式⑥和式⑦, 得 $f\leqslant\mu mg$，和 $f\leqslant\dfrac{k}{r}mg$ 联立. 一般情况下 $\dfrac{k}{r}<\mu$，故取

$$f\leqslant\frac{k}{r}mg$$

由式①得

$$a=\frac{f}{m}\leqslant\frac{kg}{r}$$

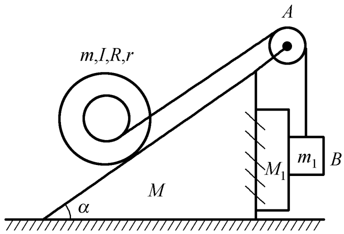
即当 $a\leqslant\dfrac{kg}{r}$ 时球将随板以加速度 a 运动.

（2）纯滚动时，$\beta\neq0$，由方程①～方程⑦解得

$$\beta=\frac{fr-kmg}{\frac{2}{5}mr^2},\qquad a=\frac{f}{m}+r\beta=\frac{7f}{2m}-\frac{5kg}{2r}\leqslant\frac{7\mu g}{2}-\frac{5kg}{2r}$$

8.31*　已知半径为 R 的车轮上附有一凸台，半径为 r，这个轮子的质量为 m，转动惯量为 I，在凸台上缠有轻绳，轻绳另一端系有一个质量为 m_1 的物体 B，如图所示. 轮子放在质量为 M 的三棱柱的斜面上，而质量为 m_1 的物体 B 绕过棱柱上的定

滑轮下垂，为了保证站在斜面上的观察者看来质量为 m_1 的物体 B 在运动过程中是垂直上升的，即物体 B 与地面的垂直距离的变化量等于从滑轮到物体 B 上方的绳子的缩短量. 在斜面右侧焊上一个质量为 M_1 的凸台，以保证物体 B 垂直上升，凸台与物体 B 间无摩擦，三棱柱与地面光滑接触，而斜面上车轮则沿其滚动而下. 斜面的仰角为 α，求三棱柱的加速度 a 和绳子的张力 T.



题 8.31 图

解 隔离物体，受力分析如图 8.31a 所示. 考虑车轮 m 的运动时将坐标系放在 M 上，这是非惯性系，需要引入惯性力. 列出方程组：

车轮的质心运动定理： $N + ma\sin\alpha = mg\cos\alpha$ ①

$$mg\sin\alpha + ma\cos\alpha - f - T = ma_c \quad ②$$

车轮作纯滚动： $a_c = R\beta$ ③

车轮的转动定理： $fR + Tr = I\beta$ ④

m_1 的运动： $T - m_1 g = m_1 a_1$ ⑤

M 的运动： $N\sin\alpha - f\cos\alpha - T\cos\alpha = (M + M_1 + m_1)a$ ⑥

题设： $a_c = a_1 + r\beta$ ⑦

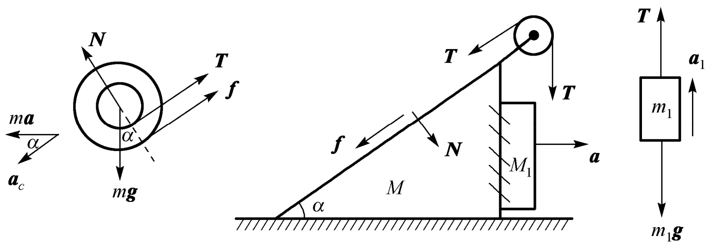


图 8.31a

下面解这组方程.

由方程⑤

$$T = m_1(a_1 + g) \quad ⑧$$

由方程③和方程⑦

$$a_c = \frac{Ra_1}{R-r}, \qquad \beta = \frac{a_1}{R-r} \quad ⑨$$

由方程④

$$f = \frac{1}{R}(I\beta - Tr) = \frac{1}{R}\left[\frac{Ia_1}{R-r} - m_1 r(a_1 + g)\right] \quad ⑩$$

由方程①

$$N = mg\cos\alpha - ma\sin\alpha \tag{11}$$

将方程⑧～方程⑪代入方程②和方程⑥得

$$Rmg\sin\alpha + Rma\cos\alpha - \frac{Ia_1}{R-r} + m_1r(a_1+g) - m_1R(a_1+g) = \frac{mR^2a_1}{R-r} \tag{12}$$

$$Rmg\sin\alpha\cos\alpha - Rma\sin^2\alpha - \frac{Ia_1}{R-r}\cos\alpha + m_1r(a_1+g)\cos\alpha - m_1R(a_1+g)\cos\alpha$$
$$= (m_1+M+M_1)Ra \tag{13}$$

⑬–⑫×$\cos\alpha$ 得

$$(m+m_1+M+M_1)a - \frac{mRa_1}{R-r}\cos\alpha = 0 \tag{14}$$

由方程⑫得

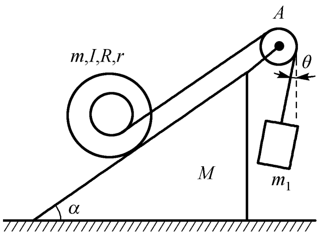
$$aRm\cos\alpha - \frac{1}{R-r}\left[m_1(R-r)^2 + I + mR^2\right]a_1 = m_1(R-r)g - Rmg\sin\alpha \tag{15}$$

由方程⑭和方程⑮可解出 a, a_1：

$$\begin{cases} a = \dfrac{mRg\cos\alpha[mR\sin\alpha - m_1(R-r)]}{(m+m_1+M+M_1)[m_1(R-r)^2+I+mR^2]-m^2R^2\cos^2\alpha} \\ a_1 = \dfrac{(m+m_1+M+M_1)(R-r)[mR\sin\alpha - m_1(R-r)]g}{(m+m_1+M+M_1)[m_1(R-r)^2+I+mR^2]-m^2R^2\cos^2\alpha} \end{cases}$$

代入方程⑧可得T，结果为

$$T = \frac{m_1g\{(m+m_1+M+M_1)[I+mR^2+mR(R-r)\sin\alpha]-m^2R^2\cos^2\alpha\}}{(m+m_1+M+M_1)[m_1(R-r)^2+I+mR^2]-m^2R^2\cos^2\alpha}$$



题 8.32 图

8.32* 参见上题，现拆去凸台M_1，所以三棱柱系统运动起来以后，物体B上的轻绳将与垂线有一夹角θ，其余的参量的物理意义和外界条件参见上题所述，求出θ所应满足的方程式. 若将θ视为已知量，求出三棱柱的加速度a.

解 隔离物体，受力分析如图 8.32a 所示. 考虑车轮m和物体m_1的运动时将坐标系放在M上，这是非惯性系，需要引入惯性力.

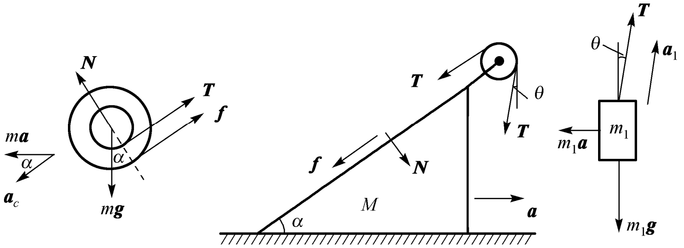


图 8.32a

模仿上题列出方程组.

车轮的质心运动定理： $N + ma\sin\alpha = mg\cos\alpha$　　①

$$mg\sin\alpha + ma\cos\alpha - f - T = ma_c \quad ②$$

车轮作纯滚动： $a_c = R\beta$　　③

车轮的转动定理： $fR + Tr = I\beta$　　④

m_1 的运动： $T\cos\theta - m_1 g = m_1 a_1 \cos\theta$　　⑤

$$T\sin\theta - m_1 a = m_1 a_1 \sin\theta \quad ⑥$$

M 的运动： $N\sin\alpha - f\cos\alpha - T\cos\alpha - T\sin\theta = Ma$　　⑦

题设： $a_c = a_1 + r\beta$　　⑧

下面解这组方程.

由方程⑤和方程⑥得

$$a = g\tan\theta \quad ⑨$$

$$T = m_1 a_1 + \frac{m_1 g}{\cos\theta} \quad ⑩$$

由方程③和方程⑧得

$$a_c = \frac{Ra_1}{R-r}, \qquad \beta = \frac{a_1}{R-r} \quad ⑪$$

由方程④和方程⑪得

$$f = \frac{1}{R}\left(I\beta - Tr\right) = \frac{1}{R}\left[\frac{Ia_1}{R-r} - m_1 r\left(a_1 + \frac{g}{\cos\theta}\right)\right] \quad ⑫$$

由方程①得

$$N = mg\cos\alpha - mg\tan\theta\sin\alpha \quad ⑬$$

由⑦−②×$\cos\alpha$ 得

$$N\sin\alpha - T\sin\theta - mg\sin\alpha\cos\alpha - mg\tan\theta\cos^2\alpha = Ma - ma_c\cos\alpha$$

将方程⑨～方程⑪和方程⑬代入解得

$$a_1 = \frac{(R-r)(m+m_1+M)g\tan\theta}{mR\cos\alpha - m_1(R-r)\sin\theta} \quad ⑭$$

将方程⑩～方程⑫和方程⑭代入方程②解得

$$mR\cos\theta\cos\alpha(\tan\theta + \tan\alpha) - m_1(R-r)$$
$$= \frac{[I + m_1(R-r)^2 + mR^2](m+m_1+M)\sin\theta}{mR\cos\alpha - m_1(R-r)\sin\theta} \quad ⑮$$

该方程⑮就是 θ 所应满足的方程式.

若将 θ 视为已知量，由方程⑨可知三棱柱的加速度为

$$a = g\tan\theta$$

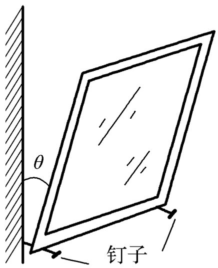
8.33*　镜框贴着墙立在有摩擦的钉子上，稍受扰动其即向下倾倒，当到达一定角度 θ，此镜框将跳离钉子，求 θ.（提示：跳离钉子时，镜框对钉子的压力为零.）

解　受力分析如图 8.33a 所示，相对于镜框的支撑点（钉子 A），用质心运动定理和角动量定理列出方程

$$(mg-N)\cos\theta - f\sin\theta = m\frac{l}{2}\dot{\theta}^2 \qquad ①$$

$$(mg-N)\sin\theta + f\cos\theta = m\frac{l}{2}\ddot{\theta} \qquad ②$$

$$mg\frac{l}{2}\sin\theta = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} \qquad ③$$



题 8.33 图

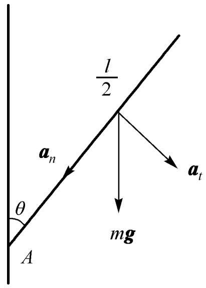


图 8.33a

下面解这组方程.

由方程③有

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l}\sin\theta \qquad ④$$

两边乘 $\mathrm{d}\theta$，利用初始条件积分得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{l}(1-\cos\theta) \qquad ⑤$$

将方程④和方程⑤代入方程①和方程②解得

$$N = \frac{mg}{4}(3\cos\theta - 1)^2 \qquad ⑥$$

$$f = \frac{3}{4}mg\sin\theta(3\cos\theta - 2) \qquad ⑦$$

由 $f = 0$，得

$$\theta = \arccos\frac{2}{3}，此时 N = \frac{mg}{4}$$

由 $N = 0$，得

$$\theta = \arccos\frac{1}{3}，此时 f = -\frac{\sqrt{2}}{2}mg$$

【分析】

方程⑥当 $N \geqslant 0$ 时正确，方程⑦当 $N \geqslant 0$ 且 $f \leqslant \mu N$ 时正确.

镜框开始倾倒时，摩擦力从零开始增加（向右），达最大值后再逐渐减少到零，此时正压力还不等于零. 然后，摩擦力反向并慢慢增加（向左），由于正压力一直是在逐渐减少的，当摩擦力达到 μN 时，镜框向右滑动，当 $N = 0$ 时镜框将跳离钉子.

此时有

$$\theta = \arccos\frac{1}{3}$$

8.34　一质量为 M、半径为 R 的均质球 1 在水平面上作纯滚动，球心速度为 v_0，与另一完全相同的静止球 2 发生对心碰撞，如图所示. 设碰撞时各接触面间的摩擦均可忽略，碰撞是弹性的.

（1）碰撞后，各自经过一段时间，两球开始作纯滚动，求出此时各球心的速度；

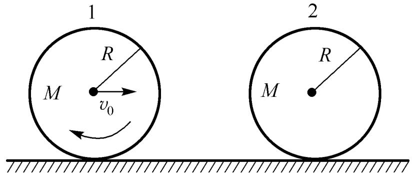
（2）求此过程中系统机械能的损失.

解　由题设，碰撞时各接触面间的摩擦均可忽略，故碰撞仅交换平动能. 由于两球的质量相同，碰撞后两球交换速度，球 1 静止但转速不变，球 2 不转动但以速度 v_0 平动.

（1）对球 1，碰撞后设所受摩擦力为 f_1，方向向右. 设经过时间 t_1 后作纯滚动，纯滚动时球心的速度为 v_1. 由质心运动定理和转动定理得

$$\int_0^{t_1} f_1 \mathrm{d}t = mv_1 - m\cdot 0$$

$$\int_0^{t_1} f_1 R\mathrm{d}t = \frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v_0}{R} - \frac{v_1}{R}\right)$$



题 8.34 图

解得纯滚动时球 1 球心的速度为

$$v_1 = \frac{2}{7}v_0$$

对球 2，碰撞后设所受摩擦力为 f_2，方向向左. 设经过时间 t_2 后作纯滚动，纯滚动时球心的速度为 v_2. 由质心运动定理和转动定理得

$$\int_0^{t_2} f_2 \mathrm{d}t = mv_0 - mv_2$$

$$\int_0^{t_2} f_2 R\mathrm{d}t = \frac{2}{5}mR^2\frac{v_2}{R}$$

解得纯滚动时球 2 球心的速度为

$$v_2=\frac{5}{7}v_0$$

（2）碰撞前的机械能：

$$E_0=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}I\omega_0^2=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v_0}{R}\right)^2=\frac{7}{10}mv_0^2$$

碰撞后的机械能：

$$\begin{aligned}E_1&=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}I\omega_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}I\omega_2^2\\&=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v_1}{R}\right)^2+\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v_2}{R}\right)^2\\&=\frac{7}{10}mv_1^2+\frac{7}{10}mv_2^2=\frac{7}{10}m\left[\left(\frac{2}{7}v_0\right)^2+\left(\frac{5}{7}v_0\right)^2\right]\\&=\frac{7}{10}m\left(\frac{29}{49}v_0^2\right)=\frac{29}{70}mv_0^2\end{aligned}$$

此过程中系统机械能的损失为

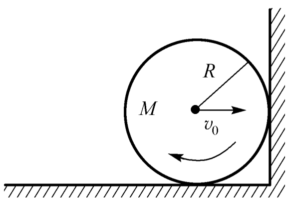
$$\Delta E=E_0-E_1=\frac{7}{10}mv_0^2-\frac{29}{70}mv_0^2=\frac{2}{7}mv_0^2$$

8.35 质量为 M、半径为 R 的弹性球在水平面上作纯滚动，球心速度为 v_0，与一粗糙的墙面发生碰憧后，以相同的球心速度反弹，设球与地面和墙面间的摩擦系数都为 μ，在碰撞时球与水平面间的摩擦可以忽略.

（1）碰撞后，球经过一段时间开始作纯滚动，求出此时的球心速度.

（2）若球与墙面间的碰撞时间为 Δt，为使碰撞时球不会跳起，则摩擦系数应满足什么关系？设碰撞中的相互作用力为恒力.

解 （1）由题意，设碰撞时与墙的正压力为 N，碰后，角速率由 ω_0 减小到 ω_1



题 8.35 图

$$\begin{cases}R\mu N\Delta t=I(\omega_0-\omega_1)\\N\Delta t=Mv_0-(-Mv_0)\\I=\dfrac{2}{5}MR^2\\v_0=\omega_0R\end{cases}$$

解得

$$\omega_1=(1-5\mu)\omega_0$$

碰撞后，球经过一段时间 t 后开始作纯滚动，设纯滚动时球的角速率为 ω_2（与

ω_0，ω_1 的转动方向相反），球的质心速度为 $v_2=\omega_2 R$，有

$$\begin{cases}\mu mgtR = I(\omega_1+\omega_2)\\ mv_0-\mu mgt = mv_2\\ v_2=\omega_2 R\end{cases}$$

解得

$$v_2=\frac{1}{7}(3+10\mu)v_0 \quad （方向向左）$$

（2）由前面推导知

$$N\Delta t = 2mv_0$$

为使碰撞时球不会跳起，应有 $\mu N \leqslant mg$，即

$$\mu \leqslant \frac{Mg}{N}=\frac{g\Delta t}{2v_0}$$

8.36　为了避免高速行驶的汽车在转弯时容易发生的翻车现象，可在车上安装一高速自旋着的大飞轮.

（1）试问，飞轮轴应安装在什么方向上？飞轮应沿什么方向转动？

（2）设汽车的质量为 M，其行驶速度为 v，飞轮是质量为 m、半径为 R 的圆盘，汽车（包括飞轮）的质心距地面的高度为 h. 为使汽车在绕一曲线行驶时，两边车轮的负荷均等，试求飞轮的转速.

解　设汽车沿 x 方向行驶（图 8.36a），取质心下方地面点为参考点，汽车（包括飞轮）的角动量为

$$\boldsymbol{L}=h(M+m)v\boldsymbol{j}$$

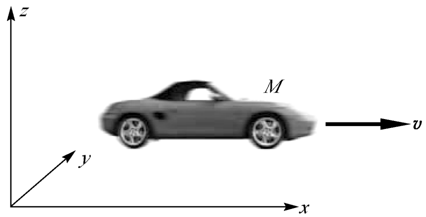


图 8.36a

当汽车转弯时，角动量的方向变化，需要提供力矩. 例如，当汽车左转时，需提供 $-\boldsymbol{i}$ 方向的力矩，即需要给质心提供向心力，否则汽车有向右侧翻倒的趋势.

若在汽车上安装一高速自旋着的大飞轮，使总角动量为零，则当汽车转弯时，角动量不会改变，汽车没有翻倒的趋势.

飞轮是质量为 m、半径为 R 的圆盘，转动角速度为 $\boldsymbol{\omega}$. 于是总的角动量为

$$\boldsymbol{L}=h(M+m)v\boldsymbol{j}+\frac{1}{2}mR^2\boldsymbol{\omega}=0$$

解得

$$\boldsymbol{\omega}=-\frac{2h(M+m)v}{mR^2}\boldsymbol{j}$$

（1）飞轮轴应安装在与汽车前进方向垂直，角动量方向向右.

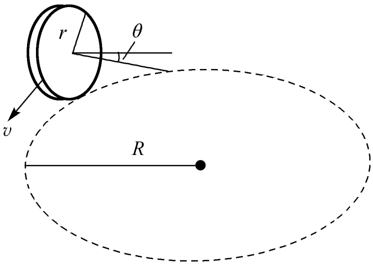
（2）角速度的大小为

$$\omega = \frac{2h(M+m)V}{mR^2}$$

8.37*　一半径为 r 的硬币，在桌面上绕半径为 R 的圆滚动，其质心速度为 v，如图所示. 设硬币的滚动为纯滚动，求其轴线与水平线所成的角 θ.（$\theta \ll 1$，$R \gg r$）

解　画出受力分析图如图 8.37a 所示. AB 是硬币直径，质心为 C 点. 硬币（不考虑厚度）的运动分为自转和公转两部分，自转的转轴为 CO'，公转的转轴为过 O' 点且平行于 AB 的轴（图中未画出）. 设自转和公转的角速度分别为 ω, Ω，由题设硬币的滚动为纯滚动，有

$$\omega r = \Omega R = v \qquad ①$$



题 8.37 图

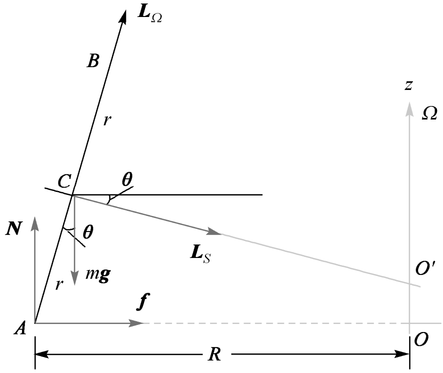


图 8.37a

由受力图，利用质心运动定理得

$$\begin{cases} N = mg \\ f = \dfrac{mv^2}{R - r\sin\theta} \approx \dfrac{mv^2}{R} \end{cases}$$

取 O' 点为参考点，总力矩为

$$M = NR - mg(R - r\sin\theta) - f(r\cos\theta - R\tan\theta)$$

由于 $\theta \ll 1,\ R \gg r$，故而 $\sin\theta \approx \tan\theta,\ \cos\theta \approx 1$，故有

$$M = mgr\sin\theta + mv^2\left(\sin\theta - \frac{r}{R}\right) \qquad ②$$

角动量 $\boldsymbol{L}$ 由自转角动量 L_S 与公转角动量 L_Ω 合成：

$$L_S = I\omega = \frac{1}{2}mr^2\frac{R\Omega}{r} = \frac{1}{2}mrR\Omega$$

$$L_{\Omega}=\left(\frac{1}{4}mr^2+mR^2\right)\Omega\approx mR^2\Omega$$

角动量 $\boldsymbol{L}$ 可以在 z 和 R 方向分解，其 z 方向的分量不随时间变化，但 R 方向的分量绕 z 轴旋转，角动量 $\boldsymbol{L}$ 的 R 方向分量为

$$L_R=L_S\cos\theta+L_{\Omega}\sin\theta=\frac{1}{2}mrR\Omega\cos\theta+mR^2\Omega\sin\theta$$

取近似，得

$$L_R=\frac{1}{2}mrR\Omega+mR^2\Omega\sin\theta \tag{③}$$

且

$$\Omega=\frac{M}{L_R} \tag{④}$$

由式①～式④解得

$$\sin\theta=\frac{3v^2}{2Rg}$$

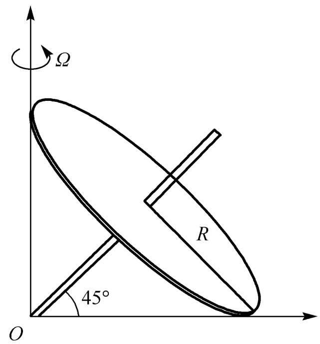
即

$$\theta=\arcsin\left(\frac{3v^2}{2Rg}\right)$$

8.38*　盘缘及杆的一端 O 靠在桌面上，杆与桌面成 45° 角，如图所示. 今陀螺以杆的一端 O 为支点，盘缘靠在桌面上作无滑动滚动，使杆绕铅垂轴作匀速转动，角速度为 Ω. 求：（1）桌面对盘缘的支承力 N；（2）陀螺的动能.

解　考虑一般情况，设杆与桌面成 θ 角（如图 8.38a，题设 $\theta=45°$），设盘绕杆转动的角速度为 $\boldsymbol{\omega}_1$，由于盘面方向在不断变化，可设盘面绕其直径 AB 转动，角速度为 $\boldsymbol{\omega}_2$. 实际上由于 OA 是瞬时转轴，盘面实际绕过 O 点平行于直径 AB 的轴转动. 且有

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2 \tag{①}$$



题 8.38 图

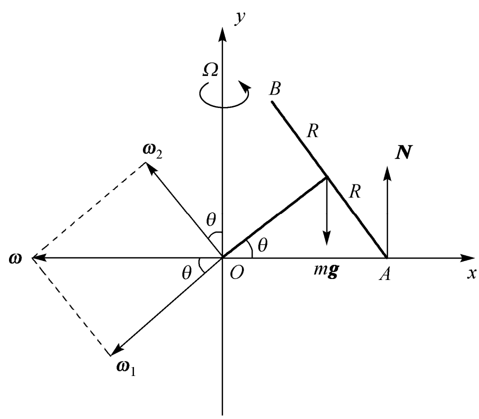


图 8.38a

$\boldsymbol{\omega}$应为 x 轴的负方向．由图可见

$$\omega_1 \sin\theta = \omega_2 \cos\theta \qquad ②$$

由于 OA 是瞬时转轴，有

$$\omega_1 R = \Omega \cdot \overline{OA}$$

即

$$\Omega = \omega_1 \sin\theta \qquad ③$$

设 I_1 为盘绕杆的转动惯量； I_2 为盘绕 z 轴的转动惯量．有

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{1}{2} mR^2 \\ I_2 = \dfrac{1}{4} mR^2 + mR^2 \cot^2\theta \end{cases} \qquad ④$$

盘的角动量：

$$\boldsymbol{L} = I_1 \boldsymbol{\omega}_1 + I_2 \boldsymbol{\omega}_2 \qquad ⑤$$

指向 x 轴的角动量分量：

$$L_x = I_1 \omega_1 \cos\theta + I_2 \omega_2 \sin\theta \qquad ⑥$$

力矩：

$$M = N \frac{R}{\sin\theta} - mgR\cot\theta\cos\theta = L_x \cdot \Omega \qquad ⑦$$

将式②～式⑥代入式⑦，得

$$N = \frac{m\Omega^2 R}{4\cos\theta}(1 + 5\cos^2\theta) + mg\cos^2\theta \qquad ⑧$$

（1）把 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 代入式⑧得

$$N = \frac{7\sqrt{2}}{16} m\Omega^2 R + \frac{1}{2} mg$$

（2）

$$E_k = \frac{1}{2} I_1 \boldsymbol{\omega}_1{}^2 + \frac{1}{2} I_2 \boldsymbol{\omega}_2{}^2 \qquad ⑨$$

将式②～式④代入式⑨得

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mR^2 \cdot \frac{1}{2} \Omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} mR^2 + mR^2\right) \cdot \frac{1}{2} \Omega^2 = \frac{7}{16} mR^2 \Omega^2$$

第 9 章　振 动 和 波

9.1　把简谐振动 $x = A\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{3}\right)$，

（1）写成正弦函数的表达式；

（2）分别以周期 T 和频率 ν 代替 ω，写出两种表达式；

（3）求速度 v 和加速度 a；

（4）作 x-t 、 v-t 、 a-t 图（一个周期），时间轴分别以 t 、 T 、 ωt 表出.

解　（1） $x = A\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{3}\right) = A\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}\right) = A\sin\left(\omega t + \dfrac{5}{6}\pi\right)$

（2） $$x = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{3}\right) = A\cos\left(2\pi\nu t + \frac{\pi}{3}\right)$$

（3） $$v = \dot{x} = -A\omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right),\quad a = \ddot{x} = -A\omega^2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

（4）略.

9.2　简谐振动 $x = 6\cos(5t - \pi/4)\text{cm}$，试问：

（1）振幅、周期、频率各是多少？

（2）起始位移、速度、加速度各是多少？

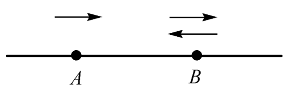
（3） π 秒末的位移、速度、加速度各是多少？

解　（1）振幅 $A = 6\text{cm}$，周期 $T = \dfrac{2\pi}{5}\text{s}$，频率 $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{5}{2\pi}\text{Hz}$.

（2）起始位移 $x(0) = 6\cos\left(-\dfrac{\pi}{k}\right) = 3\sqrt{2}\text{cm}$，起始速度 $v(0) = -30\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 15\sqrt{2}\text{cm/s}$，起始加速度 $a(0) = -150\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -75\sqrt{2}\text{cm/s}^2$.

（3） $t = \pi\text{s}$ 时，位移 $x(\pi) = -3\sqrt{2}\text{cm}$，速度 $v(\pi) = -15\sqrt{2}\text{cm/s}$，加速度 $a(\pi) = 75\sqrt{2}\text{cm/s}^2$.

9.3　如图所示，一质点作简谐振动，在一个周期内相继通过相距为 11cm 的两点 A 、 B ，历时 2.0 s，并具有相同的速率；再经过 2.0 s 后，质点又从另一方向通过 B 点. 求质点运动的周期和振幅.



题 9.3 图

解　可知 A、B 关于平衡位置对称，即 $x_B = -x_A = \dfrac{11}{2}\text{cm}$，所以

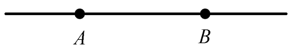
$$t_{AB}+t_{BB}=\frac{T}{2}, \qquad T=2\times(2+2)=8(\mathrm{s})$$

可知从平衡位置到 B 用时 $1.0\mathrm{s}$，从 B 到最大位移处用时 $1.0\mathrm{s}$.

所以

$$x_B=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}A, \qquad 振幅A=\sqrt{2}\,x_B=\frac{11}{2}\sqrt{2}\mathrm{cm}$$

9.4　如图所示，两个质点 A 、B 相距 7.0cm，都沿 x 轴作简谐振动，它们的位置表达式为



题 9.4 图

$$x_A=A_1\sin\left(\omega_A t-\frac{\pi}{2}\right), \quad x_B=A_2\sin\left(\omega_B t+\frac{\pi}{2}\right)$$

其中，$\omega_A=20\mathrm{s}^{-1}$，$\omega_B=21\mathrm{s}^{-1}$，$A_1=3.0\mathrm{cm}$，$A_2=4.0\mathrm{cm}$. 若在 $t=0$ 时开始振动，试问：

（1）开始振动后 $0.035\mathrm{s}$ 时，A 、B 间的距离是多少？

（2）这时刻它们之间的相对速度是多少？

解　（1）$S_{AB}|_{t=0.035\mathrm{s}}=7+(x_B-x_A)|_{t=0.035\mathrm{s}}$

$$=\left[7+4\sin\left(21\times0.035+\frac{\pi}{2}\right)-3\sin\left(20\times0.035-\frac{\pi}{2}\right)\right]=12.3\mathrm{cm}$$

（2）$v_{BA}|_{t=0.035\mathrm{s}}=v_B-v_A=\dot{x}_B-\dot{x}_A$

$$=4\times21\cos\left(21\times0.035+\frac{\pi}{2}\right)-3\times20\cos\left(20\times0.035-\frac{\pi}{2}\right)=-95.0\mathrm{cm/s}$$

即 B 相对于 A 以 95.0cm/s 的速度向 x 轴负方向运动.

9.5　一质点在一直线上作简谐振动，当其距平衡点 O 为 2.0cm 时，加速度为 $4.0\mathrm{cm/s^2}$，求该质点从一端（静止点）运动到另一端所需的时间.

解　设其振动方程为 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$，所以

$$a=\ddot{x}=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$$

题设 $|x|=2.0\mathrm{cm}$ 时，$a=4.0\mathrm{cm/s^2}$，解得

$$\omega=\sqrt{2}\mathrm{rad/s}$$

$$t=\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{\omega}=2.22\mathrm{s}$$

9.6　证明，每个复摆都有两个支点，当摆动轴通过其中一个支点的摆动周期与通过另一点的摆动周期相等时，这两个支点到质心的距离 l_1 和 l_2 满足：$Ml_1l_2=I_C$，式中 M 是复摆的总质量，I_C 是复摆对过质心的水平轴的转动惯量.

证明　复摆作小角度振动，则由角动量定理有

$$I_0\ddot{\varphi}\approx-Mgl\varphi$$

所以

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{Mgl}}$$

其中用了 $\sin\varphi \approx \varphi$，$l$ 为支点到质心的距离，I_0 为刚体对支点的转动惯量.

故有 $I_0 = I_C + Ml^2$，其中 I_C 为刚体对质心的转动惯量.

对于两个支点，有 $T_1 = T_2$，则有

$$\frac{I_1}{Mgl_1} = \frac{I_2}{Mgl_2}$$

所以

$$\frac{I_C}{Ml_1} + l_1 = \frac{I_C}{Ml_2} + l_2$$

化简后有 $Ml_1l_2 = I_C$. 得证.

9.7　在光滑的水平桌面上开有一小孔，一条穿过小孔的细绳两头各系一质量分别为 m_1 和 m_2 的小球，位于桌面上的小球 m_1 以 v_0 的速度绕小孔做匀速圆周运动，而小球 m_2 则悬在空中，保持静止.

（1）求位于桌面部分的细绳的长度 l_0；

（2）若给 m_1 一个径向的小冲量，则 m_2 将作上下小振动，求振动角频率 ω_0.

解　（1）如图 9.7a 所示，设绳中张力为 T.

对 m_2：$T = m_2 g$　①

对 m_1：$T = m_1\dfrac{v_0^2}{l_0}$　②

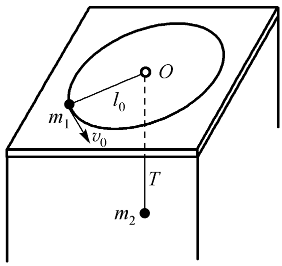


图 9.7a

由式①和式②得

$$l_0 = \frac{m_1 v_0^2}{m_2 g} \quad ③$$

（2）设 m_1 做圆周运动的半径变化为 l，即成为 $(l_0 + l)$，选与 m_1 一起做圆周运动的参考系，则对 m_1，受到离心力和绳子拉力 T：

$$m_1\frac{v^2}{l + l_0} - T = m_1\ddot{l} \quad ④$$

设 m_1 沿垂直于绳方向的速度为 v，由角动量守恒有

$$m_1 v(l + l_0) = m_1 v_0 l_0 \quad ⑤$$

对 m_2，有

$$T - m_2 g = m_2\ddot{l} \quad ⑥$$

由式④～式⑥消去T，v，并利用第（1）问结论$m_1\dfrac{v_0^2}{l_0}=m_2g$得

$$m_2g\left[\left(1+\frac{l}{l_0}\right)^{-3}-1\right]=(m_1+m_2)\ddot{l} \qquad ⑦$$

对$\left(1+\dfrac{l}{l_0}\right)^{-3}$泰勒展开并且略去高阶项，得

$$m_2g\cdot\left(-3\frac{l}{l_0}\right)=(m_1+m_2)\ddot{l}$$

利用式③消去l_0得

$$(m_1+m_2)\ddot{l}+\frac{3m_2^2g^2}{m_1v_0^2}l=0$$

这是振动方程，且振动角频率

$$\omega_0=\sqrt{\frac{3m_2^2g^2}{m_1v_0^2}/(m_1+m_2)}=\frac{m_2g}{m_1v_0}\sqrt{\frac{3m_1}{m_1+m_2}}$$

9.8　如在质量均匀分布的球形行星上沿任一直径挖一隧道，将一物体由静止开始从一道口自由掉下.

（1）求证物体到达隧道的另一道口所需的时间与物体的质量无关，与行星的直径无关，只与行星的密度ρ有关，并计算该时间.

（2）若隧道是沿行星的任一弦挖的，求证该时间与弦的长短、位置均无关，并证明该时间与（1）中的完全一样.

（3）若行星以角速度ω_0匀速自旋，角速度方向与隧道垂直，则（1）、（2）中的时间又为多大？

（4）若上述行星为地球，已知地球密度$\rho=5.52\times10^3\text{kg/m}^3$，$G=6.67\times10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^3/\text{kg}^2$. 由于地球自旋角速度很小，故可忽略，试计算（1）、（2）两问中所提及的时间.

解　（1）沿直径时：物体受到其所在半径r以外的万有引力合为零.

$$-\frac{G\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3\rho\cdot m}{r^2}=m\ddot{r}$$

即

$$\ddot{r}+\frac{4}{3}G\pi\rho r=0$$

这是振动方程，得

$$\omega=\sqrt{\frac{4G\pi\rho}{3}}$$

所以从一端到另一端的时间

$$t=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}=\sqrt{\frac{3\pi}{4G\rho}}$$

（2）隧道为任一条弦时，物体受到万有引力沿弦方向分力提供加速度，所以

$$-\frac{G\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho\cdot m}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=m\ddot{x}$$

即

$$\ddot{x}+\frac{4}{3}G\pi\rho x=0$$

仍可得

$$\omega=\sqrt{\frac{4G\pi\rho}{3}}$$

所需时间仍为 $\sqrt{\frac{3\pi}{4G\rho}}$.

（3）当星球以垂直于隧道的角速度 ω_0 转动时，取相对于星球静止的转动参考系，则

$$-\frac{G\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho\cdot m}{r^2}\cdot\frac{x}{r}-m\omega_0^2x=m\ddot{x}$$

即

$$\ddot{x}+\left(\frac{4}{3}G\pi\rho+\omega_0^2\right)x=0$$

这是振动方程，得

$$\omega=\sqrt{\frac{4G\pi\rho}{3}+\omega_0^2}$$

$$t=\frac{\pi}{\omega}=\pi\left(\frac{4\ G\pi\rho}{3}+\omega_0^2\right)^{-1/2}$$

（4）当 $\rho=5.52\times10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ ， $\omega_0=0$ 时，

$$t=\sqrt{\frac{3\pi}{4G\rho}}=2.5\times10^{3}\mathrm{s}$$

9.9　半径为 r 的均匀重球，可以在一半径为 R 的球形碗底部作纯滚动. 求圆球在平衡位置附近作小振动的周期.

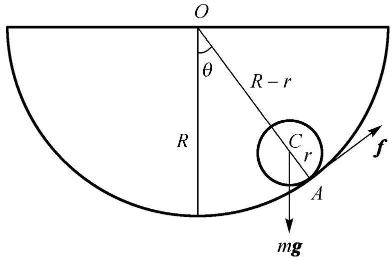


图 9.9a

解　如图 9.9a 所示，首先需判断在 A 点的静摩擦力 f 的方向.

设小球与碗底脱离，静摩擦力为零. 由质心运动定理知小球的质心加速度方向应指向平衡点，即与 θ 增加的方向相反，故知 A 点的静摩擦力 f 的方向应和 θ 增加的方向相同，如图 9.9a 所示.

质心（C 点）运动定理：$-mg\sin\theta+f=m(R-r)\ddot{\theta}$　①

纯滚动条件：$r\beta=-(R-r)\ddot{\theta}$　②

其中，β 是 A 点绕 C 点转动的角加速度，$\ddot{\theta}$ 是 C 点绕 O 点转动的角加速度，两者方向相反，故方程②右边有一负号.

角动量定理：$fr=\dfrac{2}{5}mr^{2}\cdot\beta$　③

题设为小振动，近似有

$$\theta\approx\sin\theta \tag{④}$$

由式①～式④可得

$$\frac{7}{5}(R-r)\ddot{\theta}+g\theta=0 \tag{⑤}$$

这是振动方程，解得周期

$$T=2\pi/\omega=2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

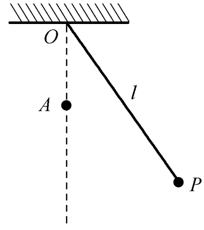
9.10　同一简谐振动的位移、速度、加速度之间的相位差是多少？谁比谁超前？

解　设 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 为简谐振动的位移，则

$$v=\dot{x}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)=A\omega\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a=\ddot{x}=-A\omega^{2}\cos(\omega t+\varphi)=A\omega^{2}\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$

故加速度超前速度 $\pi/2$，速度超前位移 $\pi/2$.



题 9.11 图

9.11　一个单摆如图所示，摆长 $l=150\mathrm{cm}$，悬点 O 的正下方有一固定的钉子 A，$\overline{OA}=54\mathrm{cm}$，设摆动角度很小，求此摆的周期.

解　相当于两个单摆的复合，所以

$$T=\frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{2}=\pi\left(\sqrt{\frac{l}{g}}+\sqrt{\frac{l-\overline{OA}}{g}}\right)=2.21\text{s}$$

9.12　在一平板上放一质量为 1.0kg 的物体，平板在竖直方向上下地作简谐振动，周期为 0.50s，振幅为 2.0cm. 试求：

（1）位移最大时物体对平板的压力；

（2）平板以多大振幅振动时，物体刚好要跳离平板.

解　取向上方向为正，设振动方程为 $x=A\cos\omega t$，由题意：$A=0.02\text{m}$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=4\pi\text{s}^{-1}$，物体的加速度为

$$a=\ddot{x}=-A\omega^2\cos\omega t \tag{①}$$

（1）当 x 的绝对值最大时，

$$\cos\omega t=\pm1,\quad a=\pm A\omega^2=\pm3.16\text{m/s}^2 \tag{②}$$

设物体对平板的压力为 N，则

$$N-mg=ma$$

得

$$N=m(g+a) \tag{③}$$

将式②代入得

$N_1=12.96\text{N}$，　$N_2=6.64\text{N}$　（分别对应于平板在最高点和最低点）

（2）要使物体离开板，则 $N=0$，由式③得 $a=-g$，由式①得 $A=\frac{g}{\omega^2}=6.2\text{cm}$. 当平板在最高点时物体离开板.

9.13　一物体静止于一水平板上，此板沿水平方向作简谐振动，频率为 2.0s^{-1}，物体与板面的静摩擦系数为 0.50. 试问：

（1）要使物体在板上不致发生滑动，能允许振幅的最大值是多少？

（2）若此板沿竖直方向作简谐振动，振幅为 5.0cm，要使物体不离开板，最大频率是多少？

解　（1）最大静摩擦力 $f=\mu mg$ 应提供物体最大加速度 $a=A\omega^2$，而 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu=4\pi\text{s}^{-1}$，所以最大振幅 $A_{\text{m}}=\frac{\mu g}{\omega^2}=3.1\text{cm}$.

（2）最大频率 ν_{m} 应满足 $A\cdot(2\pi\nu)^2=g$，得 $\nu=2.2\text{Hz}$.

9.14　能否在复摆上找一点，在此点上加上一质量有限大的质点而不改变复摆的周期？如能找到，此点应在何处？

解　对复摆可列运动方程

$$I\ddot{\varphi}=-mgh\sin\varphi\approx-mgh\varphi$$

其中，I 为刚体对转轴 O 的转动惯量，m 为刚体质量，h 为 O 与质心 C 的距离 $\overline{OC}$.

周期为 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgh}}$，其与单摆周期公式比较有等效的摆长 $l_0=\dfrac{I}{mh}$，故在 $\overline{OC}$ 连线上距支点 O 为 $l_0=\dfrac{I}{mh}$ 处挂有限质量的物体，不影响复摆的周期.

9.15　甲地的重力加速度为 979.442cm/s^2，乙地的重力加速度为 980.129cm/s^2. 问在甲对准的一个摆钟移到乙地后，每 24h 快或慢几秒？设其他条件不变.

解　同一钟在甲乙两处周期比为

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_1}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_2}}}=\sqrt{\frac{g_2}{g_1}}$$

设 $t=24\text{h}$ 内钟在甲地摆 n_1 下，在乙地摆 n_2 下，故

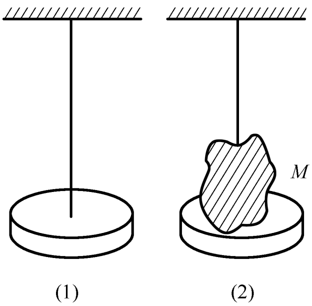
$$n_1=\frac{t}{T_1},\quad n_2=\frac{t}{T_2}$$

则其显示时间的比 $\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{24h}{24h+\Delta t}$，而 $\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{T_2}{T_1}$，所以

$$\sqrt{\frac{g_2}{g_1}}=\frac{24h+\Delta t}{24h}$$

解得 $\Delta t=30.30\text{s}$，即快 30.30s.

9.16　用扭摆可以测物体的转动惯量. 扭摆的底为一质量均匀分布的圆盘，半径为 R，质量为 m，悬点通过中心轴，如图所示. 把圆盘扭转一个角度后放手，它便以悬线为轴来回扭摆，测得其摆动周期为 T_1. 加上一待测物体 M 后，其摆动周期为 T_2，求 M 绕摆轴的转动惯量.



题 9.16 图

解　扭摆的振动方程：

加 M 前：$I_0\ddot{\varphi}=-k\varphi$　①

加 M 后：$(I_0\ddot{\varphi}+I)=-k\varphi$　②

由式①和式②得

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{I_0}{k}},\quad T_2=2\pi\sqrt{\frac{I_0+I}{k}}\qquad ③$$

其中，I_0 为 m 的转动惯量

$$I_0=\frac{1}{2}mR^2 \tag{4}$$

由式③得

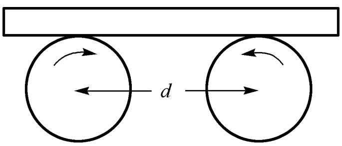
$$\frac{T_2^2}{T_1^2}=1+\frac{I}{I_0}$$

$$I=I_0\left(\frac{T_2^2}{T_1^2}-1\right)=\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{T_2^2}{T_1^2}-1\right)$$

9.17　如图所示，一质量为 m 的均匀木板水平地搁在两个以相同角速度 ω 相向旋转的滚子上，两滚子轴间的距离为 d，它们具有相同的直径. 滚子与木板之间的滑动摩擦系数为 μ. 问当木板偏离对称位置后，它如何运动？如果是作简谐振动，其周期是多少？

解　如图 9.17a 所示，当木板偏离对称位置 x 时，对木板质心由力矩平衡有

$$N_1\left(\frac{d}{2}-x\right)=N_2\left(\frac{d}{2}+x\right) \tag{1}$$



题 9.17 图

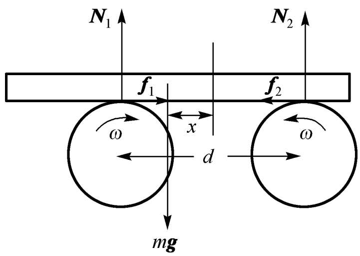


图 9.17a

质心运动定理：

$$竖直方向：mg=N_1+N_2 \tag{2}$$

$$水平方向：f_2-f_1=m\ddot{x} \tag{3}$$

其中

$$f_2=\mu N_2,\quad f_1=\mu N_1 \tag{4}$$

由式①～式④得

$$-\frac{2\mu mg}{d}x=m\ddot{x}$$

这是简谐振动：$\omega=\sqrt{\dfrac{2\mu g}{d}}$，周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{d}{2\mu g}}$.

9.18　两个方向相同，频率相同的简谐振动，其表达式为：$x_1 = 5\sin(10t + 0.75\pi)\mathrm{cm}$，$x_2 = 6\sin(10t + 0.25\pi)\mathrm{cm}$，分别用矢量图法和计算法求合振动.

解　计算法求合振动：

$$\begin{aligned} x = x_1 + x_2 &= 5\sin\left(10t + \frac{3}{4}\pi\right) + 6\sin\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left[5\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 6\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\sin 10t + \left[5\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 6\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\cos 10t \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 10t + \frac{11}{2}\sqrt{2}\cos 10t = \sqrt{61}\sin(10t + \varphi) \end{aligned}$$

其中，$\varphi = \arctan 11$.

矢量图法合振动：

如图 9.18a 所示，分别画出矢量

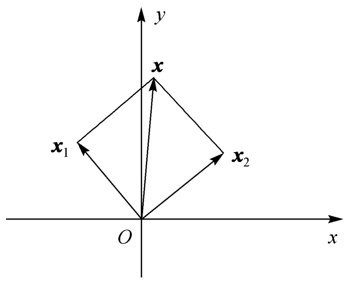


图 9.18a

$$\boldsymbol{x}_1 = 5[\sin(0.75\pi)\boldsymbol{i} + \cos(0.75\pi)\boldsymbol{j}]$$

$$\boldsymbol{x}_2 = 6[\sin(0.25\pi)\boldsymbol{i} + \cos(0.25\pi)\boldsymbol{j}]$$

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是 $t = 0$ 时的振幅矢量，其中 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ 是 x, y 方向的单位向量，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 是 $t = 0$ 时合振动的振幅矢量，这三个矢量都绕 O 点以角速度 $\omega = 10$ 做匀速圆周运动，合振动的振幅矢量在 x 方向的投影就是所求的合振动

$$x = \sqrt{61}\sin(10t + \varphi) = \sqrt{61}\sin(10t + 84^\circ 48')\mathrm{cm}$$

9.19　两个方向相同、频率相同的简谐振动，其合振幅为 10cm，合振动的相位与第一个振动的相位差 30°. 若第一个振动的振幅为 $A_1 = 8.0\mathrm{cm}$，求第二个振动的振幅 A_2 及第一与第二两振动的相位差.

解　设第一个振动为 $x_1 = A_1\cos\omega t$，第二个振动为 $x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi)$，则合振动为

$$x = x_1 + x_2 = (A_1 + A_2\cos\varphi)\cos\omega t - A_2\sin\varphi\sin\omega t \tag{①}$$

题设

$$x = A\cos(\omega t + 30^\circ) = A\cos 30^\circ\cos\omega t - A\sin 30^\circ\sin\omega t \tag{②}$$

由式①和式②得

$$\begin{cases} A_1 + A_2\cos\varphi = A\cos 30^\circ \\ A_2\sin\varphi = A\sin 30^\circ \end{cases}$$

题设

$$A = 10\mathrm{cm},\quad A_1 = 8\mathrm{cm}$$

解得

$$A_2 = 5.0\text{cm}, \quad \varphi = 82.5^\circ$$

9.20　已知两组相互垂直的振动为

（1）$\begin{cases} x = a\sin\omega t \\ y = b\cos\omega t \end{cases}$，　（2）$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = b\sin\omega t \end{cases}$

每组合成的结果各是什么运动，它们之间有何不同？

解　（1）$\begin{cases} x = a\sin\omega t \\ y = b\cos\omega t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，为椭圆，半长轴 a，半短轴 b，顺时针转动.

（2）$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = b\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，也为椭圆，半长轴 a，半短轴 b，逆时针转动.

9.21　地震的瑞利面波在地面沿 x 方向以速度 v 传播时，介质质点在波的传播方向和垂直地面方向所组成的平面内运动，其水平分量 U 和垂直分量 W 分别为

$$U = 0.42\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right], \quad W = -0.62\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

问质点在 U-W 平面内做什么运动？并试画出其图形.

解　由题知 $\dfrac{U^2}{(0.42)^2} + \dfrac{W^2}{(0.62)^2} = 1$，为半长轴 0.62，半短轴为 0.42 的椭圆. 由参数 t 的变化与 U，W 的关系知其为逆时针转动，参见图 9.21a.

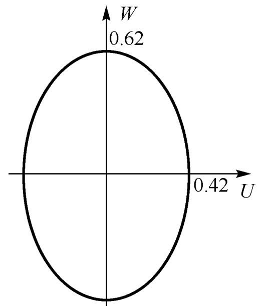


图 9.21a

9.22　一质点同时在两正交方向作简谐运动，振幅相等，频率为 3∶2，起始位移都为零. 画出它的李萨如图形.

解　频率比 3∶2 的李萨如图形参见图 9.22a.

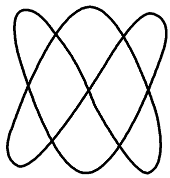


图 9.22a

9.23　某阻尼振动的振幅在一个周期后减为原来的 $1/3$，问此振动周期较无阻尼存在时的周期 T_0 大百分之几？

解　设阻尼系数为 β，由题设可得

$$\frac{1}{3}A = A\mathrm{e}^{-\beta T_f} \qquad ①$$

周期：

$$T_f = \frac{2\pi}{\omega_f} \qquad ②$$

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad ③$$

求得

$$\beta=\frac{\ln 3}{T_f}=\frac{\omega_f}{2\pi}\ln 3\approx\frac{\omega_0}{2\pi}\ln 3 \qquad ④$$

无阻尼存在时的周期：

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0} \qquad ⑤$$

由式②～式⑤得

$$\frac{T_f^2}{T_0^2}=\frac{\omega_0^2}{\omega_f^2}=\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\beta^2}\approx 1+\frac{\beta^2}{\omega_0^2}=1+\left(\frac{\ln 3}{2\pi}\right)^2$$

故

$$\frac{T_f-T_0}{T_0}\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\ln 3}{2\pi}\right)^2\approx 1.5\%$$

9.24　一个摆作阻尼振动，初振幅为 $A_0=3.0\text{cm}$，过 10s 后振幅衰减为 1.0cm. 问再过多少时间振幅衰减为 0.30cm？

解　由题设，$A_0=3.0\text{cm}$，$t=10\text{s}$ 时，

$$A(t)=A_0\mathrm{e}^{-\beta t}=1\text{cm} \qquad ①$$

再过 t'，

$$A(t+t')=A_0\mathrm{e}^{-\beta(t'+t)}=0.3\text{cm} \qquad ②$$

由式①和式②解得

$$t'=-t\frac{\ln 0.3}{\ln A_0}=10.96\text{s}$$

9.25　火车在铁轨上行驶时，每经过一接轨处便受到一次震动，使车箱在弹簧上作上下振动. 设铁轨每段长 12.5m，车箱上每个弹簧承受的重量为 0.50t，弹簧每受 1.0t 重的力将压缩 10mm. 若弹簧本身重量不计，问火车以什么速率行驶时，弹簧的振幅最大？

解　题设弹簧劲度 $k=\dfrac{10^3\text{kg}\times 9.8\text{m/s}^2}{10\text{mm}}=9.8\times 10^5\text{N/m}$，铁轨每段长 $L=12.5\text{m}$，每个弹簧承受的质量为

$$m=0.5\times 10^3=500(\text{kg})$$

即固有频率

$$f_0=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=7.05\text{Hz}$$

当火车达到共振时，弹簧的振幅最大，此时火车速度

$$v = Lf_0 = 12.5 \times 7.05 = 88(\text{m/s})$$

9.26　一物体挂在弹簧下，物体−弹簧系统的固有振动周期为 $T_0 = 0.5\text{s}$．今在物体上加一竖直方向的正弦力，其最大值为 $F = 100\text{dyn}$；此外，还有一不大的摩擦力存在．设系统在共振时的振幅为 $A = 5.0\text{cm}$，并设摩擦力与速度成正比，即 $f = \alpha \dot{x}$．求摩擦阻力系数 α 和最大摩擦力的数值 $f_{\max}$．

解　题设系统的固有振动周期为 $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 0.5\text{s}$，由于所给受迫力 $F\sin\omega t$ 下达共振，此时系统的运动方程为

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F\sin\omega t$$

将方程改写为

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\pi/2\omega)} \quad ①$$

其中

$$\beta = \frac{\alpha}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad f_0 = \frac{F}{m} \quad ②$$

方程①的稳态解为

$$x = A\cos(\omega t - \varphi), \qquad A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad ③$$

共振时的振幅 A 最大，即

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega} = 0$$

由式③得

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

其中 $\beta = \dfrac{\alpha}{2m}$.

当 $\beta \ll \omega_0$ 时有 $\omega = \omega_0$，即

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \approx \frac{F}{2\beta\omega_0 m} = \frac{F}{\alpha\omega_0}$$

解得摩擦阻力系数为

$$\alpha = \frac{F}{\omega_0 A} = \frac{F}{A} \cdot \frac{T_0}{2\pi} = 1.6 \times 10^{-3}\,\text{N} \cdot \text{s/m}$$

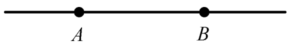
而此时

$$\dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t - \varphi)$$

得摩擦力最大值

$$f_{\mathrm{m}} = \alpha\omega_0 A = F = 0.001\mathrm{N}$$

9.27　如图所示，在波的传播路程上有 A、B 两点，介质的质点都作简谐振动，B 点的相位比 A 点落后 $30°$. 已知 A、B 之间的距离为 2.0cm，振动周期为 2.0s，求波速 v 和波长 λ.



题 9.27 图

解　如题 9.27 图，由题设这是右行波，

$$y = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

其中，$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$，$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

题设

$$T = 2.0\mathrm{s}\,,\qquad \overline{AB} = 2.0\mathrm{cm}\,,\qquad k\cdot\overline{AB} = \frac{\pi}{6}$$

解得

$$\text{波长}\ \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi/6}\cdot\overline{AB} = 24\mathrm{cm}\,,\qquad \text{波速}\ v = \frac{\lambda}{T} = 12\mathrm{cm/s}$$

9.28　某简谐波波长为 10m，传至 A 处引起 A 处质点振动，振动周期为 0.20s，振幅为 0.50cm. 试问：

（1）波的传播速度 v 是多少？

（2）质点经过平衡位置时的运动速度是多少？

解　（1）

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{10\mathrm{m}}{0.2\mathrm{s}} = 50\mathrm{m/s}$$

（2）$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 10\pi/\mathrm{s}$，质点经过平衡位置时的运动速度为

$$v_{\max} = \omega A = 5\pi\mathrm{cm/s} \approx 15.7\mathrm{cm/s}$$

9.29　一平面波的表达式为 $x = a\cos(bt - cx)$，

（1）指出它的振幅、角频率、周期、波长、频率和波速；

（2）如 $x = 20\cos\pi(2.5t - 0.01x)\mathrm{cm}$，算出上述各物理量的数值.

解　（1）振幅为 a，角频率为 b，周期 $T = \dfrac{2\pi}{b}$，波长 $\lambda = \dfrac{2\pi}{c}$，频率 $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{b}{2\pi}$，波速 $v = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{b}{c}$.

（2）　此时，$a = 20\mathrm{cm},\ \omega = 2.5\pi/\mathrm{s},\ T = 0.8\mathrm{s},\ \lambda = 200\mathrm{cm},\ \nu = 1.25\mathrm{Hz},\ v = 250\mathrm{cm/s}$.

9.30　平面简谐波的振幅为 1.0cm，频率为 100Hz，波速为 400 m/s. 以波源处的质点经平衡位置向正方向运动时作为时间起点，求距波源 800cm 处介质质点振动的表达式.

解　题设 $A=1\text{cm}$,　$f=100\text{Hz}$，$v=400\text{m/s}$，波源处初位相 $\varphi=0$，求得

$$\text{周期}\ T=\frac{1}{f}=0.01\text{s}，\qquad \text{角频率}\ \omega=\frac{2\pi}{T}=200\pi\text{s}^{-1}$$

$$\text{波长}\ \lambda=vT=4\text{m}，\qquad \text{波数}\ k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{vT}=\frac{\pi}{2}\text{m}^{-1}$$

距波源 $x=800\text{cm}=0.8\text{m}$ 处介质质点振动的表达式为

$$y=A\sin(\omega t-kx+\varphi)=\sin\left(200\pi t-\frac{\pi}{2}\times 8\right)=\sin(200\pi t)\text{cm}$$

9.31　两个不同的音叉在完全相同的两段绳上产生稳定的简谐波，振幅为 $A_1=2A_2$，波长为 $\lambda_1=\lambda_2/2$．设绳子除与音叉外不与其他物体交换能量．求两音叉给予绳子的功率之比 P_1/P_2．

解　由于绳子相同，故 v 相同，则 $\omega=\dfrac{2\pi v}{\lambda}$，题设 $\lambda_1=\lambda_2/2$，有

$$\omega_1/\omega_2=\lambda_2/\lambda_1=2$$

所以

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{\omega_1^2A_1^2}{\omega_2^2A_2^2}=16$$

9.32　波遇到两种介质的界面时发生反射，设入射波与反射波的振动方向不变．如果入射波是一纵波，要使反射波是一横波，设纵波在介质中的传播速度是横波传播速度的 $\sqrt{3}$ 倍．问入射角为多少？

解　如图 9.32a 设入射角为 θ，原波沿 x 方向振动、传播、经反射后，仍沿 x 方向振动，但沿与 x 垂直的 y 方向传播，则波沿 1 从 $A\to B$ 时间应与沿 2 从 $B\to C$ 时间相等，故

$$\tan\theta=\frac{BC}{AB}=\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{3}$$

即

$$\theta=60^\circ$$

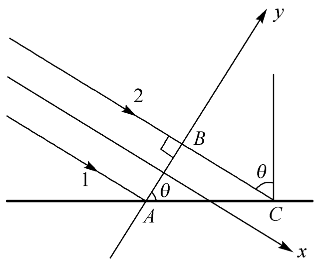


图 9.32a

9.33　两正弦波向同一方向前进，波速分别为 v_1 和 v_2，波长分别为 λ_1 和 λ_2，试求：

（1）对应于这两个波，其振动具有相同相位之各点在空间的移动速度 u；

（2）相邻两个上述点之间的距离 D；

（3）由上得到，如果 $v_1\approx v_2$，　$\lambda_1\approx\lambda_2$，则 $u=v-\lambda\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}$ 即群速度；

（4）由此证明拍频的频率为两个频率之差．

解　（1）设两侧波分别为

$$y_1 = A_1\cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi)\,, \qquad y_2 = A_2\cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

具有相同位相的各点有

$$(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x + \phi = 2n\pi \qquad （n\text{为整数}）$$

有

$$u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{2\pi v_1/\lambda_1 - 2\pi v_2/\lambda_2}{2\pi/\lambda_1 - 2\pi/\lambda_2} = \frac{v_1\lambda_2 - v_2\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \qquad ①$$

（2）相邻两点满足

$$\begin{cases}(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x_1 + \varphi = 2n\pi \\ (\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x_2 + \varphi = 2(n+1)\pi\end{cases}$$

所以

$$D = |x_2 - x_1| = \left|\frac{2\pi}{k_1 - k_2}\right| = \left|\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right|$$

（3）由式①得群速度为

$$u = \frac{v_1\lambda_2 - v_1\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{v_1\lambda_1 - v_2\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = v_1 - \lambda_1\frac{v_2 - v_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

由题设 $v_1 \approx v_2$，$\lambda_1 \approx \lambda_2$，可令

$$v_1 = v\,, \qquad v_2 = v + \mathrm{d}v\,, \qquad \lambda_1 = \lambda\,, \qquad \lambda_2 = \lambda + \mathrm{d}\lambda$$

群速度为

$$u = v - \lambda\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}$$

（4）拍频 $\nu = \dfrac{u}{D} = \left|\dfrac{v_1}{\lambda_1} - \dfrac{v_2}{\lambda_2}\right| = |f_1 - f_2|$，即拍频的频率为两个频率之差.

题 9.34 图

9.34　如图所示，介质中两相干简谐点波源 A、B 相距为 30m，振幅相等，频率均为 100Hz，相位差为 π，波的传播速度是 400m/s. 求 A、B 间连线上因干涉而静止的点的位置.

解　设 A 处　$y_1 = A\cos(\omega t - kx + \pi)$，$B$ 处 $y_2 = A\cos(\omega t - kx')$，其中$x' = 30 - x$.
题设 $\omega = 2\pi f = 200\pi$，波的传播速度：$v = 400\text{m/s}$.
要找静止点，则相位差为 $(2n+1)\pi$，即

$$\omega t - kx + \pi - [\omega t - k(30 - x)] = 2n\pi + \pi \qquad ①$$

其中，$k=\dfrac{\omega}{v}=\dfrac{\pi}{2}$.

由式①解得

$$x=15-\frac{n\pi}{k}=15-2n \quad (n\text{为整数})\text{，即 } x \text{ 是奇数}$$

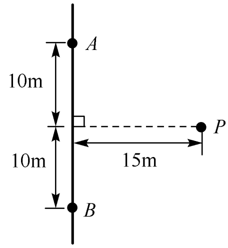
即 AB 之间距 A 为奇数米处的点均静止.

9.35　P 点与两振源 A、B 等距，相对位置如图所示，A、B 的振动方向相同，自 A、B 发出的两简谐波，频率都是 100Hz，相位差为 π，介质中波速为 10m/s，到达 P 点时，振幅都是 5.0cm.

（1）求 P 点振动的表达式；

（2）若 A、B 的相位差为 0，则又如何？

（3）若 A、B 的相位差为 $\pi/2$，则又如何？



题 9.35 图

解　由题意，两振源 A、B 的振动为

$$x_A=5\sin(\omega t+\varphi_0+\Delta\varphi),\quad x_B=5\sin(\omega t+\varphi_0)$$

题设

$$\overline{AP}=\overline{BP}=\sqrt{10^2+15^2}=5\sqrt{13}(\mathrm{m}),\qquad \text{波速 } v=\frac{\omega}{k}=10\mathrm{m/s}$$

圆频率 $\omega=2\pi f=200\pi/\mathrm{s}$，波数 $k=\dfrac{\omega}{v}=20\pi\mathrm{m}^{-1}$

到达 P 点时，两支波的振动为

$$x_{AP}=5\sin(\omega t-k\cdot\overline{AP}+\varphi_0+\Delta\varphi),\quad x_{BP}=5\sin(\omega t-k\cdot\overline{BP}+\varphi_0)$$

P 点的合振动为

$$\begin{aligned}x_P&=x_{AP}+x_{BP}=5\sin(\omega t-k\cdot\overline{AP}+\varphi_0+\Delta\varphi)+5\sin(\omega t-k\cdot\overline{BP}+\varphi_0)\\&=10\cos\frac{\Delta\varphi}{2}\sin\left(200\pi t-100\sqrt{13}\pi+\varphi_0+\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\end{aligned}$$

（1）$\Delta\varphi=\pm\pi$ 时，P 点振动的表达式为

$$x_P=0$$

（2）$\Delta\varphi=0$ 时，P 点振动的表达式为

$$x_P=10\sin\left(200\pi t-100\sqrt{13}\pi+\varphi_0\right)$$

（3）$\Delta\varphi=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 时，P 点振动的表达式为

$$x_P=5\sqrt{2}\sin\left(200\pi t-100\sqrt{13}\pi+\varphi_0\pm\frac{\pi}{4}\right)$$

9.36　弦上一驻波中相邻两节点的距离为 65cm，弦的振动频率为 $\nu = 2.3\times10^2\text{Hz}$．求波的传播速度 v 和波长 λ．

解　$\lambda = 2\times 65\text{cm} = 1.3\text{m}$，　$v = \lambda\nu = 1.3\text{m}\times 2.3\times10^2\text{Hz} \approx 300\text{m/s}$

9.37　设入射波方程为 $y_1 = A\sin\left(\omega t + \dfrac{2\pi x}{\lambda}\right)$，在 $x=0$ 处反射．在下述两种情况下，求当没有衰减时合成的驻波方程，并说明何处是波腹？何处是波节？

（1）反射端是自由端；

（2）反射端是固定的.

解（1）自由端反射：入射波 $y_1 = A\sin\left(\omega t + \dfrac{2\pi x}{\lambda}\right)$，反射波 $y_2 = A\sin\left(\omega t - \dfrac{2\pi x}{\lambda}\right)$，合成的驻波方程为

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\omega t$$

在$x=\dfrac{n\lambda}{2}$为波腹，$x=\dfrac{(2n+1)\lambda}{4}$为波节，$n=0,1,2,\cdots$.

（2）固定端反射：入射波 $y_1 = A\sin\left(\omega t + \dfrac{2\pi x}{\lambda}\right)$，反射波 $y_2 = A\sin\left(\omega t - \dfrac{2\pi x}{\lambda} + \pi\right)$，合成的驻波方程为

$$y = y_1 + y_2 = 2A\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t$$

在$x=\dfrac{n\lambda}{2}$为波节，$x=\dfrac{(2n+1)\lambda}{4}$为波腹，$n=0,1,2,\cdots$.

9.38　以下两列波在介质中叠加：

$$\begin{cases} y_1 = A\cos(6t-5x) \\ y_2 = A\cos(5t-4x) \end{cases}$$

式中，y_1，y_2，x 的单位是 m，t 的单位是 s.

（1）求此两列波的相速度 v_{p1} 和 v_{p2}；

（2）写出合成波的方程，并求出振幅为零的相邻两点之间的距离；

（3）求群速度 v_g.

解（1）　$v_{p1} = \dfrac{\omega_1}{k_1} = \dfrac{6}{5} = 1.2(\text{m/s})$，　$v_{p2} = \dfrac{\omega_2}{k_2} = \dfrac{5}{4} = 1.25(\text{m/s})$

（2）合成波的方程为

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{11}{2}t - \frac{9}{2}x\right)$$

令 $\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{x_1}{2}\right)=0$，$\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{x_2}{2}\right)=0$，得振幅为零的相邻两点之间的距离：

$$\Delta x=|x_2-x_1|=2\pi\text{m}$$

（3）群速度：

$$v_g=\frac{\omega_g}{k_g}=\frac{1/2}{1/2}=1(\text{m/s})$$

9.39 水上短波长（≤1cm）的涟波运动，是受表面张力控制的. 这种涟波的相速度为 $v_p=\sqrt{\frac{2\pi S}{\rho\lambda}}$，式中 S 为表面张力系数，ρ 为水的密度.

（1）试证明：由接近某给定波长 λ 的诸波长所构成的扰动，其群速度等于 $1.5v_p$；

（2）若波群只有两个波组成，此两波的波长分别为 0.99cm 和 1.01cm，则波群两相邻峰值间的距离为多大？

解 （1）题设 $v_p=\sqrt{\frac{2\pi S}{\rho\lambda}}$，有

$$\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda}=\sqrt{\frac{2\pi S}{\rho}}\left(-\frac{1}{2}\right)\lambda^{-3/2}=-\frac{1}{2\lambda}v_p$$

由习题 9.33（3）知，群速度

$$u=v_p-\lambda\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda}=v_p+\frac{1}{2}v_p=\frac{3}{2}v_P$$

（2）设两波方程为

$$y_1=A_1\cos(\omega_1 t-k_1 x+\varphi),\qquad y_2=A_2\cos(\omega_2 t-k_2 x)$$

对波群波峰满足

$$(\omega_1-\omega_2)t-(k_1-k_2)x+\varphi=2n\pi$$

则相邻波峰距

$$D=\frac{2\pi}{k_1-k_2}=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\lambda_1}-\frac{2\pi}{\lambda_2}}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}=500\text{cm}$$

9.40 对于深水波，考虑到表面张力，其色散关系为

$$\omega^2=gk+\frac{Sk^3}{\rho}$$

式中，水的密度 $\rho=1.0\times10^3\text{kg/m}^3$，表面张力 $S=7.2\times10^{-2}\text{N/m}$.

（1）求出相速度和群速度与 k 的函数关系；

（2）证明对于波长接近于 $1.7\times10^{-2}\text{m}$ 的诸波所构成的水波，其相速度与群速度相等，并求出速度值.

解　（1）相速度 $v=\dfrac{\omega}{k}=\sqrt{\dfrac{g}{k}+\dfrac{Sk}{\rho}}$，群速度 $u=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=\dfrac{g+\dfrac{3Sk^2}{\rho}}{2\sqrt{gk+\dfrac{Sk^3}{\rho}}}$.

（2）在（1）的结果中令 $u=v$，可得

$$\lambda=2\pi\sqrt{\frac{S}{\rho g}}=1.7\times10^{-2}\,\mathrm{m}$$

即当 $\lambda=1.7\times10^{-2}\,\mathrm{m}$ 时，水波的相速度与群速度相等.

题设

$$\rho=10^3\,\mathrm{kg/m^3},\quad S=7.2\times10^{-2}\,\mathrm{N/m}$$

代入上面的 u 或 v 表达式可得 $v=u\approx0.23\mathrm{m/s}$.

9.41　一机车汽笛频率为 650Hz，机车以 54km/h 驶向观察者，问观察者听到的声音频率是多少？设空气中声速为 340m/s.

解　$\nu'=\dfrac{v}{v-v_s}\nu=\dfrac{340\mathrm{m/s}}{(340-15)\mathrm{m/s}}\cdot650\mathrm{Hz}=680\mathrm{Hz}$，即观察者听到的声音频率是 680Hz.

9.42　甲火车以 43.2km/h 的速度行驶，其上一乘客听到对面驶来的乙火车鸣笛声的频率为 $\nu_1=512\mathrm{Hz}$；当这一火车过后，听其鸣笛声的频率为 $\nu_2=428\mathrm{Hz}$. 求乙火车上的人听到乙火车鸣笛的频率 ν_0 和乙火车对于地面的速度 u. 设空气中声波的速度为 340m/s.

解　由题意得

$$\begin{cases}\dfrac{v+v_0}{v-u}\nu_0=\nu_1=512\mathrm{Hz}\\[2ex]\dfrac{v-v_0}{v+u}\nu_0=\nu_2=428\mathrm{Hz}\end{cases}$$

题设

$$v=340\mathrm{m/s},\quad v_0=43.2\mathrm{km/h}=12\mathrm{m/s}$$

解得

$$\nu_0=\frac{2v}{\dfrac{v+v_0}{\nu_1}+\dfrac{v-v_0}{\nu_2}}=468\mathrm{Hz},\qquad u=\frac{v\left(\dfrac{v-v_0}{\nu_2}-\dfrac{v+v_0}{\nu_1}\right)}{\dfrac{v+v_0}{\nu_1}+\dfrac{v-v_0}{\nu_2}}=18.45\mathrm{m/s}=66.4\mathrm{km/h}$$

即乙火车鸣笛的频率 $\nu_0=468\mathrm{Hz}$，乙火车对于地面的速度 $u=66.4\mathrm{km/h}$.

9.43　一个人在大而光滑的墙前，手里拿着一个频率 $\nu=500\mathrm{Hz}$ 的音叉，以速度 $u=1.0\mathrm{m/s}$ 向墙壁前进，他同时听到直接由音叉发出的声音和由墙壁反射回来的声音. 如空气中声速为 $v=334\mathrm{m/s}$，问他听到的拍频是多少？

解　墙处接收到的频率 $\nu_1=\dfrac{v}{v-u}\nu$，墙反射回人听到的频率 $\nu_2=\dfrac{v+u}{v}\nu_1=\dfrac{v+u}{v-u}\nu$．所以拍频

$$\nu_0=\nu_2-\nu_0=\frac{2u}{v-u}\nu\approx 3\mathrm{Hz}$$

9.44　在空气温度是 -17℃时（空气中声速为 $v=320\mathrm{m/s}$），一辆以 72km/h 的速度前进的机车鸣笛 2.0s. 站在铁轨上的人，（1）有的看到机车迎面而来，（2）有的看到机车背离而去，问他们听到的声音分别比鸣笛时间缩短或延长了多久？

解　设机车鸣笛频率为 ν_0，鸣笛时间为 t_0；看到机车迎面而来的人听到的频率为 ν_1，听到的时间为 t_1；看到机车背离而去的人听到的频率为 ν_2，听到的时间为 t_2．

有

$$\nu_0 t_0=\nu_1 t_1=\nu_2 t_2$$

$$\frac{\nu_1}{\nu_0}=\frac{v}{v-u}\qquad（u\text{ 为机车的速度}）$$

$$\frac{\nu_2}{\nu_0}=\frac{v}{v+u}$$

题设

$$v=320\mathrm{m/s}，\qquad u=20\mathrm{m/s}$$

解得

$$\Delta t_1=t_1-t_0=\left(\frac{\nu_0}{\nu_1}-1\right)t_0=-\frac{u}{v}t_0=-\frac{1}{8}\mathrm{s}$$

$$\Delta t_2=t_2-t_0=\left(\frac{\nu_0}{\nu_2}-1\right)t_0=\frac{u}{v}t_0=\frac{1}{8}\mathrm{s}$$

（1）车迎面来，鸣笛时间缩短了 1/8s；

（2）车背离去，鸣笛时间延长了 1/8s.

9.45　一个很重的音叉以速度 $u=25\mathrm{cm/s}$ 向墙壁接近，音叉在静止的观察者与墙壁之间. 观察者听得拍频为 $\nu=3\mathrm{s}^{-1}$. 设声速 $v=340\mathrm{m/s}$，求音叉振动频率.

解　设音叉振动频率为 ν_0，观察者直接听到的频率 $\nu_1=\dfrac{v}{v+u}\nu_0$，听到墙壁反射的频率 $\nu_2=\dfrac{v}{v-u}\nu_0$．

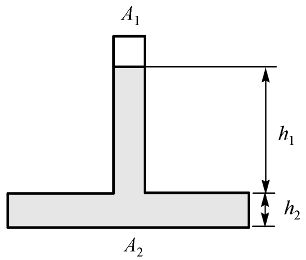
题设

$$\nu=\nu_2-\nu_1=\frac{2uv}{v^2-u^2}\nu_0=3\mathrm{Hz}$$

解得音叉振动频率 $\nu_0\approx 2040\mathrm{Hz}$．

第 10 章　流 体 力 学

10.1　一根横截面积 $A_1 = 5.00\text{cm}^2$ 的细管，连接在一个容器上，容器的横截面积 $A_2 = 100\text{cm}^2$，高度 $h_2 = 5.00\text{cm}$，今把水注入，使水对容器底部的高度 $h_1 + h_2 = 100\text{cm}$，如图所示. 求：



题 10.1 图

（1）水对容器底部的作用力为多大？

（2）此装置内水的重量为多大？

（3）解释（1）和（2）中所求得的结果为何不同？

解　（1）水对容器底部的压力方向朝下，大小为

$$F_1 = \rho g(h_1 + h_2)A_2 = 98\text{N}$$

（2）此装置内水的重量为

$$W = \rho g(h_1 A_1 + h_2 A_2) = 9.56\text{N}$$

（3）水对容器上平板的压力方向朝上，大小为

$$F_2 = \rho g h_1 (A_2 - A_1)$$

于是水对容器的总压力大小为

$$F = F_1 - F_2 = \rho g(h_1 A_1 + h_2 A_2) = W$$

10.2　一立方形的钢块平正地浮在容器内的水银中，已知钢块的密度为 7.8g/cm^3，水银的密度为 13.6g/cm^3.

（1）问钢块露出水银面之上的高度与边长之比为多大？

（2）如果在水银面上加水，使水面恰与钢块的顶相平，问水层的厚度与钢块边长的比例为多大？

解　题设钢块的密度 $\rho_1 = 7.8\text{g/cm}^3$，水银的密度 $\rho_2 = 13.6\text{g/cm}^3$.

（1）设钢块的边长为 l，钢块露出水银面之上的高度为 x，则钢块重力为 $W = \rho_1 l^3 g$，钢块所受浮力为 $F_1 = \rho_2 l^2 (l - x) g$.

由 $W = F_1$ 解得钢块露出水银面之上的高度与边长之比为

$$\frac{x}{l} = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} = 0.43$$

（2）设水层的厚度为 y，水的密度为 $\rho_3 = 1\text{g/cm}^3$.

钢块所受浮力为

$$F_2 = \rho_2 l^2 (l - y) g + \rho_3 l^2 y g$$

由 $W = F_2$ 解得水层的厚度与钢块边长的比为

$$\frac{y}{l} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_3} = 0.46$$

10.3　在某水池的边上装有一宽为 1.0m 的小门，其下边与水池底相平，并用绞链与池壁连结. 试问，当池内的水深为 2.0m 时，门受到的水的作用力相对于绞链的力矩为多大？

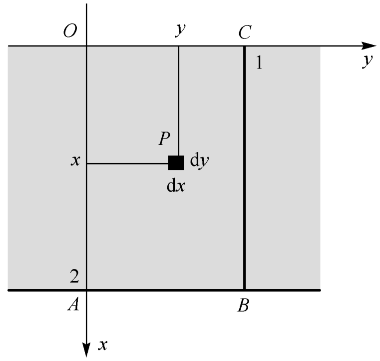


图 10.3a

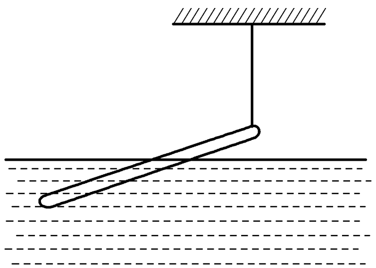
解　如图 10.3a 选择坐标系，设小门为 $OABC$，绞链为 OA，门上一点 P 的微元面积为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，压强为 $\rho g x$，ρ 为水的密度. 则该微元对绞链产生的力矩为 $\rho g x y$，总力矩为

$$M = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^1 \rho g x y \mathrm{d}y = \frac{1}{4}\rho g\, x^2\Big|_0^2\, y^2\Big|_0^1$$
$$= \rho g = 9.8\times 10^3\,\mathrm{N\cdot m}$$

10.4　一根长为 l、密度为 ρ 的均质细杆，浮在密度为 ρ_0 的液体里，杆的一端由一竖直细绳悬挂着，使该端高出液面的距离为 d，如图所示. 试求：

（1）杆与液面的夹角 θ；

（2）绳中的张力 T. 设杆的截面积为 S.


题 10.4 图

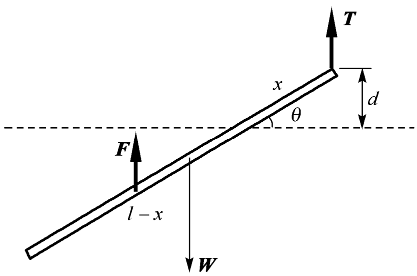


图 10.4a

解　（1）如图 10.4a 所示，设细杆浮出水面部分的长度为 x、重力为 W、浮力为 F，有

$$W = (\rho l S)g\,,\qquad F = \rho_0 S(l-x)g$$

相对于悬挂点的力矩平衡：

$$W\cdot\frac{l}{2}\cos\theta = F\left(\frac{l-x}{2}+x\right)\cos\theta$$

解得

$$x = l\sqrt{1-\rho/\rho_0}$$

$$\sin\theta = \frac{d}{x} = \frac{d}{l\sqrt{1-\rho/\rho_0}}$$

即

$$\theta = \arcsin\left(\frac{d}{l\sqrt{1-\rho/\rho_0}}\right)$$

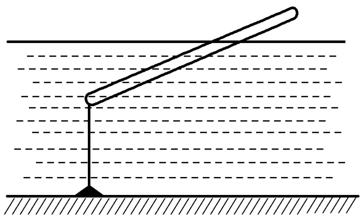
（2）由杆在竖直方向所受合力为零得

$$T = W - F = (\rho - \rho_0 + \rho_0\sqrt{1-\rho/\rho_0})lSg$$

10.5　若上题中细杆的一端由一竖直细绳与装液体的容器底面相连，使该端低于液面的距离为 d，如图所示. 求解上题中的两个问题.

解　（1）如图 10.5a 所示，设细杆浮出水面部分的长度为 x、重力为 W、浮力为 F，有

$$W = (\rho lS)g\,, \qquad F = \rho_0 S(l-x)g$$



题 10.5 图

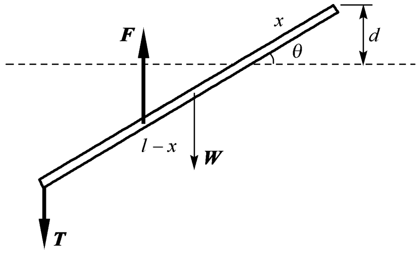


图 10.5a

相对于竖直细绳与细杆连接点的力矩平衡：

$$W\cdot\frac{l}{2}\cos\theta = F\left(\frac{l-x}{2}\right)\cos\theta$$

解得

$$x = l\left(1-\sqrt{\rho/\rho_0}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{d}{x} = \frac{d}{l\left(1-\sqrt{\rho/\rho_0}\right)}$$

即

$$\theta = \arcsin\left(\frac{d}{l\left(1-\sqrt{\rho/\rho_0}\right)}\right)$$

（2）由杆在竖直方向所受合力为零得

$$T = F - W = \left(\sqrt{\rho\rho_0} - \rho\right)lSg$$

10.6　一长方形容器长、宽、高分别是 2m、0.7m 和 0.6m，内贮 0.3m 深的水，若容器沿长边方向做水平加速运动，加速度为 $a = 3\text{m/s}^2$. 求水作用在容器各壁上的力.

解　取相对于容器静止的参考系，如图 10.6a 建立坐标系，其中 OA 为长，OC 为高（宽的方向图上没有画出），容器静止时水面 DE 应与 OA 平行. 当容器以加速度 a 向右运动时，由于该参考系为非惯性系，需引入向左的惯性力，故水中任一点 P 的表观重力方向应为 g' 方向，而此时液面变为 FG，与 g' 垂直. 由于水的体积不变，知

$$\overline{FD} = \overline{EG}, \qquad \overline{DH} = \overline{HE} = \overline{OA}/2$$

设 $g = 10\ \text{m/s}^2$，题设 $OA = 2$，$OD = 0.3$，

$$\tan\theta = \frac{a}{g} = \frac{\overline{FD}}{\overline{DH}} = \frac{2\overline{FD}}{\overline{OA}} = \frac{3}{10}$$

得

$$\overline{FD} = \frac{3}{20}\overline{OA} = 0.3$$

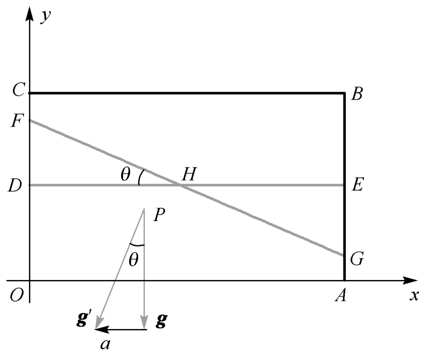


图 10.6a

即 F 点与 C 点重合，G 点与 A 点重合. 于是有

前端面压力：$F_{AB} = 0$

由于 OC 上各点的压强为 $\rho g'(\overline{OC} - y)$，故后端面压力

$$F_{OC} = 0.7\int_0^{0.6} \rho g'(\overline{OC} - y)\mathrm{d}y = 0.5\times 0.7\times 0.6^2\times\sqrt{10^2+3^2} = 1.32\times 10^3\ (\text{N})$$

由于 OA 上各点的压强为 $\rho g'\cdot\overline{OC}\left(1-\dfrac{x}{\overline{OA}}\right)$，故底面压力

$$F_{OA} = 0.7\int_0^2 \rho g'\cdot\overline{OC}\left(1-\frac{x}{\overline{OA}}\right)\mathrm{d}x = 0.7\rho g'\cdot\overline{OC}\left[x-\frac{x^2}{2\overline{OA}}\right]_0^2 = 4.38\times 10^3\ (\text{N})$$

求侧面压力需要对四边形 $OAGF$ 进行积分（注意到 F 点与 C 点重合，G 点与 A 点重合，实际上是三角形 OAC）.

CA 连线的方程是

$$\frac{x}{\overline{OA}} + \frac{y}{\overline{OC}} = 1$$

侧面上任一点的压强为

$$\rho g'\cdot\left[\overline{OC}\left(1-\frac{x}{\overline{OA}}\right) - y\right]$$

每个侧面压力为

$$F = 0.7\int_0^{\overline{OA}} \mathrm{d}x \int_0^{\overline{AC}} \rho g' \cdot \left[\overline{OC}\left(1 - \frac{x}{\overline{OA}}\right) - y\right]\mathrm{d}y$$

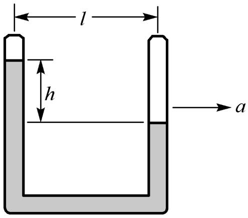
$$= 0.7\int_0^{\overline{OA}} \mathrm{d}x \int_0^{\overline{OC}\left(1-\frac{x}{\overline{OA}}\right)} \rho g' \cdot \left[\overline{OC}\left(1 - \frac{x}{\overline{OA}}\right) - y\right]\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\rho g' \int_0^{\overline{OA}} \overline{OC}^2 \left(1 - \frac{x}{\overline{OA}}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}\rho g' \cdot \overline{OC}^2 \cdot \overline{OA} = \frac{1}{6} \times 10^3 \times \sqrt{10^2 + 3^2} \times 0.6^2 \times 2 = 1.25 \times 10^3\,(\mathrm{N})$$

10.7　一粗细均匀的 U 形管内装有一定量的液体. U 形管底部的长度为 l. 当 U 形管以加速度 a 沿水平方向加速时（如图所示），求两管内液面的高度差 h.

解　仿上题，取相对于 U 形管静止的参考系，由于该参考系为非惯性系，需引入向左的惯性力，故液体中任一点 P 的表观重力方向应为 g' 方向，此时的液面与水平方向的夹角 θ 满足



题 10.7 图

$$\tan\theta = \frac{a}{g} = \frac{h}{l}$$

解得

$$h = \frac{al}{g}$$

10.8　如图所示，一半径为 r 的圆球悬浮于两种液体的交界面上，两种液体的密度分别为 ρ_1 和 ρ_2，位于交界面上方的球冠的高度 $d = r/3$，液面与交界面的高度差为 h，

（1）求圆球的质量 M.

（2）试问密度为 ρ_1 的液体对圆球的作用力是什么方向？

（3）试不用积分的方法分别求出两种液体对圆球的作用力 F_1 和 F_2 的大小.

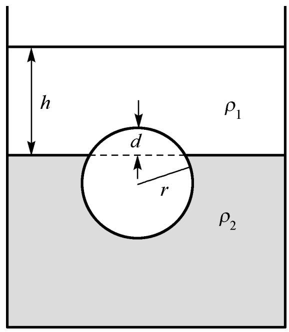
解　（1）圆球的质量应等于它排开液体的质量.

在密度为 ρ_1 的液体中的球冠体积为

$$V_1 = \frac{\pi d^2}{3}(3r - d) = \frac{8}{81}\pi r^3$$

在密度为 ρ_2 的液体中的球缺体积为

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{8}{81}\pi r^3 = \frac{100}{81}\pi r^3$$



题 10.8 图

可得圆球的质量为

$$M = \frac{\pi r^3}{81}(8\rho_1 + 100\rho_2)$$

（2）由对称性可知，密度为 ρ_1 的液体对圆球的作用力向下.

（3）设想在 ρ_1 和 ρ_2 两层流体中的球冠和球缺是分开的，中间有密度为 ρ_1 的极薄一层液体. 这层液体对球冠和球缺的压力是相同的，为（对球冠压力向上，对球缺压力向下）

$$F = \pi[r^2-(r-d)^2]\rho_1 gh = \frac{5}{9}\pi r^2\rho_1 gh$$

设密度为 ρ_1 的液体对圆球的作用力为 F_1，有

$$F - F_1 = V_1\rho_1 g$$

设密度为 ρ_2 的液体对圆球的作用力为 F_2，有

$$F_2 - F = V_2\rho_2 g$$

解得

$$F_1 = F - V_1\rho_1 g = \frac{\pi r^2}{81}(45h-8r)\rho_1 g \qquad （方向向下）$$

$$F_2 = F + V_2\rho_2 g = \frac{5\pi r^2}{81}(9h\rho_1+20r\rho_2)g \qquad （方向向上）$$

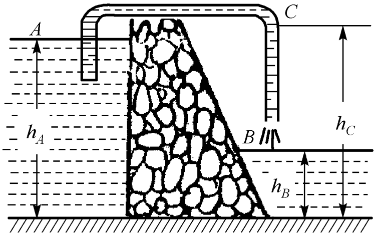
10.9　利用一根跨过水坝的粗细均匀的虹吸管，从水库里取水，如图所示，已知水库的水深 $h_A=2.00\text{m}$，虹吸管出水口的 $h_B=1.00\text{m}$，坝高 $h_C=2.50\text{m}$. 设水在虹吸管内作定常流动. （设大气压为 $p_0=1.00\times10^5\,\text{Pa}$）

（1）求 A、B、C 三个位置处管内的压强；

（2）若虹吸管的截面积为 $7.00\times10^{-4}\text{m}^2$，求水从虹吸管流出的体积流量.

解　由小孔流速公式得管内的流速

$$v=\sqrt{2g(h_A-h_B)}\approx 4.4\text{m/s}$$



题 10.9 图

（1）由伯努利方程 $p+\rho gz+\dfrac{1}{2}\rho v^2=$ 常量，得

$$p_A = p_0 - \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 - g(h_A-h_B) = 0.902\times10^5\,\text{Pa}$$

$$p_B = p_0 = 1.00\times10^5\,\text{Pa}$$

$$p_C = p_0 - g(h_C-h_A) - \frac{1}{2}\rho v^2 = 0.853\times10^5\,\text{Pa}$$

（2）体积流量为

$$7.00\times10^{-4}v = 7.00\times10^{-4}\times4.4 = 3.08\times10^{-3}(\text{m/s})$$

10.10　一个直立的密闭圆柱形容器，直径 1m、高 2m，内贮 0.5m 深的水，以 $\omega=20\text{rad/s}$ 的角速度绕中心轴线旋转，问容器底部有多少面积不为水覆盖？

解　如图 10.10a 所示，取相对于圆柱形容器静止的参考系，水除了有重力势能外还有离心势能，故伯努利方程修正为

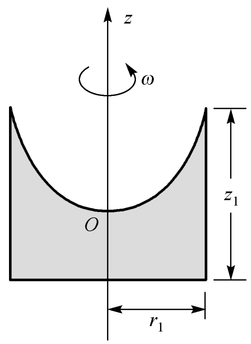


图 10.10a

$$p+\rho gz-\frac{1}{2}\rho\omega^2r^2+\frac{1}{2}\rho v^2=c$$

题设 $\omega=20$， $r_1=0.5$， $z_1=2$， $v=0$（水相对于容器静止）得

$$p=\frac{1}{2}\rho\omega^2r^2-\rho gz+c \qquad ①$$

若当

$$z=0 \text{ 时，} r=0 \text{ ，} p=p_0 \qquad ②$$

其中，p_0 是液体表面的压强，即大气压强，此时容器底部都有水覆盖. 将式②代入式①，得

$$c=p_0$$

最后求得液体内压强分布

$$p=\frac{1}{2}\rho\omega^2r^2-\rho gz+p_0$$

由于液体表面上任一点的压强为大气压强， $p=p_0$，于是得到液体表面的方程

$$z=\frac{\omega^2r^2}{2g} \qquad ③$$

式③为一旋转抛物面方程，但不是题设情况，因为当 $r=r_1$ 时，

$$z=\frac{\omega^2r_1^2}{2g}=\frac{20^2\times0.5^2}{2\times9.8}=5.1>z_1\text{，不合题意}$$

这是因为假设②不正确，实际情况应该是图 10.10b 情况：

$$\text{当 } z=0 \text{ 时，} r=r_0\text{，} p=p_0 \qquad ④$$

将式④代入式①，得

$$c=p_0-\frac{1}{2}\rho\omega^2r_0^2$$

代入式①得

$$p-p_0=\frac{1}{2}\rho\omega^2(r^2-r_0^2)-\rho gz$$

于是得到液体表面（ $p=p_0$ ）的方程

$$z=\frac{\omega^2(r^2-r_0^2)}{2g} \qquad ⑤$$

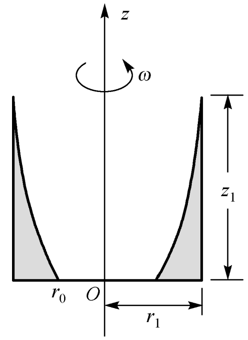


图 10.10b

将题设条件 $\omega=20$， $r=r_1=0.5$， $z=z_1=2$，水的体积 $V=0.5\pi r_1^2$，代入得

$$z_1=\frac{\omega^2(r_1^2-r_0^2)}{2g} \tag{⑥}$$

$$r_0^2=r_1^2-\frac{2gz}{\omega^2}=0.5^2-\frac{2\times9.8\times2}{20^2}=0.152(\mathrm{m}^2)$$

即容器底部不为水覆盖的面积为

$$A=\pi r_0^2=0.48\mathrm{m}^2$$

现在算算容器中有没有这么多水.

水的体积为

$$V=\int_{r_0}^{r_1}2\pi rz\mathrm{d}r=\int_{r_0}^{r_1}2\pi r\frac{\omega^2(r^2-r_0^2)}{2g}\mathrm{d}r=\frac{\pi\omega^2}{4g}(r_1^2-r_0^2)^2$$

将式⑥代入得

$$V=\frac{1}{2}z_1\pi(r_1^2-r_0^2)<0.5\pi r_1^2=V_1$$

且

$$\frac{V}{V_1}=z_1\left(1-\frac{r_0^2}{r_1^2}\right)=0.78$$

即有约 22%的水被甩出容器外，容器底部不为水覆盖的面积为 $A=0.48\mathrm{m}^2$.

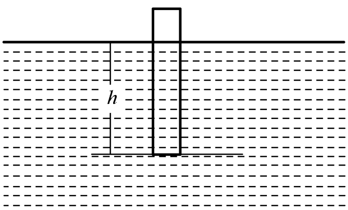
10.11　圆柱形木料的一端装有铅块，故木料能够竖直地浮在水中，如图所示. 设木料处于平衡时，浸没在水中的长度为 h，圆柱的底面积为 S，现使木料作竖直振动.

（1）求证振动为简谐振动；

（2）求振动周期（忽略水对木料振动的阻尼作用）.

解　（1）参见图 10.11a，取向下为坐标正向，木料的下端点为坐标原点，研究木料下端点的运动，设 t 时刻木料下端点在 x 位置. 木料受力为重力 P（设木料质量为 m）和浮力 F，分别为

$$P=mg,\qquad F=-(h+x)S\rho g\ （\rho\ 为水的密度）$$



题 10.11 图

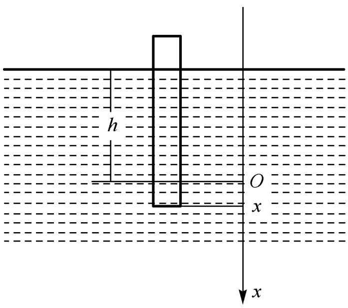


图 10.11a

由题设，当 $x=0$ 时木料平衡，解得

$$m = hS\rho \tag{①}$$

牛顿定律：

$$m\ddot{x} = F + P = mg - (h+x)S\rho g \tag{②}$$

将式①代入式②得

$$hS\rho\ddot{x} = -xS\rho g \tag{③}$$

该方程为简谐振动的方程.

（2）方程③的解为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

其中

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

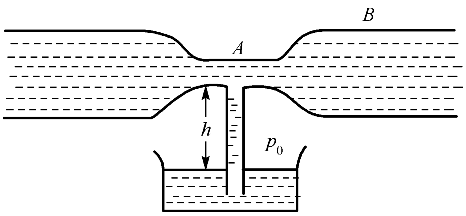
故振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

10.12　液体在一水平管中流动，A 处和 B 处的横截面积分别为 S_A 和 S_B. B 管口与大气相通，压强为 p_0，若在 A 处用一细管与容器相通，如图所示，试证明：当 h 满足下式

$$h = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{S_A^2} - \frac{1}{S_B^2}\right)$$

时，A 处的压强刚好能将比水平管低 h 处的同种液体吸上来，其中 Q 为体积流量.



题 10.12 图

证明　设液体中 A 处和 B 处的压强分别为 p_A 和 p_B，液体流速分别为 v_A 和 v_B，有

$$\text{题设：}\ v_A S_A = v_B S_B = Q \tag{①}$$

$$\text{伯努利方程：}\ p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \tag{②}$$

将式①代入式②得

$$p_A = p_B - \frac{1}{2}\rho Q^2\left(\frac{1}{S_A^2} - \frac{1}{S_B^2}\right) \quad ③$$

题设 $p_B = p_0$，故当

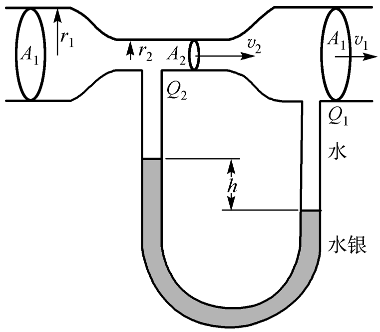
$$\frac{1}{2}\rho Q^2\left(\frac{1}{S_A^2} - \frac{1}{S_B^2}\right) = \rho g h \quad ④$$

时，A 处的压强刚好能将比水平管低 h 处的同种液体吸上来，式④即

$$h = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{S_A^2} - \frac{1}{S_B^2}\right)$$

证毕.

10.13　如图所示，一水平管下面装有一 U 形管，U 形管内盛有水银. 已知水平管中粗、细处的横截面积分别为：$A_1 = 5.0\times10^{-3}\mathrm{m}^2$，$A_2 = 1.0\times10^{-3}\mathrm{m}^2$，当水平管中有水流作定常流动时，测得 U 形管中水银面的高度差 $h = 3.0\times10^{-2}\mathrm{m}$. 求水流在粗管处的流速 v_1. 已知水和水银的密度分别为：$\rho = 1.0\times10^{-3}\mathrm{kg/m^3}$，$\rho' = 13.6\times10^{-3}\mathrm{kg/m^3}$.



题 10.13 图

解　设液体中 A_1 处和 A_2 处的压强分别为 p_1 和 p_2，液体流速分别为 v_1 和 v_2，有

题设：$v_1 A_1 = v_2 A_2$　①

伯努利方程：$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2$　②

题设

$$p_1 - p_2 = \rho' g h \quad ③$$

由式①～式③解得

$$v_1 = A_2\sqrt{\frac{2\rho' g h}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}} \approx 0.58\mathrm{m/s}$$

10.14　一喷泉竖直喷出高度为 H 的水流，喷泉的喷嘴具有上细下粗的形状，上截面的直径为 d，下截面的直径为 D，喷嘴高为 h. 设大气压强为 p_0. 求：

（1）水的体积流量；

（2）喷嘴的下截面处的压强.

解　（1）喷水速度 $v = \sqrt{2gH}$，体积流量 $Q = v\left(\frac{1}{4}\pi d^2\right) = \frac{1}{4}\pi d^2\sqrt{2gH}$.

（2）下截面和上截面之间的伯努利方程为

$$p_D + \frac{1}{2}\rho v_D^2 = p_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_d^2$$

$$v_d = v \text{，} \qquad v_D = v_d \frac{d^2}{D^2}$$

解得

$$p_D = p_0 + \rho g h + \rho g H\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$$

10.15　在一大容器的底部有一小孔，容器截面积与小孔面积之比为 100，容器内盛有高度 h =0.80m 的水. 求容器内水流完所需的时间.

解　设容器的半径为 R，小孔的半径为 r，当容器的水深为 x 时，小孔的水流速率为 $v = \sqrt{2gx}$ ，设容器的水面下降 dx 所需的时间为 dt，有

$$\pi r^2 v \mathrm{d}t = \pi R^2 \mathrm{d}x$$

即

$$\mathrm{d}t = \frac{R^2}{r^2\sqrt{2gx}}\mathrm{d}x$$

题设 $\frac{R^2}{r^2} = 100$ ，得容器内水流完所需的时间：

$$t = \int_0^h \frac{R^2}{r^2\sqrt{2gx}}\mathrm{d}x = \frac{R^2}{r^2}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 40.4\mathrm{s}$$

10.16　设有大小形状完全相同的两个水桶，其中盛有同样体积的不同液体. 在每个桶的侧面距液面下相同深度 h 处都开有一小孔，其中桶 1 小孔的面积为桶 2 小孔面积的一半.

（1）若在相同的时间内由两小孔流出液体的质量相同，则液体的密度比 ρ_1/ρ_2 是多少？

（2）从两小孔流出的体积流量之比是多少？

（3）两桶内液体的高度差为多少时，才能使两桶流出的体积流量相等？

解　题设桶 1 小孔的面积为桶 2 小孔面积的一半，即 $S_1/S_2 = 1/2$ ，且 $v_1 = v_2 = \sqrt{2gh}$.

（1）相同的时间内由两小孔流出液体的质量相同，即

$$v_1 S_1 \rho_1 = v_2 S_2 \rho_2 \text{，} \qquad \rho_1/\rho_2 = S_2/S_1 = 2$$

（2）

$$Q_1/Q_2 = v_1 S_1 / v_2 S_2 = 1/2$$

（3）当体积流量相等时，$v_1S_1 = v_2S_2$，且 $v_1 = \sqrt{2gh_1}$，$v_2 = \sqrt{2gh_2}$，有

$$h_1 / h_2 = S_2^2 / S_1^2 = 4$$

10.17　一桶的底部有一洞，水面距桶底 30cm，当桶以 1.2m/s^2 的加速度上升时，水自洞漏出的速度为多大？

解　题设桶的加速度 $a = 1.2\text{m/s}^2$，$h = 0.3\text{cm}$，若以桶为参考系，重力加速度变为 $g' = g + a$，水自洞漏出的速度为

$$v = \sqrt{2g'h} = \sqrt{2(g+a)h} = 2.57\text{m/s}$$

10.18　在重力作用下，某液体在半径为 R 的竖直圆管中向下作稳定流动，已知液体的密度为 ρ，测得从管口流出的流量为 Q，求液体的黏度及管轴处的流速.

解　如图 10.18a 所示，取一圆筒状流层作为研究对象，其长度为 l，端面细环内径为 r，外径为 $r + \mathrm{d}r$，则端面环面积为 $2\pi r\mathrm{d}r$，侧面积 $2\pi rl$，流层受三个力：重力 $\mathrm{d}f'$，端面压力 $\mathrm{d}F$ 和侧面黏性力 $\mathrm{d}f$，分别为

$$\mathrm{d}f' = g\mathrm{d}m = 2\pi rl\rho g\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}F = (p_1 - p_2)2\pi r\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}f = d\left(2\pi rl\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = 2\pi l\eta d\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)$$

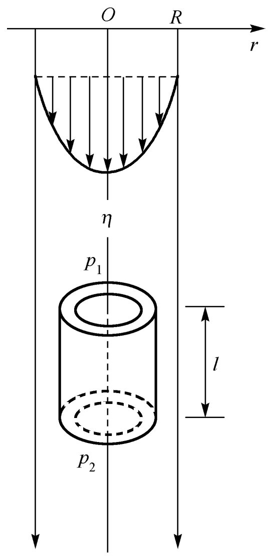


图 10.18a

流体作稳定流动，有 $\mathrm{d}f' + \mathrm{d}F + \mathrm{d}f = 0$，即

$$2\pi rl\rho g\mathrm{d}r + (p_1 - p_2)2\pi r\mathrm{d}r + 2\pi l\eta\mathrm{d}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

即

$$\mathrm{d}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{p_1 - p_2 + l\rho g}{l\eta}r\mathrm{d}r$$

积分得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{p_1 - p_2 + l\rho g}{2l\eta}r$$

解为

$$v(r) = -\frac{p_1 - p_2 + l\rho g}{4l\eta}r^2 + C$$

边界条件：

$$v(R) = 0$$

求得积分常数：

$$C = -\frac{p_1 - p_2 + l\rho g}{4l\eta}R^2$$

故流速分布为

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2 + l\rho g}{4l\eta}(R^2 - r^2) \tag{①}$$

体积流量：

$$Q = \int_0^R 2\pi v r \mathrm{d}r = \int_0^R \frac{p_1 - p_2 + l\rho g}{4l\eta}(R^2 - r^2) r\mathrm{d}r = \frac{\pi(p_1 - p_2 + l\rho g)}{2l\eta}\int_0^R (R^2 - r^2) r\mathrm{d}r$$

积分得

$$Q = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2 + l\rho g)}{8l\eta} = \frac{\pi R^4 \rho g}{8\eta} + \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8l\eta} \tag{②}$$

由于是稳定流动，Q 与 l 无关，故

$$p_1 = p_2 \tag{③}$$

由式②得 $Q = \dfrac{\pi R^4 \rho g}{8\eta}$，即

$$\eta = \frac{\pi R^4 \rho g}{8Q}$$

将式③代入式①得

$$v(0) = \frac{R^2 \rho g}{4\eta}$$

10.19　一个半径 $r = 0.10\times10^{-2}\,\mathrm{m}$ 的小空气泡在黏滞液体中上升，液体的黏滞系数 $\eta = 0.11\,\mathrm{Pa\cdot s}$，密度为 $0.72\times10^3\,\mathrm{kg/m^3}$．求其上升的收尾速度.

解　与浮力相比，小空气泡的重力可以忽略. 当它以收尾速度运动时浮力和摩擦力正好相等，有

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi r \eta v$$

题设

$$r = 0.10\times10^{-2}\,\mathrm{m},\qquad \eta = 0.11\,\mathrm{Pa\cdot s},\qquad \rho = 0.72\times10^3\,\mathrm{kg/m^3}$$

代入得

$$v = \frac{2r^2 \rho g}{9\eta} = 1.4\times10^{-2}\,\mathrm{m/s}$$

10.20　在直径为 305mm 的输油管内，安装了一个开口面积为原来面积 1/5 的

隔片. 管中的石油流量为 $0.07\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$，其运动黏度$\eta/\rho=0.0001\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. 石油经过隔片时是否变为湍流？

解　我们知道，当雷诺数大于 2000 时流动将变为湍流.

题设：输油管直径 $D=0.305\mathrm{m}$，运动黏度 $\nu=\eta/\rho=0.0001\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$，石油流量 $Q=0.07\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$，隔片开口面积

$$S=\frac{1}{5}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2=\frac{\pi D^2}{20}=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

其中，d 为隔片开口直径.

可以求得流速：

$$v=\frac{Q}{S}=\frac{20Q}{\pi D^2}$$

以上各量代入雷诺数的定义

$$Re=\frac{\rho v d}{\eta}=\frac{4\sqrt{5}Q}{\pi\nu D}\approx 6500$$

即石油经过隔片时变为了湍流.

第 11 章　相　对　论

11.1　一飞船以 $v=0.6c$ 的速率沿平行于地面的轨道飞行，飞船上沿运动方向放置一根杆子，在地面上的人测得此杆子的长度为 l，求此杆子的本征长度 l_0.

解　由题意 $l_0\cdot\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}=l$，所以

$$l_0=\frac{l}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\frac{l}{\sqrt{1-\left(\dfrac{0.6c}{c}\right)^2}}=1.25l$$

11.2　在一惯性系的同一地点，先后发生两个事件，其时间间隔为 0.2s，而在另一惯性系中测得此两事件的时间间隔为 0.3s，求两惯性系之间的相对运动速率.

解　$\Delta t'=\dfrac{\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$，即 $0.3=\dfrac{0.2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$，所以 $v=\dfrac{\sqrt{5}}{3}c$.

11.3　一火箭飞船经地球飞往某空间站，该空间站相对地球静止，与地球之间的距离为 $9.0\times10^9\,\text{m}$. 在地球上和空间站上的钟是校正同步的. 当火箭飞船飞经地球时，宇航员将飞船上的钟拨到与地球上的钟相同的示数. 当火箭飞船飞经空间站时，宇航员发现飞船上的钟比空间站上的钟慢了 3s，求火箭飞船的飞行速率.

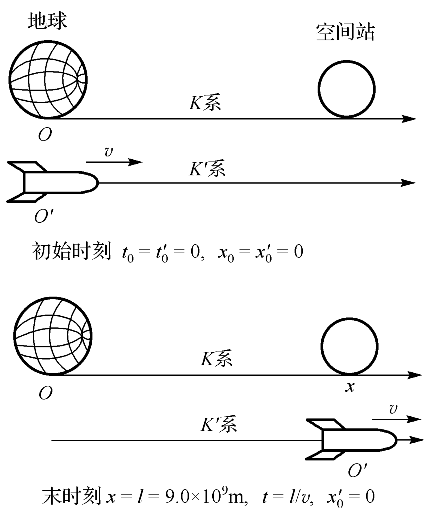


图 11.3a

解　如图 11.3a 所示，设地球参考系为 K 系，火箭飞船参考系为 K' 系.

题设初始时刻（对钟）：

（事件 A：(t_0,x_0)　(t'_0,x'_0)，火箭飞船经过地球）

$$t_0=t'_0=0,\quad x_0=x'_0=0 \qquad ①$$

末时刻：

（事件 B：(t,x)　(t',x')，火箭飞船经过空间站）

$$x = l = 9.0\times10^9\,\text{m},\quad t = l/v,\quad x' = 0 \qquad ②$$

$$t = t' + 3 \qquad ③$$

洛伦兹变换：

$$t' = \frac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad ④$$

由式②～式④解得

$$v = \frac{6l}{9+\dfrac{l^2}{c^2}} = 0.198c$$

11.4　静长为 L 的车厢，以 v 的恒定速率沿地面向右运动，自车厢的左端 A 发出一光信号，经右端 B 的镜面反射后回至 A 端.

（1）在车厢里的人看来，光信号经多少时间 $\Delta t_1'$ 到达 B 端？从 A 发出经 B 反射后回至 A，共需多少时间 $\Delta t'$？

（2）在地面上的人看来，光信号经多少时间 Δt_1 到达 B 端？从 A 发出经 B 反射后回至 A，共需多少时间 Δt？

解　设地面参考系为 K 系，车厢参考系为 K' 系. 题设：

事件 1：(t_1,x_1)　(t_1',x_1')，自车厢的左端 A 发出一光信号

$$t_1 = t_1' = 0,\quad x_1 = x_1' = 0 \qquad ①$$

事件 2：(t_2,x_2)　(t_2',x_2')，光信号到达车厢右端 B

$$t_2' = L/c,\quad x_2' = L \qquad ②$$

事件 3：(t_3,x_3)　(t_3',x_3')，光信号到达车厢右端 B

$$t_3' = t_2' + L/c = 2L/c,\quad x_3' = 0 \qquad ③$$

（1）在车厢里的人（K' 系）看来，光信号到达 B 端需时间为

$$\Delta t_1' = t_2' - t_1' = \frac{L}{c}$$

从 A 发出经 B 反射后回至 A 需时间为

$$\Delta t' = t_3' - t_1' = \frac{2L}{c}$$

（2）在地面上的人（K 系）看来，

$$t_2 = \frac{t_2' + \dfrac{v}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},\qquad t_3 = \frac{t_3' + \dfrac{v}{c^2}x_3'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad ④$$

将式②和式③代入式④得光信号到达 B 端需时间为

$$\Delta t_1 = t_2 - t_1 = \frac{L}{c}\sqrt{\frac{v+c}{c-v}}$$

从 A 发出经 B 反射后回至 A 需时间为

$$\Delta t = t_3 - t_1 = \frac{2L}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

11.5　一艘静长为 90m 的飞船以速度 $v = 0.8c$ 飞行. 当飞船的尾部经过地面上某信号站时，该信号站发出一光信号.

（1）当光信号到达飞船头部时，飞船头部离地面信号站的距离为多远？

（2）按地面上的时间，信号从信号站发出共需多少时间 Δt 才到达飞船头部？

解　设地面参考系为 K 系，飞船参考系（飞船向右飞行）为 K' 系. 题设：

事件 1：(t_1, x_1)　(t_1', x_1')，自地面信号站发出一光信号

$$t_1 = t_1' = 0,\quad x_1 = x_1' = 0$$

事件 2：(t_2, x_2)　(t_2', x_2')，光信号到达飞船头部

$$t_2' = L/c,\quad x_2' = L$$

题设：

$$L = 90\text{m}\,,\qquad v = 0.8c$$

洛伦兹变换：

$$x_2 = \frac{x_2' + vt_2'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = L\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = 270\text{m}\,,\qquad t_2 = \frac{t_2' + \dfrac{v}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{L}{c}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = 9\times10^{-7}\text{s}$$

11.6　两根静长均为 l_0 的棒 A、B，相向沿棒做匀速运动. A 棒上的观测者发现两棒的左端先重合，相隔时间 Δt 后，两棒的右端再重合. 试问：

（1）B 棒上的观测者看到两棒的端点以怎样的次序重合？

（2）两棒的相对速度是多大？

（3）对于看到两棒以大小相等、而方向相反的速度运动的观测者来说，两棒端点以怎样的次序重合？

解　（1）B 棒（向右运动）上的观测者看 A 棒长应小于 l_0，所以他看到两棒右端先重合，然后才左端再重合.

（2）$\Delta t = \dfrac{l_0 - l_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{v}$，解之得

$$v=\frac{2l_0\Delta t}{(\Delta t)^2+\frac{l_0^2}{c^2}}$$

（3）对于看到两棒以大小相等、方向相反的速度运动的观测者来说，两棒长均为

$$l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\quad (u\text{为两棒的相对速度})$$

所以两棒左右端点同时重合.

11.7　在某一惯性参考系 K 里看来，物体 A 以匀速 v_A 沿 x 轴运动，物体 B 以匀速 v_B 沿 x 轴运动，但方向与 A 相反.

（1）在参考系 K 看来，A 与 B 之间相对运动的速度 v 是多大？

（2）以 c 代表真空中的光速，当 $v_A=0.8c$，$v_B=0.6c$ 时，v 是多少？

（3）在同一惯性参考系 K 中看来，两个物体 A 与 B 之间相对运动的速度 $v>c$，是否违反狭义相对论？为什么？

（4）在 A 看来（即在随 A 一起运动的坐标系 K 里看来），B 的速度 v_B' 是多少？

解　（1）
$$v_{AB}=v_A+v_B$$

（2）
$$v=0.8c+0.6c=1.4c$$

（3）不违反. 狭义相对论只是说在任一惯性系中质点的运动速度不可以超过光速，两个物体 A 与 B 之间相对运动的速度 $v>c$，这个 v 并不是在 A 看来 B 的速度 v_B'，v_B' 是不可以超过光速的.

（4）$v_B'=\dfrac{v_A+v_B}{1+\dfrac{v_Av_B}{c^2}}=\dfrac{1.4c}{1.48}=0.95c$，并没有超过光速.

11.8　设有一车，以匀速率 $v_0=100\text{km/s}$ 做直线运动.

（1）在车上以速率 $v_1=60\text{km/s}$ 向前投一球，按伽利略变换计算，站在路边的观察者看来，球的速度是多少？

（2）在车上以速率 $v_1=60\text{km/s}$ 向后投一球，按伽利略变换计算，站在路边的观察者看来，球的速度是多少？

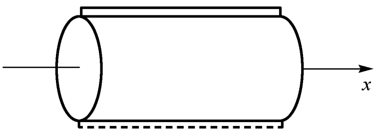
（3）对于上述两种情况，用狭义相对论的速度合成公式，分别求出结果.

解　（1）
$$u_1=v_0+v_1=160\text{km/s}$$

（2）
$$u_2=v_0-v_1=40\text{km/s}$$

（3）$u_1'=\dfrac{v_0+v_1}{1+\dfrac{v_0v_1}{c^2}}=\dfrac{160}{1+\dfrac{6000}{(3\times10^5)^2}}=159.999989(\text{km/s})$，$u_2'=\dfrac{v_0-v_1}{1-\dfrac{v_0v_1}{c^2}}=40.000003(\text{km/s})$

11.9　一根长杆与 x 轴平行，并以 x 轴为轴线作匀速转动. 设 K' 系为沿 x 轴做匀速 v 运动的坐标系，问在 K' 系中观测，这长杆将是什么样子？它怎样运动？



题 11.9 图

解　在原参考系 K 中，长杆只转动不平动. 设长杆转动的角速度为 ω.

则杆上任一点 P 的速度为 $\boldsymbol{u}=u_x\boldsymbol{i}+\boldsymbol{u}_\perp$，其中 $u_x=0$，$\boldsymbol{u}_\perp$ 为垂直于 x 轴的速度，大小为 $u_\perp=|\boldsymbol{u}_\perp|=\omega r$，$r$ 为 P 点到 x 轴的距离.

K' 系中观测，P 的速度为 $\boldsymbol{u}'=u'_x\boldsymbol{i}+\boldsymbol{u}'_\perp$，由相对论的速度变换公式可得

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-u_x\dfrac{v}{c^2}}=-v\,,\qquad \boldsymbol{u}'_\perp=\frac{u_\perp\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-u_x\dfrac{v}{c^2}}=u_\perp\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\omega r\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{①}$$

设在 K' 系中，长杆转动的角速度为 ω'，有

$$u'_\perp=|\boldsymbol{u}'_\perp|=\omega' r \tag{②}$$

由式①和式②可得

$$\omega'=\omega\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

即在 K' 系中，长杆以匀速 v 后退做螺旋运动，转速为原来的 $\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ 倍.

11.10　在实验室中观测到一个运动着的 μ 子在实验室坐标系中的寿命等于在它自己坐标系中的寿命的 50 倍，求它对于实验室坐标系运动的速度 v.

解　本征坐标系中的寿命 Δt 和实验室坐标系中的寿命 $\Delta t'$ 满足关系

$$\Delta t=\Delta t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

题设 $\dfrac{\Delta t'}{\Delta t}=50$，解得它对于实验室坐标系运动的速度为

$$v=c\sqrt{1-\left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2}\approx 0.9998c$$

11.11　爱因斯坦在他 1905 年创立狭义相对论的论文中说：“一个在地球赤道上的钟，比起放在两极的一只在性能上完全一样的钟来，在别的条件都相同的情况下，它要走得慢些”. 根据各种观测，地球从形成到现在约为 50 亿年，假定地球形成时，就有爱因斯坦所说的那样两个钟，问现在它们所指的时间相差多少？所得结果就是两极与赤道年龄之差. 已知地球半径为 6378km.

解　由于地球自转，赤道上的线速度为

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 6378000}{86400} = 463.82(\text{m/s})$$

每天赤道上的钟比放在两极的钟要慢

$$\Delta t = T_{极} - T_{赤} = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) \cdot 86400 = \frac{v^2}{2c^2} \cdot 86400 = 1.0326 \times 10^{-7}(\text{s})$$

现在它们所指的时间相差为

$$\Delta T = 1.0326 \times 10^{-7} \times 365 \times 50 \times 10^8 = 1.8845 \times 10^5(\text{s}) = 2.181(\text{d}) = 5.975 \times 10^{-3}(\text{a})$$

11.12　按上题同样的道理，一个在地球上的钟，要比一个性质完全相同、所处条件也完全相同、假设放在太阳上的钟略为走得慢些，设太阳年龄 $\tau = 50$ 亿年，已知地球公转的平均速率 $v = 29.76\text{km/s}$. 求地球与太阳年龄之差.

解　每日时间差为

$$\Delta t = \frac{v^2}{2c^2} \cdot 86400 = 4.25 \times 10^{-4}(\text{s})$$

现在它们所指的时间相差为

$$\Delta T_{日地} = 4.25 \times 10^{-4} \times 365 \times 50 \times 10^8 = 7.76 \times 10^8(\text{s}) = 24.6(\text{a})$$

11.13　按上题同样的道理，一个在月球上的钟，要比一个性质完全相同、所处条件也完全相同、放在地球上的钟略为走得慢些，设地球年龄为 $\tau = 50$ 亿年，月球绕地球转动的平均速率为 $v = 1.02\text{km/s}$. 求月球年龄与地球年龄之差.

解　$\Delta T_{月地} = \dfrac{v^2}{2c^2} \cdot 86400 \cdot 365 \cdot 50 \cdot 10^8 = 9.12 \times 10^5(\text{s}) = 10.55(\text{d}) = 2.89 \times 10^{-2}(\text{a})$

11.14　在 K' 系中，一光束在与 x' 轴成 θ_0 角的方向射出. 求在 K 系中光束与 x 轴所成的角 θ. K' 系以速度 v 沿 x 轴相对 K 系运动.

解

$$v'_x = c\cos\theta_0, \qquad v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \dfrac{vv'_x}{c^2}} = \frac{c\cos\theta_0 + v}{1 + \dfrac{v\cos\theta_0}{c}}$$

所以

$$\cos\theta = \frac{v_x}{c} = \frac{c\cos\theta_0 + v}{c + v\cos\theta_0}$$

11.15　一粒子的动能等于静能的一半，试求其运动速度.

解

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = E_0 + E_k = \frac{3}{2}E_0 = \frac{3}{2}m_0 c^2$$

解得

$$v = \frac{\sqrt{5}}{3}c = 2.2\times 10^8\,\mathrm{m/s}$$

11.16　一个质点，受力作用，力的方向和它的运动方向一致.

（1）用动量关系 $F = \mathrm{d}(mv)/\mathrm{d}t$ 证明 $F\mathrm{d}s = mv\mathrm{d}v + v^2\mathrm{d}m$；

（2）利用关系式 $v^2 = \left(1-\dfrac{m_0^2}{m^2}\right)c^2$ 证明 $mv\mathrm{d}v = \dfrac{m_0^2c^2}{m^2}\mathrm{d}m$；

（3）利用上面两个结果证明：$W = \int F\mathrm{d}s = (m-m_0)c^2$.

解　（1）因为 $F = \dfrac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}$，所以

$$F\mathrm{d}s = F\cdot v\cdot \mathrm{d}t = v\cdot \mathrm{d}(mv) = mv\mathrm{d}v + v^2\mathrm{d}m$$

（2）因为 $v^2 = \left(1-\dfrac{m_0^2}{m^2}\right)c^2$，两边同时求导得

$$2v\mathrm{d}v = \frac{2m_0^2c^2}{m^3}\mathrm{d}m$$

所以

$$mv\mathrm{d}v = \frac{m_0^2c^2}{m^2}\mathrm{d}m$$

（3）
$$W = \int F\mathrm{d}s = \int_{m_0}^{m(v)}\left(\frac{m_0^2c^2}{m^2} + v^2\right)\mathrm{d}m$$

由 $m^2c^4 = E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$，得

$$m_0^2c^2 + m^2v^2 = m^2c^2$$

代入上式得

$$W = \int_{m_0}^{m(v)} c^2\mathrm{d}m = (m-m_0)c^2$$

11.17　一个电子（静止质量为 $9.11\times 10^{-31}\mathrm{kg}$）以 $0.99c$ 的速率运动. 试问：

（1）它的总能量为多少？

（2）按牛顿力学算出的动能和按相对论力学算出的动能各为多少？它们的比值是多少？

解　（1）它的总能量为

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}c^2 = 5.81\times 10^{-13}\,\mathrm{J}$$

（2）牛顿力学：

$$E_k(牛)=\frac{1}{2}m_0v^2=4.02\times10^{-14}\,\mathrm{J}$$

相对论力学：

$$E_k(相)=(m-m_0)c^2=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)=4.99\times10^{-13}\,\mathrm{J}$$

所以

$$\frac{E_k(牛)}{E_k(相)}=0.08$$

11.18　已知电子的静止质量为 $9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$，$1.0\mathrm{eV}=1.60\times10^{-19}\,\mathrm{J}$，问电子的动能为：

（1）100000eV；

（2）1000000eV 时，它的速度各是多少？

解

$$E=E_k+m_0c^2=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c^2$$

所以

$$v=c\cdot\sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\frac{E_k}{m_0c^2}\right)^2}}$$

（1）题设 $m_0=9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$，$E_k=10^5\times1.60\times10^{-19}=1.60\times10^{-14}(\mathrm{J})$，得

$$v_1=1.64\times10^8\,\mathrm{m/s}$$

（2）题设 $m_0=9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$，$E_k=10^6\times1.60\times10^{-19}=1.60\times10^{-13}(\mathrm{J})$，得

$$v_2=2.82\times10^8\,\mathrm{m/s}$$

11.19　一个物体的静止质量为 10g. 问：

（1）当它相对于观察者以 $3.0\times10^7\,\mathrm{m/s}$ 的速率运动时，其质量是多少，以 $2.7\times10^8\,\mathrm{m/s}$ 的速率运动时，质量又是多少？

（2）比较上述两种情况下牛顿力学和相对论力学的动能.

（3）如果观察者或测量仪器随着物体一起运动，则结果如何？

解　（1）当 $v_1=3.0\times10^7\,\mathrm{m/s}$ 时，质量为

$$m_1=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}=\frac{10}{\sqrt{1-\left(\frac{3\times10^7}{3\times10^8}\right)^2}}=10.05(\mathrm{g})$$

当 $v_2 = 2.7\times10^8\,\mathrm{m/s}$ 时，质量为

$$m_2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{10}{\sqrt{1-\left(\frac{2.7\times10^8}{3\times10^8}\right)^2}} = 22.94(\mathrm{g})$$

（2）当 $v_1 = 3.0\times10^7\,\mathrm{m/s}$ 时，

$$E_{k1}(\text{牛}) = \frac{1}{2}m_0v_1^2 = 4.5\times10^{12}\,\mathrm{J}$$

$$E_{k1}(\text{相}) = (m-m_0)c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}-1\right) = 4.53\times10^{12}\,\mathrm{J}$$

所以

$$\frac{E_{k1}(\text{牛})}{E_{k1}(\text{相})} \approx 1$$

当 $v_2 = 2.7\times10^8\,\mathrm{m/s}$ 时，

$$E_{k2}(\text{牛}) = \frac{1}{2}m_0v_2^2 = 3.65\times10^{14}\,\mathrm{J}$$

$$E_{k2}(\text{相}) = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}}-1\right) = 1.16\times10^{15}\,\mathrm{J}$$

所以

$$\frac{E_{k2}(\text{牛})}{E_{k2}(\text{相})} = 0.3$$

（3）如果观察者或测量仪器随着物体一起运动，则无相对论效应.

11.20　假设一个火箭飞船的静质量为 8000kg，从地球飞向金星，速率为 30km/s. 估算一下，如果用非相对论公式 $E_k = m_0v^2/2$ 计算它的动能，则少算了多少焦耳？用这能量，能将飞船从地面升高多少？

解　动能少算了

$$\Delta E_k = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-m_0\right)c^2 - \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} = 2.7\times10^4\,\mathrm{J}$$

用这能量，能将飞船从地面升高

$$\Delta h = \frac{\Delta E_k}{mg} \approx 0.34\mathrm{m}$$

11.21　一质量数为 42 的静止粒子，蜕变成两个碎片，其中一个碎片的静质量

为 20，以速度 $0.6c$ 运动. 求另一碎片的动量 p 、能量 E 、静质量 m_0 （1 原子质量单位 $=1.66\times10^{-27}$ kg ）.

解　由动量守恒

$$p=\frac{20\times1.66\times10^{-27}}{\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}}\times0.6c=7.47\times10^{-18}(\text{kg}\cdot\text{m/s})$$

由能量守恒

$$E=42\times1.66\times10^{-27}\cdot c^2-\frac{20\times1.66\times10^{-27}}{\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}}c^2=2.54\times10^{-9}(\text{J})$$

又 $E^2=m_0^2c^4+p^2c^2$ ，所以

$$m_0=\frac{\sqrt{E^2-p^2c^2}}{c^2}=1.34\times10^{-26}\text{kg}=8\text{个质量数}$$

11.22　^{235}U 原子核裂变时，约有千分之一的质量转化为能量，每千克好煤燃烧时，约放出 7000cal 的能量. 问 1kg ^{235}U 裂变放出的能量，相当于燃烧多少吨好煤放出的能量？

解　1kg ^{235}U 裂变放出的能量即为 1/1000kg 质量转化为能量

$$E=m_0c^2=\frac{1}{1000}\times(3\times10^8)^2=9\times10^{13}(\text{J})$$

相当于燃烧好煤的质量

$$m=\frac{E}{7000\times4.2}=3.07\times10^9(\text{kg})=3.07\times10^6(\text{t})$$

11.23　在铀的裂变中，裂变产物的静质量仅为裂变前静质量的 99.9% ，设所失去的质量都转变为能量，设 1kg 铀裂变产生的全部能量都能转变为电能，问

（1）可得多少度电？

（2）某工厂每年消耗的电能为 $5.63\times10^7\,\text{W}\cdot\text{h}$ ，如果这些电能完全是由质量转化而成，问这工厂一年消耗了多少千克的铀？

解　（1） $E=\dfrac{1}{1000}\times(3\times10^8)^2=9\times10^{13}(\text{J})=2.5\times10^7(\text{kW}\cdot\text{h})$ ，即可得 2.5×10^7 度电.

（2）题设 $E_1=5.63\times10^7\,\text{W}\cdot\text{h}$ ，需要铀

$$\frac{E_1}{E}=\frac{5.63\times10^7\,\text{W}\cdot\text{h}}{2.5\times10^7\,\text{kW}\cdot\text{h}}=2.25\times10^{-3}\text{kg}$$

11.24　已知四个氢原子核（质子）结合成一个氦原子核（ α 粒子）时，有 5.0×10^{-29}kg 的质量转化为能量. 试计算一千克水里的氢原子核都结合成氦原子核时所放出的能量. 这些能量能把多少水从 0℃加热到 100℃（氢核质量为 1.0081 原子质量单位，1 原子质量单位 $=1.66\times10^{-27}$ kg ）.

解
$$N_A = \frac{1\text{g}}{1\text{原子质量单位}} = \frac{10^{-3}}{1.66\times10^{-27}} \approx 6\times10^{23}$$

1kg 水中有氢原子个数：

$$N = \frac{1000}{18}\cdot N_A \times 2 = 6.67\times10^{25}$$

1kg 水里的氢原子核都结合成氦原子核时所放出的能量：

$$E = \frac{N}{4}\times5.0\times10^{-29}\times c^2 = 7.5\times10^{13}(\text{J})$$

这些能量能把水从 0℃加热到 100℃时水的质量：

$$m = \frac{E}{c(T_1 - T_0)} = \frac{7.5\times10^{13}}{4.2\times100} = 1.78\times10^{11}(\text{g}) = 1.78\times10^{5}(\text{t})$$

11.25　一个α粒子（质量为$0.67\times10^{-26}\text{kg}$）以速率 $0.8c$ 进入水泥防护墙（c 为真空中光速），墙厚 0.35m，这粒子从墙的另一面出来时速率减小为 $5c/13$.

（1）求墙作用于粒子的减速力（设为常数）F_0 的大小.

（2）粒子穿过墙需要多长时间？

解　（1）题设：$v_0 = 0.8c$，$v_1 = 5c/13$，$m_0 = 0.67\times10^{-26}\text{kg}$，$s = 0.35\text{m}$.

墙作用于粒子的减速力所做的功：

$$F_0\cdot s = \Delta E = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}c^2 - \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{0.6} - \frac{13}{12}\right)$$

解得

$$F_0 = 1\times10^{-9}\,\text{N}$$

（2）由动量定理

$$F_0\text{d}t = \text{d}(mv)$$

所以

$$t = \frac{1}{F_0}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}v_0 - \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}v_1\right) \approx 2\times10^{-9}\text{s} = 2\text{ns}$$

即粒子穿过墙需要 2ns.

11.26　静止的电子偶（即一个电子和一个正电子）湮没时产生两个光子，如果其中一个光子再与另一个静止电子碰撞，求它能给予这电子的最大速度.

解　设电子静质量为 m_0，所以电子偶湮没时产生的光子能量为 m_0c^2，动量为 m_0c.

光子与静止电子碰撞后，沿原路弹回电子获得的速度最大，设为 v，此时光子反弹的动量设为 p，由动量守恒和能量守恒得

$$\begin{cases}\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}v-p=m_0c\\[2ex]\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}c^2+pc=2m_0c^2\end{cases}$$

解得

$$v=0.8c$$

11.27　设有一宇宙飞船完全通过发射光子而获得加速. 当该宇宙飞船从静止开始加速至 $v=0.6c$ 时，其静质量为初始值的几分之几？

解　设宇宙飞船原静质量为 m_0，发射的光子的总动量为 p，末态飞船的静质量为 m_0'.

在最初的参考系中，列出能量守恒和动量守恒方程：

$$\begin{cases}m_0c^2=\dfrac{m_0'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}c^2+pc\\[2ex]\dfrac{m_0'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}v=p\end{cases}$$

解得

$$\frac{m_0'}{m_0}=\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}=0.5$$

11.28　半人马座 α 星与地球相距 4.3 l.y.. 两个孪生兄弟中的一个 A 乘坐速度为 $0.8c$ 的宇宙飞船去该星旅行，他在往程和返程途中每隔 0.01a 的时间（飞船静止参考系的时间）发出一个无线电信号，另一个留在地球上的孪生兄弟 B，也在相应过程中每隔 0.01a 的时间（地球静止参考系的时间）发出一个无线电信号.

（1）在 A 到达该星以前，B 收到多少个 A 发出的信号?

（2）在 A 到达该星以前，A 收到多少个 B 发出的信号？

（3）A 和 B 各自共收到多少个从对方发出的信号？

（4）当 A 返回地球时，A 比 B 年轻了几岁？试证明两孪生兄弟都同意此观点.

解　设地球参考系为 K 系，飞船参考系为 K' 系.

（1）地球参考系中 B 的观点（参见图 11.28a）：

$t=t'=0$ 时，飞船在地球处，α 星距地球 4.3 l.y.，即 $x=4.3c$，飞船速度 $v=0.8c$，飞船到达 α 星需时间

$$T = x/v = 4.3c/0.8c = 5.375\text{a}$$

设 A 到达 α 星时，B 在地球参考系看来，恰好收到 A 在 M 点发出的信号，有

$$\frac{\overline{OM}}{c} = \frac{x - \overline{OM}}{v}$$

解得

$$\overline{OM} = \frac{cx}{c+v} = 2.389c$$

即在地球参考系看，飞船到达 M 点的时刻为

$$t = \frac{\overline{OM}}{0.8c} = \frac{2.389c}{0.8c} = 2.986\text{a}$$

而此时飞船参考系（K' 系）中时刻为

$$t' = \frac{t - \dfrac{v}{c^2}\cdot\overline{OM}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{2.989 - 0.8\times 2.389}{\sqrt{1-0.8^2}} = 1.796(\text{a})$$

由于飞船上的 A 每隔 0.01a 的时间（飞船参考系的时间）发出一个无线电信号，所以在 A 到达 α 星前，B 收到 A 发出的信号 179 个.

（2）飞船参考系中 A 的观点（参见图 11.28b）：

飞船不动，地球参考系（K 系）以速率 $v = 0.8c$ 向左运动，$t = t' = 0$ 时，地球在飞船处，由于地球参考系在运动，故 α 星与地球的距离发生洛伦兹收缩，为

$$x' = x\sqrt{1 - v^2/c^2} = 2.58\text{l.y.}$$

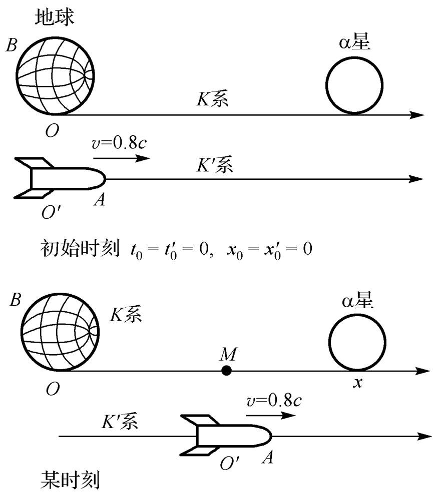


图 11.28a

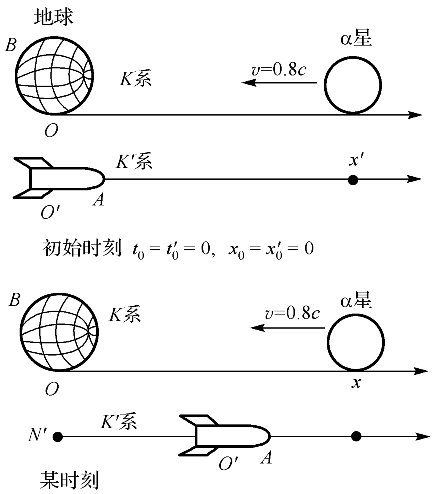


图 11.28b

α星到达飞船需时间

$$T' = x'/v = \left(x\sqrt{1-v^2/c^2}\right)/v = 4.3c\times0.6/0.8c = 3.225\text{a}$$

设α星到达A时，A在飞船参考系看来，恰好收到B在到达N'点发出的信号，有

$$\frac{\overline{O'N'}}{c} = \frac{x'-\overline{O'N'}}{v}$$

解得

$$\overline{O'N'} = \frac{cx'}{c+v} = \frac{cx\sqrt{1-v^2/c^2}}{c+v} = 1.4334c$$

即N'点在飞船参考系的坐标为$N' = -1.4334c$.

在飞船参考系看，B在到达N'点的时刻为

$$t' = \frac{\overline{O'N'}}{0.8c} = \frac{1.4334c}{0.8c} = 1.7918\text{a}$$

该事件（B在到达N'点）为：K'系(t',N')、K系$(t,0)$，由洛伦兹变换得

$$t = \frac{t'+\dfrac{N'v}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{1.7918-1.4334\times0.8}{\sqrt{1-0.8^2}} = 1.0751(\text{a})$$

由于地球上的B每隔0.01a的时间（地球参考系的时间）发出一个无线电信号，所以在A到达α星前，A收到B发出的信号107个.

（3）在地球参考系看：

飞船往返共耗时$t = \dfrac{4.3\times2}{0.8} = 10.75(\text{a})$，所以地球上的钟走了10.75a，地球上的$B$共发出信号107个. 当飞船返回地球时飞船上的$A$共收到信号1075个.

而飞船上的时钟由于相对论延缓，耗时

$$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 10.75\sqrt{1-0.8^2} = 6.45(\text{a})$$

飞船上的A共发出信号645个. 当飞船返回地球时，地球上的B共收到信号645个.

（4）在地球参考系看：当飞船返回地球时，飞船上的A比地球上的B年轻$10.75-6.45=4.3$（岁）.

在飞船参考系看（参见图11.28c）：

飞船飞离地球时，飞船参考系（K'系）时间为$t'=0\text{a}$，但飞船参考系认为地球参考系是向左运动的，因而K系中各点的时间是不同的，地球上的时间是$t=0\text{a}$，但α星的时间是（$x' = x\sqrt{1-v^2/c^2} = 2.58\text{l.y.}$）

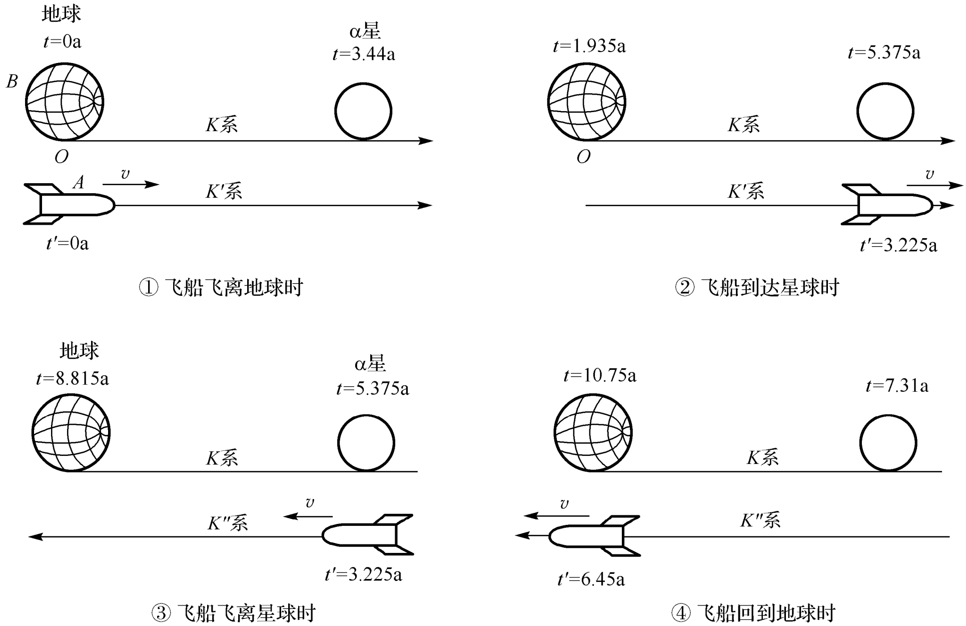


图 11.28c　飞船参考系各时刻看地球参考系的时间

$$t=\frac{t'+\dfrac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\frac{0+2.58\times0.8}{\sqrt{1-0.8^2}}=3.44(\text{a})$$

飞船到达α星需时间

$$\Delta t'=x'/v=2.58c/0.8c=3.225\text{a}$$

故飞船到达α星时，K' 系时间为 $t'=3.225\text{a}$，但地球参考系（K 系）相对于 K' 系运动，因而

$$\Delta t=\Delta t'\sqrt{1-v^2/c^2}=3.225\times0.6=1.935(\text{a})$$

故地球上的时间是 1.935a，α星的时间是 $3.44+1.935=5.375(\text{a})$.

飞船在α星减速、停止、调头加速至 $v=0.8c$ 的过程所需时间假设可以忽略，相当于飞船驾驶员瞬时从 K' 系跳到 K'' 系，此时 K'' 系时间为 $t''=t'=3.225\text{a}$，但飞船参考系认为地球参考系是向右运动的，因而 K 系中各点的时间是不同的，α星的时间为 $t=5.375\text{a}$，地球上的时间是 $5.375+3.44=8.815(\text{a})$.

飞船回到地球需时间 $\Delta t''=3.225\text{a}$，K'' 系时间为 $t''=3.225+3.225=6.45(\text{a})$，但地球参考系（$K$ 系）相对于 K'' 系运动，因而 $\Delta t=\Delta t''\sqrt{1-v^2/c^2}=3.225\times0.6=1.935(\text{a})$，故地球上的时间是 $8.815+1.935=10.75(\text{a})$，α星的时间是 $5.375+1.935=7.31(\text{a})$.

因而仍然有结论：当飞船返回地球时，飞船上的 A 比地球上的 B 年轻 $10.75-6.45=4.3$（岁）.

《力学与理论力学（下册）（第二版）》

习题解答

第 1 章　拉格朗日方程

1.1　对完整约束、非完整约束、定常约束、非定常约束、单侧约束和双侧约束六种约束形式各举一个例子.

解　① 完整约束：$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$，$R$ 为常数；

② 非完整约束：$z\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=0$；

③ 定常约束：$x^2+y^2+z^2=R^2$，R 为常数；

④ 非定常约束：$x^2+y^2+z^2=R(t)^2$，$R(t)$为与时间有关的正数；

⑤ 单侧约束：$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\leqslant l^2$，$l$ 为常数；

⑥ 双侧约束：$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=l^2$，$l$ 为常数.

1.2　半径为 r 的小球在内半径为 R 的固定球壳内作无滑动的滚动，球心不必保持在同一竖直平面内. 求小球的自由度及其球心的直角坐标所满足的约束关系.

解　球壳约束下小球平动的自由度为 2，小球滚动的自由度为 2，纯滚动约束减少一个自由度，所以体系总自由度=2+2−1= 3.

设球壳球心坐标为（0, 0, 0），小球球心为（x, y, z），则小球球心满足约束

$$x^2+y^2+z^2=(R-r)^2$$

1.3　半径为 R 的匀质半球在水平面上作无滑动的摆动，质心保持在同一竖直平面内. 求此半球的自由度及其质心的直角坐标所满足的约束关系.

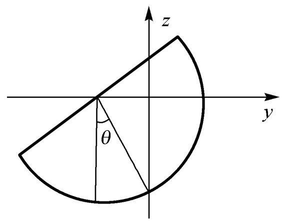


图 1.3a

解　体系的自由度为 1.

如图 1.3a 所示，设半球质心保持在 yz 面内，平衡时底面大圆在 xy 面内，质心在（0, 0, a）. 则

$$a=\frac{\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=\frac{\int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi r\cos\theta}{\int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi}=-\frac{\pi}{4}R^4\Big/\frac{2}{3}\pi R^3=-\frac{3}{8}R$$

半球产生摆动时，与地面的接触点发生变化，设对应的摆角为θ，则转动θ的过程中，球心始终位于 y 轴，接触点走过的距离为 $R\theta$. 故

$$y=R\theta-\frac{3}{8}R\sin\theta,\quad z=-\frac{3}{8}R\cos\theta$$

1.4　验证式（1.1.14）为不完整约束.

证明　式（1.1.14）为 $\mathrm{d}x\sin\theta-\mathrm{d}y\cos\theta=0$，故 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_\theta)=(\sin\theta,-\cos\theta,0)$，将之代入式（1.1.16）得

$$\boldsymbol{F}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F})=\begin{vmatrix}\sin\theta & -\cos\theta & 0\\ \partial_x & \partial_y & \partial_\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta & 0\end{vmatrix}=-\sin^2\theta-\cos^2\theta=-1\neq 0$$

所以该微分约束不可积，为非完整约束.

1.5　质量为 $2m$ 的质点 A 和质量为 m 的质点 B 由长为 l 的无质量杆相连，质点 A 限制在水平的 x 轴上运动，质点 B 只能沿铅直的 y 轴运动. 给出 A 点横坐标和 B 点纵坐标间的约束关系，并用达朗贝尔原理求运动方程.

解　设 A 和 B 的坐标分别为$(x_A, 0)$，$(y_B, 0)$，则满足约束关系

$$x_A^2+y_B^2=l^2$$

A 和 B 受到的主动力分别是

$$\boldsymbol{F}_1=-2mg\boldsymbol{e}_y,\quad \boldsymbol{F}_2=-mg\boldsymbol{e}_y$$

A 和 B 受到的惯性力分别是

$$-m_A\ddot{\boldsymbol{r}}_A=-2m\ddot{x}_A\boldsymbol{e}_x,\quad -m_B\ddot{\boldsymbol{r}}_B=-m\ddot{y}_B\boldsymbol{e}_y$$

A 和 B 的虚位移为

$$\delta\boldsymbol{r}_A=\delta x_A\boldsymbol{e}_x,\quad \delta\boldsymbol{r}_B=\delta y_B\boldsymbol{e}_y$$

代入达朗贝尔方程得

$$(-2mg\boldsymbol{e}_y-2m\ddot{x}_A\boldsymbol{e}_x)\cdot\delta x_A\boldsymbol{e}_x+(-mg\boldsymbol{e}_y-m\ddot{y}_B\boldsymbol{e}_y)\cdot\delta y_B\boldsymbol{e}_y=0$$

即

$$2\ddot{x}_A\delta x_A+(g+\ddot{y}_B)\delta y_B=0$$

上式两边乘以 y_B，代入由约束关系导出的 $x_A\delta x_A+y_B\delta y_B=0$，即可得到

$$2\ddot{x}_A y_B-x_A\ddot{y}_B-x_A g=0$$

1.6　用达朗贝尔原理求双摆的运动方程，设两个摆具有相同的摆长及摆锤质量.

解法一　建立直角坐标系，其中 y 方向竖直向下，A 和 B 的摆角分别为θ_1 和θ_2，摆长为 l，摆锤质量为 m.

A 和 B 受到的主动力分别是

$$\boldsymbol{F}_A=mg\boldsymbol{e}_y,\quad \boldsymbol{F}_B=mg\boldsymbol{e}_y$$

A 和 B 受到的惯性力分别是

$$-m\ddot{\boldsymbol{r}}_A=-m(\ddot{x}_A\boldsymbol{e}_x+\ddot{y}_A\boldsymbol{e}_y),\quad -m\ddot{\boldsymbol{r}}_B=-m(\ddot{x}_B\boldsymbol{e}_x+\ddot{y}_B\boldsymbol{e}_y)$$

其中，A 和 B 的坐标为 $(l\sin\theta_1, l\cos\theta_1)$，$(l\sin\theta_1 + l\sin\theta_2, l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2)$，

$$\begin{cases}\delta x_A = l\cos\theta_1\delta\theta_1 \\ \delta y_A = -l\sin\theta_1\delta\theta_1\end{cases},\quad \begin{cases}\delta x_B = l\cos\theta_1\delta\theta_1 + l\cos\theta_2\delta\theta_2 \\ \delta y_B = -l\sin\theta_1\delta\theta_1 - l\sin\theta_2\delta\theta_2\end{cases} \tag{①}$$

$$\ddot{x}_A = l(\cos\theta_1\cdot\ddot{\theta}_1 - \sin\theta_1\cdot\dot{\theta}_1^2),\quad \ddot{y}_A = -l(\cos\theta_1\cdot\dot{\theta}_1^2 + \sin\theta_1\cdot\ddot{\theta}_1)$$

$$-m\ddot{\boldsymbol{r}}_A = -m(\ddot{x}_A\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}_A\boldsymbol{e}_y),\quad -m\ddot{\boldsymbol{r}}_B = -m(\ddot{x}_B\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}_B\boldsymbol{e}_y)$$

代入达朗贝尔方程

$$[mg\boldsymbol{e}_y - m(\ddot{x}_A\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}_A\boldsymbol{e}_y)]\cdot(\delta x_A\boldsymbol{e}_x + \delta y_A\boldsymbol{e}_y)$$
$$+[mg\boldsymbol{e}_y - m(\ddot{x}_B\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}_B\boldsymbol{e}_y)]\cdot(\delta x_B\boldsymbol{e}_x + \delta y_B\boldsymbol{e}_y) = 0$$
$$\Rightarrow -\ddot{x}_A\delta x_A + (g - \ddot{y}_A)\delta y_A - \ddot{x}_B\delta x_B + (g - \ddot{y}_B)\delta y_B = 0$$

把式①代入上面方程，由于 $\delta\theta_1$，$\delta\theta_2$ 相互独立，可得

$$\begin{cases}2g\sin\theta_1 + 2l\ddot{\theta}_1 + l\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_2 + l\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2^2 = 0 \\ g\sin\theta_1 + l\ddot{\theta}_2 + l\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_1 + l\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1^2 = 0\end{cases}$$

解法二　在极坐标下求解

$$\boldsymbol{r}_1 = l\boldsymbol{e}_{r_1},\quad \boldsymbol{r}_2 = l\boldsymbol{e}_{r_1} + l\boldsymbol{e}_{r_2}$$

注意到 $\delta\boldsymbol{e}_r = \delta\theta\boldsymbol{e}_\theta, \dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta, \dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$，可得

$$\begin{cases}\delta\boldsymbol{r}_1 = l\boldsymbol{e}_{\theta_1}\cdot\delta\theta_1 \\ \delta\boldsymbol{r}_2 = l\boldsymbol{e}_{\theta_1}\cdot\delta\theta_1 + l\boldsymbol{e}_{\theta_2}\cdot\delta\theta_2\end{cases},\quad \begin{cases}\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = l\ddot{\theta}_1\boldsymbol{e}_{\theta_1} - l\dot{\theta}_1^2\boldsymbol{e}_{r_1} \\ \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = l\ddot{\theta}_1\boldsymbol{e}_{\theta_1} - l\dot{\theta}_1^2\boldsymbol{e}_{r_1} + l\ddot{\theta}_2\boldsymbol{e}_{\theta_2} - l\dot{\theta}_2^2\boldsymbol{e}_{r_2}\end{cases}$$

主动力为

$$\boldsymbol{F}_1 = mg\boldsymbol{e}_y,\quad \boldsymbol{F}_2 = mg\boldsymbol{e}_y$$

代入达朗贝尔方程 $(\boldsymbol{F}_1 - m\ddot{\boldsymbol{r}}_1)\cdot\delta\boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{F}_2 - m\ddot{\boldsymbol{r}}_2)\cdot\delta\boldsymbol{r}_2 = 0$ 中，考虑到关系式

$$\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta,\quad \boldsymbol{e}_{\theta_1}\cdot\boldsymbol{e}_{\theta_2} = \cos(\theta_1-\theta_2),\quad \boldsymbol{e}_{\theta_1}\cdot\boldsymbol{e}_{r_2} = \sin(\theta_2-\theta_1)$$

则可得到与解一同样的答案.

1.7　质量为 m 的质点可在半径为 R 的固定金属圆环上无摩擦地滑动，而圆环位于铅直平面内. 设质点坐标为 (x, y)，极角为 θ，证明质点的运动方程 $y\ddot{x} + x\ddot{y} - gx = 0$ 和 $R\ddot{\theta} + g\cos\theta = 0$ 是等价的.

证明　由 $x = R\cos\theta$，$y = R\sin\theta$ 得到

$$\dot{x} = -R\sin\theta\dot{\theta},\quad \ddot{x} = -R(\cos\theta\dot{\theta}^2 + \sin\theta\ddot{\theta}),\quad \dot{y} = R\cos\theta\dot{\theta},\quad \ddot{y} = R(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2)$$

代入 $\ddot{x}y + \ddot{y}x - gx = 0$ 中，得到

$$-R(\cos\theta\dot{\theta}^2 + \sin\theta\ddot{\theta})R\sin\theta - R(-\sin\theta\dot{\theta}^2 + \cos\theta\ddot{\theta})R\cos\theta - gR\cos\theta = 0$$

化简得 $R\ddot{\theta} + g\cos\theta = 0$，以上各步均可逆.

1.8　长为 l、质量为 m 的均匀细直棒，其上端固定，棒与铅直方向成θ角进行匀速转动，试用达朗贝尔原理求转动周期.

解　以固定的上端为原点，以竖直向下为 z 轴方向建立柱坐标系，以θ和方位角φ为广义坐标，棒上某质点的位矢

$$\boldsymbol{r}_i = r_i\cos\theta\boldsymbol{e}_z + r_i\sin\theta\boldsymbol{e}_r, \qquad \ddot{\boldsymbol{r}}_i = -r_i\sin\theta\omega^2\boldsymbol{e}_r$$

主动力

$$\boldsymbol{F}_i = m_i g\boldsymbol{e}_z$$

虚位移

$$\delta\boldsymbol{r}_i = r_i(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_z)\delta\theta + r_i\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\delta\varphi$$

代入达朗贝尔原理中

$$\begin{aligned}\sum_i(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i &= \sum_i(m_i g\boldsymbol{e}_z + m_i r_i\sin\theta\omega^2\boldsymbol{e}_r)\cdot r_i[(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_z)\delta\theta + \sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\delta\varphi]\\ &= \sum_i(-m_i g r_i\sin\theta + m_i r_i^2\sin\theta\cos\theta\omega^2)\delta\theta\\ &= \left[-g\sin\theta\sum_i m_i r_i + \sin\theta\cos\theta\omega^2\sum_i m_i r_i^2\right]\delta\theta = 0\end{aligned}$$

所以

$$-g\sin\theta\sum_i m_i r_i + \sin\theta\cos\theta\omega^2\sum_i m_i r_i^2 = 0$$

又 $\sum_i m_i r_i = \frac{1}{2}ml,\ \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{3}ml^2$，得到

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l\cos\theta}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2l\cos\theta}{3g}}$$

1.9　一根长为 l 的直棒的下端与光滑的铅直墙壁接触，棒搭在固定而光滑的钉上，钉与墙壁的距离为 d，试用虚功原理求下面两种情形下平衡时棒和铅直方向所成的角.

（1）棒有均匀分布的质量;

（2）棒的质量可以忽略，其上端 B 挂一重物 Q.

解　（1）杆子的质量均匀分布，重心位于杆子中心. 设重心相对钉子的高度为 $h\boldsymbol{e}_z$，由几何关系可知

$$h\boldsymbol{e}_z = \left(\frac{1}{2}l\cos\theta - d\cot\theta\right)\boldsymbol{e}_z$$

变分的规则

$$\delta(h\boldsymbol{e}_z)=\left(-\frac{1}{2}l\sin\theta+\frac{d}{\sin^2\theta}\right)\delta\theta\boldsymbol{e}_z$$

由虚功原理得到 $mg\boldsymbol{e}_z\cdot\delta(h\boldsymbol{e}_z)=0$，即

$$-\frac{1}{2}l\sin\theta+\frac{d}{\sin^2\theta}=0$$

$$\Rightarrow\sin\theta=\sqrt[3]{\frac{2d}{l}}\Rightarrow\theta=\arcsin\sqrt[3]{\frac{2d}{l}}$$

（2）杆子无质量，设重物相对钉子高度为 $h\boldsymbol{e}_z$，由几何关系可知

$$h\boldsymbol{e}_z=l\cos\theta-d\cot\theta$$

对其变分

$$\delta(h\boldsymbol{e}_z)=\left(-l\sin\theta+\frac{d}{\sin^2\theta}\right)\delta\theta\boldsymbol{e}_z$$

由虚功原理得 $mg\boldsymbol{e}_z\cdot\delta(h\boldsymbol{e}_z)=0$，即

$$-l\sin\theta+\frac{d}{\sin^2\theta}=0$$

$$\sin\theta=\sqrt[3]{\frac{d}{l}}\Rightarrow\theta=\arcsin\sqrt[3]{\frac{d}{l}}$$

1.10　质量分别为 m 和 $3m$ 的两个质点由长为 $\sqrt{2}r$ 无质量杆相连而构成一个哑铃. 它可以在半径为 r 的碗内无摩擦地滑动，用虚功原理求出静平衡时杆与水平方向的夹角.

解　杆长为 $\sqrt{2}r$，故杆的两端与球心连线夹角为 90°，设 $3m$ 端与竖直方向夹角为 θ，由虚功原理

$$mg\boldsymbol{e}_y\cdot\delta\boldsymbol{r}_1+3mg\boldsymbol{e}_y\cdot\delta\boldsymbol{r}_2=0$$
$$\rightarrow mgr\cos\theta\delta\theta-3mgr\sin\theta\delta\theta=0$$

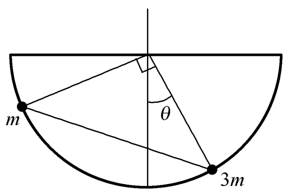


图 1.10a

解得 $\theta=\arctan\dfrac{1}{3}$，则平衡时杆与水平方向的夹角为

$$\theta=\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{3}=\arctan\frac{1}{2}\approx 26.57^\circ$$

1.11　弹性圈的自然长度为 l_0，劲度系数为 k，质量为 m，水平地套在竖直放置的顶角为 2α的光滑圆锥面上，试用虚功原理求平衡时圆锥顶点与弹性圈所在平面的距离.

解　由于对称性，弹性圈位于一个水平面内. 设平衡时圆锥顶点与弹性圈所在平面的距离为 z，弹性圈的半径为 r=$z\tan\alpha$，弹性圈上某点

$$\boldsymbol{r}_i=z\boldsymbol{e}_z+z\tan\alpha\boldsymbol{e}_r$$

则

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \delta z \boldsymbol{e}_z + \tan\alpha \delta z \boldsymbol{e}_r + z\tan\alpha \delta\theta \boldsymbol{e}_\theta$$

而对于微元 m_i，受力为重力与弹性拉力的合力

$$\boldsymbol{F}_i = m_i g \boldsymbol{e}_z - k\cdot(2\pi z\tan\alpha - l_0)\cdot\frac{m_i}{m}2\pi\boldsymbol{e}_r$$

由虚功原理代入

$$\begin{aligned}\sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i &= \sum_i\left[m_i g\boldsymbol{e}_z - k(2\pi z\tan\alpha - l_0)\frac{m_i}{m}2\pi\boldsymbol{e}_r\right]\cdot(\delta z\boldsymbol{e}_z + \tan\alpha\delta z\boldsymbol{e}_r + z\tan\alpha\delta\theta\boldsymbol{e}_\theta)\\ &= mg\delta z - 2\pi k\tan\alpha(2\pi z\tan\alpha - l_0)\delta z = 0\end{aligned}$$

即

$$z = \frac{1}{2\pi\tan\alpha}\left(l_0 + \frac{mg}{2\pi k\tan\alpha}\right)$$

1.12　试由一般形式的哈密顿原理式（1.3.21）建立一般情形的拉格朗日方程式.

解　哈密顿原理式（1.3.21）

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta L + \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha\delta q_\alpha\right)\mathrm{d}t = 0$$

对 $L(q,\dot{q},t)$ 求变分得到δL（等时变分δt=0）

$$\delta L = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta\dot{q}_\alpha\right)$$

代入式（1.3.21）中

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta\dot{q}_\alpha\right) + \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha\delta q_\alpha\right]\mathrm{d}t = 0 \qquad ①$$

对于等时变分, 有 $\delta\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \dfrac{\mathrm{d}(\delta y)}{\mathrm{d}x}$，故有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta\dot{q}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{\mathrm{d}(\delta q_\alpha)}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{\mathrm{d}(\delta q_\alpha)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha\mathrm{d}t$$

对于不动边界问题，上式右边第一项为零，于是式①简化为

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)+Q_\alpha\right]\delta q_\alpha \mathrm{d}t=0$$

由δq_α的独立性和任意性，$[\cdots]=0$，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha \quad (\alpha=1,2,\cdots,s)$$

1.13　用拉格朗日方法求第 1.6 题.

解　设两摆的质量同为 m，两个摆的摆线与铅直的夹角分别为θ_1，θ_2，沿着摆线方向且指向摆锤的单位向量分别为$\boldsymbol{e}_{r_1},\boldsymbol{e}_{r_2}$，垂直于摆线方向且指向$\theta_1$和$\theta_2$绕向的单位向量分别为$\boldsymbol{e}_{\theta_1},\boldsymbol{e}_{\theta_2}$，则$\boldsymbol{e}_{\theta_1}\cdot\boldsymbol{e}_{\theta_2}=\cos(\theta_1-\theta_2)$

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2}m(l\dot{\theta}_1)^2+\frac{1}{2}m(l\dot{\theta}_1\boldsymbol{e}_{\theta_1}+l\dot{\theta}_2\boldsymbol{e}_{\theta_2})^2\\&=\frac{1}{2}m(l\dot{\theta}_1)^2+\frac{1}{2}m[(l\dot{\theta}_1)^2+(l\dot{\theta}_2)^2+2(l\dot{\theta}_1)(l\dot{\theta}_2)\cos(\theta_1-\theta_2)]\\&=\frac{1}{2}ml^2[2\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2+2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)]\end{aligned}$$

$$V=-mgl\cos\theta_1-mgl(\cos\theta_1+\cos\theta_2)=-mgl(2\cos\theta_1+\cos\theta_2)$$

拉格朗日量 $L=T-V$，代入拉格朗日方程$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i}-\dfrac{\partial L}{\partial\theta_i}=0(i=1,2)$得到

$$\begin{cases}l[2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)]+2g\sin\theta_1=0\\l[\ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)]+g\sin\theta_2=0\end{cases}$$

1.14　用拉格朗日方法求第 1.8 题.

解　设该系统以角速度$\omega=\dot{\varphi}$在转动，在沿着杆距离悬挂点为 x 的一小段的长度为 $\mathrm{d}x$，离转轴的水平距离为 $r=x\sin\theta$，则

$$T=\int_0^l\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{l}m\right)(x\sin\theta\omega)^2=\frac{1}{6}ml^2\sin^2\theta\,\omega^2,\quad V=-mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

拉格朗日函数$L=T-V=\dfrac{1}{6}ml^2\sin^2\theta\,\omega^2+\dfrac{1}{2}mgl\cos\theta$，所以$\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=0$，则

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=\frac{1}{3}ml^2\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}mgl\sin\theta=0\Rightarrow\omega^2=\frac{3g}{2l\cos\theta}$$

所以周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2l\cos\theta}{3g}}$$

1.15　求平面内两点之间的短程线.

解　平面内的线元 $\mathrm{d}s=(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+\dot{y}^2}\mathrm{d}x$，则 $s=\int_1^2\sqrt{1+\dot{y}^2}\mathrm{d}x$，对其求极值.

令 $f=\sqrt{1+\dot{y}^2}$，则

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}=\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

代入欧拉方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 中，即 $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}=\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}=\mathrm{Const.}$，所以

$$\dot{y}=C_1,\qquad y=C_1x+C_2$$

1.16　求圆柱面上两点间的短程线.

解　柱面的线元

$$\mathrm{d}s=(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)^{\frac{1}{2}}=(R^2\mathrm{d}\theta^2+\mathrm{d}z^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\dot{z}^2+R^2}\mathrm{d}\theta$$

则 $s=\int_1^2\sqrt{\dot{z}^2+R^2}\mathrm{d}\theta$，对其求极值.

令 $f=\sqrt{\dot{z}^2+R^2}$，则

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}=\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{z}^2+R^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=0$$

代入欧拉方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 中，即 $\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}=\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{z}^2+R^2}}=\mathrm{Const.}$，所以

$$\dot{z}=C_1,\qquad z=C_1\theta+C_2$$

1.17　求圆锥面上两点间的短程线.

解　设圆锥顶角为 2α，锥面上任一点的球坐标为(r, α, φ)，锥面的线元

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}r^2+r^2\sin^2\alpha\,\mathrm{d}\varphi^2}=\sqrt{\dot{r}^2+r^2\sin^2\alpha}\mathrm{d}\varphi$$

则 $s=\int_1^2\sqrt{\dot{r}^2+r^2\sin^2\alpha}\mathrm{d}\varphi$，对其求极值.

令 $f=\sqrt{\dot{r}^2+r^2\sin^2\alpha}$，代入欧拉方程得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2+r^2\sin^2\alpha}}-\frac{r\sin^2\alpha}{\sqrt{\dot{r}^2+r^2\sin^2\alpha}}=0$$

引入变换 $u=\frac{1}{r}$，$\psi=\varphi\sin\alpha$，则 $\dot{u}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\psi}=-\frac{1}{r^2\sin\alpha}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$，代入上式得

$$\ddot{u}+u=0$$

其解为 $u=c_1\cos\psi+c_2\sin\psi$，即

$$\frac{1}{r}=c_1\cos(\varphi\sin\alpha)+c_2\sin(\varphi\sin\alpha)$$

该方程是圆锥展开成扇形时，以极坐标$(r,\ \psi)$表达的两点间线段.

1.18　如果质点具有初始速度 v_0，求解最速落径问题.

解　设 v 是沿着这条曲线的速率，则降落一段弧长 $\mathrm{d}s$ 所需的时间为 $\mathrm{d}s/v$，其中

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2},\quad v=\sqrt{v_0^2+2gy}$$

运动所需时间为

$$t_{12}=\int_1^2\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{2gy+v_0^2}}\mathrm{d}y$$

令 $f=\dfrac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{2gy+v_0^2}}$，则 $\dfrac{\partial f}{\partial\dot{x}}=\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{2gy+v_0^2}\sqrt{1+\dot{x}^2}}$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$，代入欧拉方程中

$$\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}=\frac{\dot{x}}{\sqrt{2gy+v_0^2}\sqrt{1+\dot{x}^2}}=(2gc_1)^{-1/2},\qquad \dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\sqrt{\frac{y+v_0^2/2g}{c_1-y-v_0^2/2g}}$$

令 $y+v_0^2/2g=c_1\sin^2\theta$，则最终可得最速落径的参数方程

$$\begin{cases}x=c_1\left(\theta-\dfrac{1}{2}\sin2\theta\right)+c_2\\ y+v_0^2\big/2g=c_1\sin^2\theta\end{cases}$$

1.19　最小回转表面. 假定在两个固定端点之间作一条曲线，并让它绕 y 轴旋转而形成一个旋转表面，找出使表面积为极小的曲线.

解　曲线微元长度为 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+\dot{x}^2}\mathrm{d}y$，旋转表面积

$$S=\int_1^2 2\pi x\mathrm{d}s=\int_1^2 2\pi x\sqrt{1+\dot{x}^2}\mathrm{d}y$$

令 $f=2\pi x\sqrt{1+\dot{x}^2}$，则

$$\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}=\frac{2\pi x\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}=\frac{(x\ddot{x}+\dot{x}^2)(1+\dot{x}^2)-x\dot{x}^2\ddot{x}}{(1+\dot{x}^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2\pi\sqrt{1+\dot{x}^2}$$

代入欧拉方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\dfrac{\partial f}{\partial\dot{x}}-\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$ 得到

$$x\ddot{x}-\dot{x}^2-1=0$$

又 $\ddot{x}=\dfrac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}y}=\dfrac{\dot{x}\mathrm{d}\dot{x}}{\dot{x}\mathrm{d}y}=\dfrac{\mathrm{d}\dot{x}^2}{2\mathrm{d}x}$，得到 $x^2={c_1}^2(1+\dot{x}^2)$，最终有

$$x=c_1\cosh\frac{y+c_2}{c_1}$$

这是一条悬链线,c_1,c_2 由端点确定.

（用 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial f}{\partial\dot{y}}-\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ 求解更简单）

1.20　一个质点受到形如 $V(x)=-Fx$ 的势能，其中 F 是常数，质点在 t_0 的时间里从 $x=0$ 运动到 $x=a$. 设质点的运动可以表示为 $x(t)=A+Bt+Ct^2$，试确定 A，B 和 C，以确定作用量最小化.

解　由初条件 $x(0)=0$ 和 $x(t_0)=a$，得 $A=0$，$B=a/t_0-Ct_0$，$\delta B=-t_0\delta C$，

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{t_0}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+Fx\right)\mathrm{d}t=\int_0^{t_0}\left[\frac{1}{2}m(B+2Ct)^2+F(Bt+Ct^2)\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}mB^2t_0+\frac{2mC+F}{2}Bt_0^2+\frac{2mC+F}{3}Ct_0^3\end{aligned}$$

要使其取得最小值则$\delta S=0$，即

$$\begin{aligned}\delta S&=mB\delta Bt_0+\left(\frac{2mC+F}{2}\delta B+mB\delta C\right)t_0^2+\frac{4mC+F}{3}\delta Ct_0^3\\&=\left\{-m\left(\frac{a}{t_0}-Ct_0\right)t_0^2+\left[-\frac{2mC+F}{2}t_0+m\left(\frac{a}{t_0}-Ct_0\right)\right]t_0^2+\frac{4mC+F}{3}t_0^3\right\}\delta C\\&=(mC/3-F/6)t_0^3\delta C=0\end{aligned}$$

所以 $C=F/2m$，$B=a/t_0-Ft_0/2m$，而前有 $A=0$.

1.21　一质点自高 20m 处释放，2s 后落地. 在时间 t 内下降距离 s 的方程式可以设想为下列形式中的任一种（此处 g 在三种表示中具有不同的单位）：

$$s=gt,\quad s=\frac{1}{2}gt^2,\quad s=\frac{1}{4}gt^3$$

所有这些表达式都能在 t=2s 时得出 s=20m. 证明正确的形式导致哈密顿原理中的积分有一最小值.

解　验证：$F=mg$，$V(s)=-mgs$，三种情形下作用量大小分别为

$$S=\int_{t_i}^{t_f}\left(\frac{1}{2}m\dot{s}^2+mgs\right)\mathrm{d}t=\int_0^2\left(\frac{1}{2}mg^2+mg^2t\right)\mathrm{d}t=3mg^2$$

$$S=\int_{t_i}^{t_f}\left(\frac{1}{2}m\dot{s}^2+mgs\right)\mathrm{d}t=\int_0^2\left(\frac{1}{2}mg^2t^2+\frac{1}{2}mg^2t^2\right)\mathrm{d}t=\frac{8}{3}mg^2$$

$$S=\int_{t_i}^{t_f}\left(\frac{1}{2}m\dot{s}^2+mgs\right)\mathrm{d}t=\int_0^2\left(\frac{9}{32}mg^2t^4+\frac{1}{4}mg^2t^3\right)\mathrm{d}t=\frac{14}{5}mg^2$$

显然第二种情况最小,它恰好是正确的形式.

证明　利用第 1.20 题的结论，在作用量最小的要求下，s 须含 t 的平方项.

1.22　质量为 m、长为 l 的均匀细杆被限制在 xy 平面内运动，且其 A 端恒保持在 x 轴上. 若采用（x,θ）作为广义坐标，其中θ是细杆与 x 轴的夹角，试求动能与广义动量 p_θ 的表达式.

解　设细杆上某点距 A 端距离为 t，考虑微元 dt，位矢和速度分别为

$$x_0=x+t\cos\theta,\ y_0=t\sin\theta;\quad \dot{x}_0=\dot{x}-t\sin\theta\dot{\theta},\ \dot{y}_0=t\cos\theta\dot{\theta}$$

$$T=\int_0^l\frac{1}{2}\frac{m}{l}[(\dot{x}-t\sin\theta\dot{\theta})^2+(t\cos\theta\dot{\theta})^2]\mathrm{d}t=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}ml\dot{x}\sin\theta\dot{\theta}$$

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}-\frac{1}{2}ml\dot{x}\sin\theta$$

1.23　半径为 r、质量为 m 的圆盘可以在细杆上无滑动地滚动，细杆同时以匀角速度ω绕固定点 O 转动，滚动和转动在同一平面内. 试写出形式为$T(q,\dot{q})$的圆盘总动能的表达式.

解　圆盘质心 C 的运动可以分解为 C 绕着 O 点的运动和沿着杆方向的平动. 设圆盘与细杆接触点与 O 点的距离为 q，则 C 到 O 的距离和质心速度分别为

$$\overline{CO}=\sqrt{q^2+r^2},\quad \boldsymbol{v}_c=\omega\sqrt{q^2+r^2}\boldsymbol{e}_\varphi+\dot{q}\boldsymbol{e}_x$$

其中，$\boldsymbol{e}_x$ 为杆方向，$\boldsymbol{e}_\varphi$ 为 C 的运动方向，满足 $\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}_x=-\dfrac{r}{\sqrt{q^2+r^2}}$，质心动能

$$\begin{aligned}E_C&=\frac{1}{2}mv_c^2=\frac{1}{2}m\omega^2(q^2+r^2)+\frac{1}{2}m\dot{q}^2+m\omega\dot{q}\sqrt{q^2+r^2}\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}_x\\&=\frac{1}{2}m\omega^2(q^2+r^2)+\frac{1}{2}m\dot{q}^2-m\omega r\dot{q}\end{aligned}$$

圆盘角速度满足关系 $\dot{\theta}=\omega-\dfrac{\dot{q}}{r}$，圆盘相对于质心的动能为

$$E_{KC}=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2=\frac{1}{4}mr^2\left(\omega^2-2\omega\frac{\dot{q}}{r}+\frac{\dot{q}^2}{r^2}\right)$$

由柯尼希定理知，总动能

$$T=E_C+E_{KC}=\frac{3}{4}m\dot{q}^2-\frac{3}{2}m\omega\dot{q}r+\frac{1}{2}m\omega^2q^2+\frac{3}{4}mr^2\omega^2$$

1.24　质量为 m 的质点被嵌入半径为 r 的无质量圆盘. 质点到盘中心的距离为 l. 竖直圆盘沿平面无滑动地滚下，平面对于水平面的倾角为α. 试应用拉格朗日方法写出该系统的运动微分方程.

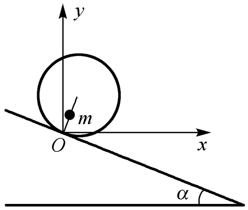


图 1.24a

解　以起点为原点建立如图 1.24a 所示的直角坐标系，则圆心位矢

$$\boldsymbol{r}_0=(r\theta\cos\alpha+r\sin\alpha)\boldsymbol{e}_x+(-r\theta\sin\alpha+r\cos\alpha)\boldsymbol{e}_y$$

质点位矢为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}_0-l\sin(\alpha+\theta)\boldsymbol{e}_x-l\cos(\alpha+\theta)\boldsymbol{e}_y\\&=[r\theta\cos\alpha+r\sin\alpha-l\sin(\alpha+\theta)]\boldsymbol{e}_x\\&\quad+[-r\theta\sin\alpha+r\cos\alpha-l\cos(\alpha+\theta)]\boldsymbol{e}_y\end{aligned}$$

所以

$$\dot{\boldsymbol{r}}=[r\cos\alpha-l\cos(\alpha+\theta)]\dot{\theta}\boldsymbol{e}_x+[-r\sin\alpha+l\sin(\alpha+\theta)]\dot{\theta}\boldsymbol{e}_y$$

$$T=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2=\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2(r^2+l^2-2rl\cos\theta)$$

$$V=mgy=mg[-r\theta\sin\alpha+r\cos\alpha-l\cos(\alpha+\theta)]$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2(r^2+l^2-2rl\cos\theta)+mg[-r\theta\sin\alpha+r\cos\alpha-l\cos(\alpha+\theta)]$$

代入拉格朗日方程得到

$$m(r^2+l^2-2lr\cos\theta)\ddot{\theta}+mrl\dot{\theta}^2\sin\theta-mgr\sin\alpha+mgl\sin(\theta+\alpha)=0$$

1.25　光滑刚性抛物线 $R^2=2pz$ 以常角速度ω绕铅直轴 z 旋转，其上套有质量为 m 的小环，求小环的拉格朗日函数及运动方程. 如果小环稳定在抛物线的某处，求ω.

解　设小环位矢 $\boldsymbol{r}=z\boldsymbol{e}_z+R\boldsymbol{e}_r$，其速度

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{z}\boldsymbol{e}_z+\dot{R}\boldsymbol{e}_r+R\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta=\dot{z}\boldsymbol{e}_z+\dot{R}\boldsymbol{e}_r+R\omega\boldsymbol{e}_\theta$$

所以

$$T=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2=\frac{1}{2}m(\dot{z}^2+\dot{R}^2+R^2\omega^2),\quad V=mgz$$

代入约束关系 $R^2=2pz$，即 $2R\dot{R}=2p\dot{z}$，

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{z}^2+\dot{R}^2+R^2\omega^2)-mgz=\frac{1}{2}m\left(\frac{R^2\dot{R}^2}{p^2}+\dot{R}^2+R^2\omega^2\right)-\frac{mgR^2}{2p}$$

代入拉格朗日方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{R}}-\dfrac{\partial L}{\partial R}=0$，得到

$$\frac{R^2}{p^2}\ddot{R}+\ddot{R}+\frac{R}{p^2}\dot{R}^2-R\omega^2+\frac{gR}{p}=0$$

稳定时 $\dot{R}=0,\ \ddot{R}=0$，代入上式得

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{p}}$$

1.26　将 1.4.2 节中例 1.9 中的轨道由圆锥线换成圆柱线 $r=a,\ \theta=bz$ 时，求珠子的运动方程和解. 如果轨道的方程变成 $r=az,\ \theta=b\ln z$，再次求解.

解　设珠子质量为 m，圆柱线 $r=a,\ \theta=bz$，其动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)=\frac{1}{2}m(a^2b^2+1)\dot{z}^2, \qquad V=mgz$$

拉格朗日量 $L=\frac{1}{2}m(a^2b^2+1)\dot{z}^2-mgz$，拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}-\frac{\partial L}{\partial z}=(a^2b^2+1)\ddot{z}+g=0$$

解得

$$z=-\frac{g}{2(a^2b^2+1)}t^2+C_1t+C_2$$

对于 $r=az,\ \theta=b\ln z$

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)-mgz=\frac{1}{2}m(a^2+a^2b^2+1)\dot{z}^2-mgz$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}-\frac{\partial L}{\partial z}=(a^2b^2+a^2+1)\ddot{z}+g=0$$

解得

$$z=-\frac{g}{2(a^2b^2+a^2+1)}t^2+C_1t+C_2$$

1.27　设广义力可以写成 $Q_i=-\frac{\partial V}{\partial q_i}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\right)$，其中 $V=V(q,\dot{q},t)$ 是广义坐标、广义速度和时间的函数，称广义势能. 今引入 $L'=T-V$，试证 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L'}{\partial q_i}=0$.

证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}, \qquad \frac{\partial L'}{\partial q_i}=\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L'}{\partial q_i}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i=0\end{aligned}$$

1.28　一个做平面运动的质点除了受到有心力 $\boldsymbol{F}_1=-\frac{\mu m}{r^3}\boldsymbol{r}$ 外，还受到与速度大小成正比、方向相反的阻力 $\boldsymbol{F}_2=-a^2\boldsymbol{v}$ 作用. 试求其拉格朗日方程式.

解 有心力势能$V=-\int_r^{\infty}\boldsymbol{F}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_r^{\infty}\frac{\mu m}{r^2}\mathrm{d}r=-\frac{\mu m}{r}$，动能$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$，则

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{\mu m}{r}$$

根据$\boldsymbol{v}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$，$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}=\boldsymbol{e}_r$，$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}=r\boldsymbol{e}_\theta$，拉格朗日方程$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha$化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\dfrac{\partial L}{\partial r}=m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2+\dfrac{\mu m}{r^2}=-a^2\boldsymbol{v}\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}=-a^2\dot{r}\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\dfrac{\partial L}{\partial \theta}=mr^2\ddot{\theta}+2mr\dot{r}\dot{\theta}=-a^2\boldsymbol{v}\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}=-a^2r^2\dot{\theta}\end{cases}$$

1.29 光滑空心细管绕通过其一端 O 的水平轴在竖直面内以角匀速度ω_0 转动. 管中有一以 O 点为悬挂点的弹簧振子，弹簧自然长度为 l_0，倔强系数为 k，振子质量为 m. 试由拉格朗日方程求振子相对于管的运动微分方程.

解 以管为参考系，有

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2,\qquad V=\frac{1}{2}k(x-l_0)^2,\qquad L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}k(x-l_0)^2$$

在该参考系下，振子受惯性力$F=m\omega_0^2x$，重力沿管的分量$G=mg\sin\omega_0t$，则广义力

$$Q=m\omega_0^2x-mg\sin\omega_0t$$

代入拉格朗日方程$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=Q$中，得到运动方程

$$\ddot{x}+\left(\frac{k}{m}-\omega_0^2\right)x=\frac{kl_0}{m}-g\sin\omega_0t$$

1.30 质点可以在弯成圆环形的刚性金属丝上滑动，圆环的半径为 r，圆心为 O'，并以角速度ω绕其圆周上一点 O 在圆环平面内转动. 假定质点的位置由直线 OO' 量起的角θ来规定，试求动能和广义动量 p_θ.

解 质点绕圆心的速度$\boldsymbol{v}_1=r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$，质点绕 O 点转动的速度$\boldsymbol{v}_2=2\omega r\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_\phi$，在惯性系中总速度

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2=r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta+2\omega r\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_\phi$$

由几何关系，$\boldsymbol{e}_\phi\cdot\boldsymbol{e}_\theta=\sin\frac{\theta}{2}$，所以

$$v^2=4\omega^2r^2\sin^2\frac{\theta}{2}+r^2\dot{\theta}^2+4\omega r^2\dot{\theta}\sin^2\frac{\theta}{2}=2\omega r^2(1-\cos\theta)(\omega+\dot{\theta})+r^2\dot{\theta}^2$$

$$T=\frac{1}{2}mv^2=mr^2\left[\omega(1-\cos\theta)(\omega+\dot{\theta})+\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right]$$

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=mr^2[\omega(1-\cos\theta)+\dot{\theta}]$$

1.31　一质点在弯成螺旋形的光滑固定金属线上滑动. 螺旋线半径为 R，相对于水平线的不变倾角为α，试考察质点的运动.

（1）设螺旋线的中心轴是铅直的，若质点由静止释放，试求释放后质点滑下铅直距离 H 所需的时间.

（2）在螺旋线绕其铅直轴以匀角速度Ω转动的情况，若质点仍以相对于螺旋线为零的速度释放，试求相应的滑行时间.

解　（1）质点位矢为 $\boldsymbol{r}=R\boldsymbol{e}_R+z\boldsymbol{e}_z$，所以 $\dot{\boldsymbol{r}}=R\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\dot{z}\boldsymbol{e}_z$，由螺旋线的倾角为$\alpha$，$R\dot{\theta}=\dfrac{\dot{z}}{\tan\alpha}$，所以

$$T=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2=\frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)=\frac{m\dot{z}^2}{2\sin^2\alpha},\qquad V=-mgz$$

$$L=T-V=\frac{m\dot{z}^2}{2\sin^2\alpha}+mgz$$

代入$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{z}}-\dfrac{\partial L}{\partial z}=0$得

$$\ddot{z}=g\sin^2\alpha$$

结合初始条件 $z=0$，$\dot{z}=0$ 得

$$z=\frac{1}{2}g\sin^2\alpha t^2$$

代入 $z=H$，得 $t=\dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

（2）螺旋线以匀角速度Ω转动，满足 $\dot{\theta}-\Omega=\dfrac{\dot{z}}{R\tan\alpha}$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(R\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\dot{z}\boldsymbol{e}_z)^2+mgz=\frac{1}{2}m\left(R^2\Omega^2+\frac{2R\Omega\dot{z}}{\tan\alpha}+\frac{\dot{z}^2}{\sin^2\alpha}\right)+mgz$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}=\frac{mR\Omega}{\tan\alpha}+\frac{m\dot{z}}{\sin^2\alpha},\qquad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}=\frac{m\ddot{z}}{\sin^2\alpha},\qquad\frac{\partial L}{\partial z}=mg$$

代入$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{z}}-\dfrac{\partial L}{\partial z}=0$得到

$$\ddot{z}=g\sin^2\alpha$$

接下来与前面一致，得到所需时间同样为 $t=\dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

1.32 用拉格朗日方法求解第 1.9 题.

解 （1）建立直角坐标系，质点坐标为

$$\boldsymbol{r}_c=\left(\frac{1}{2}l\sin\theta-d\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{1}{2}l\cos\theta-\frac{d}{\tan\theta}\right)\boldsymbol{e}_y$$

所以

$$Q_\theta=-mg\boldsymbol{e}_y\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_c}{\partial\theta}=mg\left(\frac{1}{2}l\sin\theta-\frac{d}{\sin^2\theta}\right)=0$$

则

$$\theta=\arcsin\sqrt[3]{\frac{2d}{l}}$$

（2）对于无质量杆，质点坐标为

$$\boldsymbol{r}_c=(l\sin\theta-d)\boldsymbol{e}_x+\left(l\cos\theta-\frac{d}{\tan\theta}\right)\boldsymbol{e}_y$$

所以

$$Q_\theta=-mg\boldsymbol{e}_y\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_c}{\partial\theta}=mg\left(l\sin\theta-\frac{d}{\sin^2\theta}\right)=0$$

则

$$\theta=\arcsin\sqrt[3]{\frac{d}{l}}$$

1.33 用拉格朗日方法求解第 1.10 题.

解 如图 1.33a 所示，以碗口大圆圆心为原点建立直角坐标系，

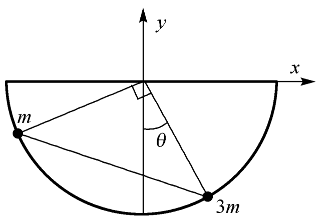


图 1.33a

m 坐标 $\boldsymbol{r}_m=-r\cos\theta\boldsymbol{e}_x-r\sin\theta\boldsymbol{e}_y$ ，　重力 $\boldsymbol{F}_1=-mg\boldsymbol{e}_y$

$3m$ 坐标 $\boldsymbol{r}_{3m}=r\sin\theta\boldsymbol{e}_x-r\cos\theta\boldsymbol{e}_y$ ，　重力 $\boldsymbol{F}_2=-3mg\boldsymbol{e}_y$

平衡时广义力为 0，即

$$Q_\theta=-mg\boldsymbol{e}_y\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_m}{\partial\theta}-3mg\boldsymbol{e}_y\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_{3m}}{\partial\theta}=mgr\cos\theta-3mgr\sin\theta=0$$

得到 $\theta=\arctan\dfrac{1}{3}$，则平衡时杆与水平方向的夹角

$$\theta=\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{3}=\arctan\frac{1}{2}\approx 26.57^\circ$$

1.34 质量为 m 的三足架各足长相同，与铅垂线之间的夹角都是α. 将它置于光滑水平面上，并用一绳圈套在三足上，以使三足与铅垂线的夹角不变. 用拉格朗日方法求绳的张力.

解　设绳的张力大小为 F，对于第 i 足，位矢 $\boldsymbol{R}_i = l\cos\alpha\boldsymbol{e}_z + l\sin\alpha\boldsymbol{e}_{r_i}$，两侧绳子张力的合力大小为 $\sqrt{3}F$，方向 $\boldsymbol{e}_{r_i}$ 指向铅垂线. 广义力

$$
\begin{aligned}
Q &= \sum_i^3\left(\frac{1}{3}mg\boldsymbol{e}_z + \sqrt{3}F\boldsymbol{e}_{r_i}\right)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{R}_i}{\partial\alpha} \\
&= \sum_i^3\left(\frac{1}{3}mg\boldsymbol{e}_z + \sqrt{3}F\boldsymbol{e}_{r_i}\right)\cdot(-l\sin\alpha\boldsymbol{e}_z + l\cos\alpha\boldsymbol{e}_{r_i}) \\
&= -mgl\sin\alpha + 3\sqrt{3}Fl\cos\alpha = 0
\end{aligned}
$$

所以

$$
F = \frac{mg\tan\alpha}{3\sqrt{3}}
$$

1.35　已知一系统在惯性系 1 中的拉格朗日函数为 L_1，惯性系 2 相对于惯性系 1 以速度 $\boldsymbol{v}_{12}$ 运动，求该系统在惯性系 2 中的拉格朗日函数.

解　设系统由 n 个质点组成，第 i 个质点质量为 m_i.

惯性系 1 中拉格朗日函数 $L_1 = T_1 - V_1$，其中 $T_1 = \sum_i^n \frac{1}{2}m_i v_{1i}^2$.

惯性系 2 相对惯性系 1 速度为 $\boldsymbol{v}_{12}$，则

$$
\boldsymbol{v}_{2i} = \boldsymbol{v}_{1i} - \boldsymbol{v}_{12}, \quad T_2 = \sum_i^n \frac{1}{2}m_i v_{2i}^2 = \sum_i^n \frac{1}{2}m_i(\boldsymbol{v}_{1i} - \boldsymbol{v}_{12})^2
$$

又势能不随参考系变化而变化（自变量由 $\boldsymbol{r}_1$ 替换为 $\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{v}_{12}t$）

$$
\begin{aligned}
L_2 = T_2 - V_2 &= \sum_i^n \frac{1}{2}m_i(v_{1i}^2 + v_{12}^2 - 2\boldsymbol{v}_{1i}\cdot\boldsymbol{v}_{12}) - V_1 \\
&= T_1 - V_1 + \sum_i^n\left(\frac{1}{2}m_i v_{12}^2 - m_i\boldsymbol{v}_{1i}\cdot\boldsymbol{v}_{12}\right) = L_1 + \frac{1}{2}Mv_{12}^2 - \boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{v}_{12}
\end{aligned}
$$

其中，M 是系统总质量，$\boldsymbol{P}_1$ 为系统在惯性系 1 中的总动量.

1.36　某力学系统 $T = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}_1{}^2}{a+bq_2} + q_2^2\dot{q}_2^2\right)$，$V = a_1 + b_1 q_2$，其中 a、b、a_1 和 b_1 为常数. 试证 q_2 与 t 之间以 $(q_2 - k)(q_2 + 2k)^2 = h(t - t_0)^2$ 相联系，其中 k、h 和 t_0 为常数.

证明　由题意，$L = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}_1{}^2}{a+bq_2} + q_2^2\dot{q}_2^2\right) - a_1 - b_1 q_2$，不显含 q_1，所以 $p_1 = \frac{\dot{q}_1}{a+bq_2}$ 为常数，记为 C_1. 由 q_2 的拉格朗日方程得

$$
q_2^2\ddot{q}_2 + q_2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2 b}{(a+bq_2)^2} + b_1 = q_2^2\ddot{q}_2 + q_2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}C_1^2 b + b_1 = 0
$$

记 $bC_1^{\ 2}+2b_1=-C_2$，将上方程乘以 $\dot{q}_2$，可对时间积分得

$$q_2^2\dot{q}_2^2=C_2q_2+C_3 \qquad ①$$

令 $\dfrac{C_3}{C_2}=-k,\ \dfrac{9}{4}C_2=h$，上式可改写成

$$\frac{3[(q_2-k)+k]\mathrm{d}q_2}{2\sqrt{q_2-k}}=\left(\frac{3}{2}\sqrt{q_2-k}+\frac{3k}{2\sqrt{q_2-k}}\right)\mathrm{d}q_2=\pm\sqrt{h}\mathrm{d}t$$

对时间积分可得

$$(q_2-k)\sqrt{q_2-k}+3k\sqrt{q_2-k}=\sqrt{q_2-k}(q_2+2k)=\pm\sqrt{h}(t-t_0)$$

两边平方得

$$(q_2-k)(q_2+2k)^2=h(t-t_0)^2$$

注：式①也可以由体系总能量守恒直接得到.

1.37　考虑一自然系统，系统具有 $T=\dfrac{1}{2}m(q)\dot{q}^2$ 和 $V=V(q)$. 求运动方程，并验证：如令总能量 $E=T+V$ 对时间的导数等于零，也能得到此结果.

解　（1）$L=T-V=\dfrac{1}{2}m(q)\dot{q}^2-V(q)$，因而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{q})=m\ddot{q}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}q}\dot{q}^2,\quad \frac{\partial L}{\partial q}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}q}\dot{q}^2-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}$$

代入拉格朗日方程中即为

$$m\ddot{q}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}q}\dot{q}^2+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}=0$$

（2）总能量 $E=T+V=\dfrac{1}{2}m(q)\dot{q}^2+V(q)$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=m\dot{q}\ddot{q}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}q}\dot{q}^3+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}\dot{q}=0\Rightarrow m\ddot{q}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}q}\dot{q}^2+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}=0$$

因为拉氏方程不显含 t，又是定常约束，所以体系能量守恒. 在只有一个自由度的条件下，此关系式与原条件等价，可以得出同样的运动方程.

1.38　已知一个 N 自由度的保守完整系统. 试证明，若令能量积分对时间的全导数等于零，则由此得到的微分方程和第α个拉格朗日方程乘以 $\dot{q}_\alpha$ 然后对α求和所得的方程相同.

证明　能量积分 $E=\sum\limits_\alpha \dot{q}_\alpha\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-L$，即

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\sum_{\alpha}\left(\ddot{q}_{\alpha}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\alpha}}+\dot{q}_{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\alpha}}\right)-\sum_{\alpha}\left(\ddot{q}_{\alpha}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\alpha}}+\dot{q}_{\alpha}\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}\right)$$

$$=\sum_{\alpha}\dot{q}_{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\alpha}}-\dot{q}_{\alpha}\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}\right)=0$$

1.39　一系统 $T=\frac{1}{2}(A_1+A_2+\cdots+A_s)(B_1\dot{q}_1^2+B_2\dot{q}_2^2+\cdots+B_s\dot{q}_s^2)$, $V=\frac{V_1+V_2+\cdots+V_s}{A_1+A_2+\cdots+A_s}$, 其中 A_α、B_α和 V_α都只是一个参数 q_α的函数. 证明此系统的运动问题可用积分法求解.

解　转至第 3.28 题解.

第 2 章　拉格朗日方程的应用

2.1　两个质点作弹性碰撞，它们的质量分别是 m_1 和 m_2，初速度 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\alpha\boldsymbol{u}_1$. 如果初始两个质点动能相同，碰撞后第一个质点静止，求α.

解　设碰撞后质点 2 速度为 $\boldsymbol{u}_2$. 碰撞前

$$\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{u}_1^2=\frac{1}{2}m_2(\alpha\boldsymbol{u}_1)^2\Rightarrow m_1=\alpha^2 m_2$$

碰撞动量守恒

$$m_1\boldsymbol{u}_1+m_2\alpha\boldsymbol{u}_1=m_2\boldsymbol{u}_2\Rightarrow(\alpha^2+\alpha)\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_2$$

弹性碰撞能量守恒

$$\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{u}_1^2+\frac{1}{2}m_2(\alpha\boldsymbol{u}_1)^2=\frac{1}{2}m_2\boldsymbol{u}_2^2\Rightarrow\alpha^2\boldsymbol{u}_1^2=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2^2$$

解得 $\alpha=-1\pm\sqrt{2}$.

2.2　两个质点质量相同，碰撞后两质点的速度方向垂直. 求初始两质点速度的关系.

解　在实验室系下，设碰撞前速度为 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$，碰撞后速度为 $\boldsymbol{v}_1',\boldsymbol{v}_2'$. 碰撞满足动量守恒、能量守恒

$$\begin{cases}m\boldsymbol{v}_1+m\boldsymbol{v}_2=m\boldsymbol{v}_1'+m\boldsymbol{v}_2'\\ \dfrac{1}{2}m\boldsymbol{v}_1^2+\dfrac{1}{2}m\boldsymbol{v}_2^2=\dfrac{1}{2}m\boldsymbol{v}_1'^2+\dfrac{1}{2}m\boldsymbol{v}_2'^2\end{cases}$$

由上式可得

$$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1'\cdot\boldsymbol{v}_2'$$

考虑到碰撞后 $\boldsymbol{v}_1'\perp\boldsymbol{v}_2'$，则初始速度满足 $\boldsymbol{v}_1\perp\boldsymbol{v}_2$ 或者两者速度中有一个为 0.

2.3　一质点与初始静止的另一质点发生弹性碰撞，碰撞后两质点的速度方向垂直. 则可以知道它们的什么信息？

解　设在实验室系中质点 1 碰撞前速度为 $\boldsymbol{v}_1$，碰撞后两质点速度分别为 $\boldsymbol{v}_1',\boldsymbol{v}_2'$，质量分别为 m_1,m_2，则满足动量守恒、能量守恒：

$$m_1\boldsymbol{v}_1=m_1\boldsymbol{v}_1'+m_2\boldsymbol{v}_2' \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1^2=\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1'^2+\frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2'^2 \qquad ②$$

①$^2-2m_1\times$②得

$$0=2m_1m_2v_1'\cdot v_2'-(m_1-m_2)m_2v_2'^2$$

$$v_1'\perp v_2'\Rightarrow(m_1-m_2)m_2v_2'^2=0\Rightarrow m_1=m_2$$

即两者质量相等.

2.4　证明在 $m_1=m_2$ 和 $m_1\ll m_2$ 两种情形，实验室系里刚球势散射的总截面均为πR^2.

证明　当 $m_1=m_2$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_0}=R^2\cos\theta_0$，总散射截面

$$\sigma_t=\int\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_0}\mathrm{d}\Omega_0=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^2\cos\theta_0\sin\theta_0\mathrm{d}\theta_0=\pi R^2$$

当 $m_1\ll m_2$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_0}=\dfrac{R^2}{4}\left(1+2\dfrac{m_1}{m_2}\cos\theta_0\right)$，总散射截面

$$\sigma_t=\int\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_0}\mathrm{d}\Omega_0=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_0}=2\pi\int_0^{\pi}\frac{R^2}{4}\left(1+2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta_0\right)\sin\theta_0\mathrm{d}\theta_0=\frac{\pi R^2}{2}\int_0^{\pi}\sin\theta_0\mathrm{d}\theta_0=\pi R^2$$

2.5　求粒子在势场 $V=\alpha/r^2$ 中的散射截面.

解　散射过程满足

$$\varphi=\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{b\mathrm{d}r/r^2}{\sqrt{1-\dfrac{b^2}{r^2}-\dfrac{2}{mv_\infty^2}\dfrac{\alpha}{r^2}}}$$

其中，$r_{\min}$ 由能量守恒和角动量守恒决定

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}mv_\infty^2=\dfrac{1}{2}mv_{\min}^2+\dfrac{\alpha}{r_{\min}^2}\\ mbv_\infty=mr_{\min}v_{\min}\end{cases}$$

解得 $r_{\min}=\sqrt{\dfrac{mb^2v_\infty^2+2\alpha}{mv_\infty^2}}$，于是

$$\varphi=\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{b\mathrm{d}r/r^2}{\sqrt{1-\dfrac{mv_\infty^2b^2+2\alpha}{mv_\infty^2}\dfrac{1}{r^2}}}=\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{b\mathrm{d}r/r^2}{\sqrt{1-\dfrac{r_{\min}^2}{r^2}}}$$

设 $\dfrac{r_{\min}}{r}=t$，则

$$\varphi=\frac{b}{r_{\min}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi b}{2r_{\min}}$$

$$\Rightarrow \theta = \pi - 2\varphi = \pi - \frac{\pi b}{r_{\min}} = \pi - \pi b\sqrt{\frac{mv_\infty^2}{mb^2v_\infty^2 + 2\alpha}}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{\frac{2\alpha}{mv_\infty^2}\left(\frac{\pi^2}{2\theta\pi - \theta^2} - 1\right)}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right| = \pi^2\sqrt{\frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}\left(\frac{\pi^2}{2\theta\pi - \theta^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}(2\theta\pi - \theta^2)^{-2}(\pi - \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right| = \frac{2\alpha\pi^2}{mv_\infty^2}\cdot\frac{\pi - \theta}{(2\theta\pi - \theta^2)^2}\cdot\frac{1}{\sin\theta}$$

即散射截面 $\mathrm{d}\sigma = \frac{2\alpha\pi^2}{mv_\infty^2}\cdot\frac{\pi - \theta}{(2\theta\pi - \theta^2)^2}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\mathrm{d}\Omega$.

2.6　求粒子在势场 $V = \begin{cases} 0 \ (r > a) \\ V_0 (r \leqslant a) \end{cases}$ 中的散射截面.

解　穿过等势区球面界面时，粒子动量的切向分量不变，即

$$v_1 \sin\alpha = v_2 \sin\beta$$

而能量守恒

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + V_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + V_2$$

由此二式可得入射角和折射角之间的关系为

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_1^2}(V_1 - V_2)}$$

由几何关系可知

$$b = a\sin\alpha, \quad \theta = 2\beta - 2\alpha$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\theta}{2} + \alpha \Rightarrow n\sin\left(\frac{\theta}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$$

将上式中两角和的正弦函数展开，可得

$$\tan\alpha = \frac{n\sin\frac{\theta}{2}}{1 - n\cos\frac{\theta}{2}}$$

则

$$b^2 = a^2\sin^2\alpha = \frac{a^2n^2\left(1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)}{n^2 + 1 - 2n\cos\frac{\theta}{2}}$$

微分散射截面

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|=\frac{1}{8\cos\frac{\theta}{2}}\left|\frac{\mathrm{d}b^2}{\mathrm{d}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)}\right|=\frac{a^2n^2}{4\cos\frac{\theta}{2}}\frac{\left|\left(n\cos\frac{\theta}{2}-1\right)\left(n-\cos\frac{\theta}{2}\right)\right|}{\left(n^2+1-2n\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

故

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{a^2n^2}{4\cos\frac{\theta}{2}}\frac{\left|\left(n\cos\frac{\theta}{2}-1\right)\left(n-\cos\frac{\theta}{2}\right)\right|}{\left(n^2+1-2n\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\mathrm{d}\Omega$$

2.7　半径为 r 的均匀重球可以在一具有水平轴的、半径为 R 的固定内表面滚动. 试求圆球围绕平衡位置作微振动的运动方程及其周期.

解　以齐圆心的水平面为势能零点，以θ表示球心相对于竖直线的转动角度，以φ表示小球绕球心的转动角度，则

$$V=-mg(R-r)\cos\theta$$

小球滚动满足约束方程

$$(R-r)\theta=r\varphi\Rightarrow(R-r)\dot{\theta}=r\dot{\varphi}$$

小球动能

$$T=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{5}mr^2\dot{\varphi}^2=\frac{7}{10}m(R-r)^2\dot{\theta}^2$$

则拉格朗日量

$$L=T-V=\frac{7}{10}m(R-r)^2\dot{\theta}^2+mg(R-r)\cos\theta$$

代入拉格朗日方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$ 中，得到

$$\frac{7}{5}m(R-r)^2\ddot{\theta}+mg(R-r)\sin\theta=0$$

对于小振动，$\sin\theta\approx\theta$，则 $\ddot{\theta}+\frac{5}{7}\frac{g}{R-r}\theta=0$，周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

2.8　质量为 m、摆长为 l 的两个单摆悬挂在同一水平线上相距为 d 的两个固定点，两个摆锤带有等量异号电荷 q 和$-q$. 求体系作小振动的频率.

解　以悬挂点为势能零点，两个单摆的摆角分别为θ_1和θ_2，则动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2),\quad V=-mgl(\cos\theta_1+\cos\theta_2)-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r}$$

其中

$$\begin{aligned}r^2&=[d+l(\sin\theta_1-\sin\theta_2)]^2+[l(\cos\theta_1-\cos\theta_2)]^2\\&=d^2+2ld(\sin\theta_1-\sin\theta_2)+2l^2(1-\sin\theta_1\sin\theta_2-\cos\theta_1\cos\theta_2)\\&=d^2+2ld(\sin\theta_1-\sin\theta_2)+2l^2[1-\cos(\theta_1-\theta_2)],\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial\theta_1}=mgl\sin\theta_1+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^3}[\mathrm{d}l\cos\theta_1+l^2\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

小振动要求θ_1,θ_2很小，

$$\cos\theta\approx 1,\quad \sin\theta\approx\theta$$

$$\Rightarrow\frac{1}{r^3}=[d^2+2ld(\theta_1-\theta_2)+l^2(\theta_1-\theta_2)^2]^{-3}\approx\frac{1}{d^3}\left[1-3\frac{l}{d}(\theta_1-\theta_2)\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial\theta_1}&\approx mgl\theta_1+\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\left[1-\frac{3l}{d}(\theta_1-\theta_2)\right][\mathrm{d}l+l^2(\theta_1-\theta_2)]\\&\approx mgl\theta_1+\frac{q^2l}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left[1-\frac{2l}{d}(\theta_1-\theta_2)\right]\end{aligned}$$

代入关于θ_1和θ_2的拉格朗日方程得

$$\begin{cases}ml^2\ddot{\theta}_1+mgl\theta_1+\dfrac{q^2l}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left[1-\dfrac{2l}{d}(\theta_1-\theta_2)\right]=0\\ ml^2\ddot{\theta}_2+mgl\theta_2-\dfrac{q^2l}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left[1-\dfrac{2l}{d}(\theta_1-\theta_2)\right]=0\end{cases}$$

令$\phi_{1,2}=\theta_{1,2}\pm\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2mg-4lq^2/d}$，则上两式消去常数项得

$$\begin{cases}ml\ddot{\phi}_1+mg\phi_1-\dfrac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{l}{d^3}(\phi_1-\phi_2)=0\\ ml\ddot{\phi}_2+mg\phi_2+\dfrac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{l}{d^3}(\phi_1-\phi_2)=0\end{cases}$$

令$\phi_{1,2}=a_{1,2}\sin(\omega t+\varphi)$，代入以上方程组得

$$\begin{cases}\left(-ml\omega^2-\dfrac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{l}{d^3}+mg\right)a_1+\dfrac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{l}{d^3}a_2=0\\ \dfrac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{l}{d^3}a_1+\left(-ml\omega^2-\dfrac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{l}{d^3}+mg\right)a_2=0\end{cases}$$

非零振幅解要求系数行列式为零，即

$$\left(-ml\omega^2-\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l}{d^3}+mg\right)^2-\left(\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l}{d^3}\right)^2=0$$

解得

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{q^2 l}{\pi\varepsilon_0 d^3}}$$

注：$\pm\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2 mg-4lq^2/d}$ 其实就是有库仑作用时 $\theta_{1,2}$ 的平衡位置.

2.9　计算线性非对称三原子分子的振动频率.

解　对于纵向振动频率，设三原子偏离平衡位置的坐标分别为 x_1, x_2, x_3，则

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1{}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2{}^2+\frac{1}{2}m_3\dot{x}_3{}^2,\qquad V=\frac{1}{2}k_1(x_2-x_1)^2+\frac{1}{2}k_2(x_3-x_2)^2$$

除去整体平动，令质心固定在原点，即 $m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3=0$，令 $x_2-x_1=l_1,\ x_3-x_2=l_2$. 则反解出

$$x_1=-\frac{(m_2+m_3)l_1+m_3l_2}{m_1+m_2+m_3},\quad x_2=\frac{m_1l_1-m_3l_2}{m_1+m_2+m_3},\quad x_3=\frac{m_1l_1+(m_1+m_2)l_2}{m_1+m_2+m_3}$$

$$\Rightarrow T=\frac{m_1(m_2+m_3)}{2(m_1+m_2+m_3)}\dot{l}_1{}^2+\frac{m_3(m_2+m_1)}{2(m_1+m_2+m_3)}\dot{l}_2{}^2+\frac{m_3m_1}{m_1+m_2+m_3}\dot{l}_1\dot{l}_2$$

$$V=\frac{1}{2}k_1l_1{}^2+\frac{1}{2}k_2l_2{}^2$$

代入拉格朗日方程中，得到

$$\begin{cases}\dfrac{m_1(m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_3}\ddot{l}_1+\dfrac{m_3m_1}{m_1+m_2+m_3}\ddot{l}_2+k_1l_1=0\\[2ex]\dfrac{m_3m_1}{m_1+m_2+m_3}\ddot{l}_1+\dfrac{m_3(m_2+m_1)}{m_1+m_2+m_3}\ddot{l}_2+k_2l_2=0\end{cases}$$

令 $l_{1,2}=a_{1,2}\sin(\omega t+\varphi)$，可得系数方程

$$\begin{cases}\left[-\dfrac{m_1(m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_3}\omega^2+k_1\right]a_1-\dfrac{m_3m_1}{m_1+m_2+m_3}\omega^2a_2=0\\[2ex]-\dfrac{m_3m_1}{m_1+m_2+m_3}\omega^2a_1+\left[-\dfrac{m_3(m_2+m_1)}{m_1+m_2+m_3}\omega^2+k_2\right]a_2=0\end{cases}$$

久期方程为

$$\begin{vmatrix}-\dfrac{m_1(m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_3}\omega^2+k_1 & -\dfrac{m_3m_1}{m_1+m_2+m_3}\omega^2\\[2ex]-\dfrac{m_3m_1}{m_1+m_2+m_3}\omega^2 & -\dfrac{m_3(m_2+m_1)}{m_1+m_2+m_3}\omega^2+k_2\end{vmatrix}=0$$

化简为纵向振动频率满足

$$\omega^4-\left[k_1\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)+k_2\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}\right)\right]\omega^2+k_1k_2\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1m_2m_3}=0$$

对于横向振动频率，设三原子偏离平衡位置的坐标分别为 y_1, y_2, y_3，扣除整体平动和转动，只有一个自由度，相应约束方程为

$$\begin{cases}m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3=0\\ -m_1l_1y_1+m_3l_2y_3=0 \quad (以m_2为参考点)\end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1=-\frac{m_2l_2}{m_1(l_1+l_2)}y_2,\quad y_3=-\frac{m_2l_1}{m_3(l_1+l_2)}y_2$$

$$\Rightarrow \delta=\frac{y_2-y_1}{l_1}+\frac{y_2-y_3}{l_2}=\frac{m_2l_2}{l_1l_2(l_1+l_2)}\left[\frac{l_2^2}{m_1}+\frac{(l_1+l_2)^2}{m_2}+\frac{l_1^2}{m_3}\right]$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{2}k'\left(\frac{l_1+l_2}{2}\right)^2\delta^2=\frac{1}{8}k'\frac{m_2^2}{l_1^2l_2^2}\left[\frac{l_2^2}{m_1}+\frac{(l_1+l_2)^2}{m_2}+\frac{l_1^2}{m_3}\right]^2y_2^2$$

$$T=\frac{1}{2}(m_1\dot{y}_1^2+m_2\dot{y}_2^2+m_3\dot{y}_3^2)=\frac{1}{2}\frac{m_2^2}{(l_1+l_2)^2}\left[\frac{l_2^2}{m_1}+\frac{(l_1+l_2)^2}{m_2}+\frac{l_1^2}{m_3}\right]\dot{y}_2^2$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ \omega^2&=\frac{1}{4}k'\frac{m_2^2}{l_1^2l_2^2}\left[\frac{l_2^2}{m_1}+\frac{(l_1+l_2)^2}{m_2}+\frac{l_1^2}{m_3}\right]^2\Bigg/\frac{m_2^2}{(l_1+l_2)^2}\left[\frac{l_2^2}{m_1}+\frac{(l_1+l_2)^2}{m_2}+\frac{l_1^2}{m_3}\right]\\&=\frac{k'(l_1+l_2)^2}{4l_1^2l_2^2}\left[\frac{l_2^2}{m_1}+\frac{(l_1+l_2)^2}{m_2}+\frac{l_1^2}{m_3}\right]\end{aligned}$$

2.10 固有频率为ω_0、质量为 m 的两个一维振子以相互作用αx_1x_2耦合起来，x_1和 x_2 分别为两振子偏离平衡位置的位移，求该体系的拉格朗日函数，并求振动频率.

解 $$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2),\quad V=\frac{1}{2}m\omega_0(x_1^2+x_2^2)-\alpha x_1x_2$$

所以

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\omega_0(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\frac{1}{2}m\omega_0(x_1^2+x_2^2)+\alpha x_1x_2$$

代入拉格朗日方程中，得到

$$\begin{cases}m\ddot{x}_1+m\omega_0^2x_1-\alpha x_2=0\\ m\ddot{x}_2+m\omega_0^2x_2-\alpha x_1=0\end{cases}$$

令 $x_{1,2}=a_{1,2}\sin(\omega t+\varphi)$，得系数方程

$$
\begin{cases}
m(\omega_0^2-\omega^2)a_1-\alpha a_2=0\\
-\alpha a_1+m(\omega_0^2-\omega^2)a_2=0
\end{cases}
$$

久期方程为

$$
\begin{vmatrix}
m(\omega_0^2-\omega^2) & -\alpha\\
-\alpha & m(\omega_0^2-\omega^2)
\end{vmatrix}=m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2-\alpha^2=0
$$

解得

$$
\omega_1=\sqrt{\omega_0^2+\frac{\alpha}{m}},\quad \omega_2=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\alpha}{m}}
$$

2.11　如果有固有频率为ω_0、质量为 m 的三个一维振子依次相连，相邻的振子间有上题所述的耦合作用，求体系的拉格朗日函数和振动频率. 并尝试讨论 N 个振子的情形.

解　$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-\frac{1}{2}m\omega_0(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\alpha x_1x_2+\alpha x_2x_3$$

代入拉格朗日方程中得到

$$
\begin{cases}
m\ddot{x}_1+m\omega_0^2x_1-\alpha x_2=0\\
m\ddot{x}_2+m\omega_0^2x_2-\alpha x_1-\alpha x_3=0\\
m\ddot{x}_3+m\omega_0^2x_3-\alpha x_2=0
\end{cases}
$$

令 $x_{1,2,3}=a_{1,2,3}\sin(\omega t+\varphi)$，可得系数方程

$$
\begin{cases}
m(\omega_0^2-\omega^2)a_1-\alpha a_2=0\\
-\alpha a_1+m(\omega_0^2-\omega^2)a_2-\alpha a_3=0\\
-\alpha a_2+m(\omega_0^2-\omega^2)a_3=0
\end{cases}
$$

久期方程为

$$
\begin{vmatrix}
m(\omega_0^2-\omega^2) & -\alpha & 0\\
-\alpha & m(\omega_0^2-\omega^2) & -\alpha\\
0 & -\alpha & m(\omega_0^2-\omega^2)
\end{vmatrix}=m^3(\omega_0^2-\omega^2)^3-2\alpha^2m(\omega_0^2-\omega^2)=0
$$

解得

$$
\omega_1=\omega_0,\quad \omega_{2,3}=\sqrt{\omega_0^2\pm\frac{\sqrt{2}\alpha}{m}}
$$

推广到 N 个质点：

$$
T=\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_i^2,\quad V=\frac{1}{2}m\omega_0\sum_{i=1}^{N}x_i^2-\alpha\sum_{i=1}^{N-1}x_ix_{i+1}
$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_i^2 - \frac{1}{2}m\omega_0\sum_{i=1}^{N}x_i^2 + \alpha\sum_{i=1}^{N-1}x_i x_{i+1}$$

则由拉格朗日方程得到

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + m\omega_0^2 x_1 - \alpha x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + m\omega_0^2 x_2 - \alpha x_1 - \alpha x_3 = 0 \\ \qquad\qquad\cdots\cdots \\ m\ddot{x}_{N-1} + m\omega_0^2 x_{N-1} - \alpha x_{N-2} - \alpha x_N = 0 \\ m\ddot{x}_N + m\omega_0^2 x_N - \alpha x_{N-1} = 0 \end{cases}$$

令 $x_i = a_i\sin(\omega t + \varphi)$，代入上式得

$$\begin{cases} m(\omega_0^2 - \omega^2)a_1 - \alpha a_2 = 0 \\ -\alpha a_1 + m(\omega_0^2 - \omega^2)a_2 - \alpha a_3 = 0 \\ \qquad\qquad\cdots\cdots \\ -\alpha a_{N-2} + m(\omega_0^2 - \omega^2)a_{N-1} - \alpha a_N = 0 \\ -\alpha a_{N-1} + m(\omega_0^2 - \omega^2)a_N = 0 \end{cases}$$

久期方程为

$$D_N = \begin{vmatrix} m(\omega_0^2 - \omega^2) & -\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha & m(\omega_0^2 - \omega^2) & -\alpha & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & -\alpha & m(\omega_0^2 - \omega^2) & -\alpha \\ 0 & & & -\alpha & m(\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

满足递推关系 $D_N = m(\omega_0^2 - \omega^2)D_{N-1} - \alpha^2 D_{N-2} = 0$，得到 N 个不同振动频率.

注：可证 $D_N = \dfrac{\delta_1^N - \delta_2^N}{\delta_1 - \delta_2}$，其中 $\delta_{1,2} = \dfrac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{2} \pm \sqrt{\dfrac{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{4} - \alpha^2}$.

2.12　三个质点由一根弹性杆相连，试考察该系统在平面内的横向微振动. 设位能为 $V = \dfrac{1}{2}k(y_1 - 2y_2 + y_3)^2$，其中常数 k 正比于弯曲刚度，y_1, y_2, y_3 是三个质点的横向偏移. 试求该系统的固有频率及相应的一组正交模态列.

解　　$T = \dfrac{1}{2}m(\dot{y}_1{}^2 + \dot{y}_2{}^2 + \dot{y}_3{}^2)$，　$V = \dfrac{1}{2}k(y_1 - 2y_2 + y_3)^2$

由 $M_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial\dot{y}_\alpha\partial\dot{y}_\beta}$，$K_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y_\alpha\partial y_\beta}$ 可得

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix},\quad K = \begin{pmatrix} k & -2k & k \\ -2k & 4k & -2k \\ k & -2k & k \end{pmatrix}$$

振幅系数方程为

$$(K-\omega^2 M)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-\omega^2 m & -2k & k \\ -2k & 4k-\omega^2 m & -2k \\ k & -2k & k-\omega^2 m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

简正频率满足久期方程

$$\begin{vmatrix} k-\omega^2 m & -2k & k \\ -2k & 4k-\omega^2 m & -2k \\ k & -2k & k-\omega^2 m \end{vmatrix} = \omega^4 m^2 (6k-\omega^2 m) = 0$$

解得

$$\omega_{1,2} = 0, \quad \omega_3 = \sqrt{6k/m}$$

对于 $\omega_{1,2}$， $a_1 - 2a_2 + a_3 = 0$.

为保证 $\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2$ 是正交的单位矢量，可以取

$$\boldsymbol{Y}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{Y}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$$

对于 ω_3， $\begin{pmatrix} -5k & -2k & k \\ -2k & -2k & -2k \\ k & -2k & -5k \end{pmatrix}\boldsymbol{Y}_3 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{Y}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.13　质量为 m、摆长为 l 的单摆在阻尼介质中作小振动，阻力 $F=-2mkv$ ，求单摆的振动周期.

解　以悬挂点为势能零点

$$V = -mgl\cos\theta, \quad T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$F = -2mkv, \quad F = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \Rightarrow \mathcal{F} = mkv^2 = mkl^2\dot{\theta}^2$$

由拉格朗日方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial T}{\partial \theta} + \dfrac{\partial V}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\theta}} = 0$ 可得

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta + 2mkl^2\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + 2k\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

令 $\theta = a\mathrm{e}^{\lambda t}$，代入上式得

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow \lambda = -k \pm \sqrt{k^2 - \frac{g}{l}}$$

振荡解要求 $k^2 < \dfrac{g}{l}$，此时 $\theta = A\mathrm{e}^{-kt}\cos(\omega t - \varphi)$，其中 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l} - k^2}$ ，则

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - k^2 l}}$$

2.14　三个相同的滑块和两个相同的弹簧所组成的力学体系，开始时弹簧处于固有长度. 体系运动时，滑块所受阻力与速度的一次方成正比，比例系数为 c，求体系的振动频率.

解　设滑块偏离平衡位置距离分别为 x_1, x_2, x_3，

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1{}^2 + \dot{x}_2{}^2 + \dot{x}_3{}^2), \quad V = \frac{1}{2}k[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2]$$

$$f_i = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}_i} = -c\dot{x}_i \Rightarrow \mathcal{F} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} c\dot{x}_i^2$$

由拉格朗日方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}_i} = 0$ 可得

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 + c\dot{x}_1 = 0 \\ m\ddot{x}_1 - kx_1 + 2kx_2 - kx_3 + c\dot{x}_2 = 0 \\ m\ddot{x}_3 - kx_2 + kx_3 + c\dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

令 $x_i = a_i \mathrm{e}^{\lambda t} (i = 1, 2, 3)$，代入上式得

$$\begin{cases} (m\lambda^2 + k + \lambda c)a_1 - ka_2 = 0 \\ -ka_1 + (m\lambda^2 + 2k + \lambda c)a_2 - ka_3 = 0 \\ -ka_2 + (m\lambda^2 + k + \lambda c)a_3 = 0 \end{cases}$$

非零解振幅系数要求久期方程

$$\begin{vmatrix} m\lambda^2 + k + \lambda c & -k & 0 \\ -k & m\lambda^2 + 2k + \lambda c & -k \\ 0 & -k & m\lambda^2 + k + \lambda c \end{vmatrix}$$
$$= (m\lambda^2 + \lambda c + 3k)(m\lambda^2 + \lambda c + k)(m\lambda^2 + \lambda c) = 0$$

解得

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 12km}}{2m}, \quad \lambda_{3,4} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}, \quad \lambda_5 = 0, \quad \lambda_6 = -\frac{c}{m}$$

只有复数根对应振荡，当 $4mk < c^2 < 12mk$ 时，振动频率为 $\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$，当 $c^2 < 4mk$ 时，振动频率为 ω_1 和 $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$.

2.15　物体 A、B 和 C 质量均为 m，用两根劲度系数均为 k 的轻弹簧连接成直

线排列，开始时三个物体均静止在平衡位置，之后物体 A 受沿直线的外力 $F(t)=f\cos\omega t$ 策动，三者与各自平衡点的相对位移分别是 x_1、x_2 和 x_3，系统的耗散函数为 $\mathcal{F}=\dfrac{1}{2}\gamma[(\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2+(\dot{x}_2-\dot{x}_3)^2]$. 列出系统的拉格朗日函数和微分运动方程.

解
$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}m\dot{x}_i^{\,2},\quad V=\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2+\frac{1}{2}k(x_3-x_2)^2,\quad \mathcal{F}=-\frac{1}{2}\dot{x}_1 f\cos\omega t$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^{\,2}+\dot{x}_2^{\,2}+\dot{x}_3^{\,2})-\frac{1}{2}k[(x_2-x_1)^2+(x_3-x_2)^2]$$

由拉格朗日方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}-\dfrac{\partial T}{\partial x_i}+\dfrac{\partial V}{\partial x_i}+\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}_i}=Q_i(i=1,2,3)$ 得运动方程

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1+\gamma(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+k(x_1-x_2)=f\cos\omega t \\ m\ddot{x}_2+\gamma(-\dot{x}_1+2\dot{x}_2-\dot{x}_3)+k(-x_1+2x_2-x_3)=0 \\ m\ddot{x}_3+\gamma(-\dot{x}_2+\dot{x}_3)+k(-x_2+x_3)=0 \end{cases}$$

2.16　电感 L 与电阻 R_1 串接，再与电容 C 并联，有一个内阻为 R_2、频率为 ω 的简谐电源给它们供应能量. 写出电路的微分方程.

解　设通过 R_1，R_2 上的电流分别为 $\dot{e}_1,\dot{e}_2$，则流经 C 上的电流为 $\dot{e}_2-\dot{e}_1$，于是

$$T=\frac{1}{2}L\dot{e}_1^2,\quad V=\frac{1}{2C}(e_2-e_1)^2,\quad \mathcal{F}=\frac{1}{2}R_1\dot{e}_1^2+\frac{1}{2}R_2\dot{e}_2^2,\quad Q_1=0,\quad Q_2=A\sin\omega t$$

由 e_1,e_2 的拉格朗日方程得

$$\begin{cases} L\ddot{e}_1+R_1\dot{e}_1-\dfrac{e_2-e_1}{C}=0 \\ R_2\dot{e}_2+\dfrac{e_2-e_1}{C}=A\sin\omega t \end{cases}$$

2.17　用微扰论方法求解非线性振动方程 $\ddot{x}+\omega_0{}^2x=(1-x^2)\dot{x}$ 的二阶近似解.

解　令 $\begin{cases} x=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2 \\ \omega^2=\omega_0^2+\varepsilon C_1+\varepsilon^2C_2 \end{cases}$，代入振动方程中有

$$\begin{aligned}&(\ddot{x}_0+\varepsilon\ddot{x}_1+\varepsilon^2\ddot{x}_2)+(\omega^2-\varepsilon C_1-\varepsilon^2C_2)(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2)\\ &=\varepsilon(1-(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2)^2)(\dot{x}_0+\varepsilon\dot{x}_1+\varepsilon^2\dot{x}_2)\end{aligned}$$

忽略 ε 的 3 次以上项，分别列出 ε^0 、ε^1 、ε^2 项的系数方程如下:

$$\begin{cases} \ddot{x}_0+\omega^2x_0=0 \\ \ddot{x}_1+\omega^2x_1=(1-x_0^2)\dot{x}_0+C_1x_0 \\ \ddot{x}_2+\omega^2x_2=(1-x_0^2)\dot{x}_1-2x_1x_0\dot{x}_0+C_1x_1+C_2x_0 \end{cases}$$

零阶近似得到常规的谐振子方程为

$$x_0 = A\cos(\omega t+\varphi)$$

其中，A, φ 为待定常量，令 $\phi = \omega t+\varphi$，代入一阶近似中得到

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1+\omega^2 x_1 &= -\omega A\sin\phi+\omega A^3\cos^2\phi\sin\phi+C_1 A\cos\phi \\ &= \left(\frac{\omega A^3}{4}-\omega A\right)\sin\phi+\frac{\omega A^3}{4}\sin(3\phi)+C_1 A\cos\phi\end{aligned}$$

右端可视为振动的策动力，由于不存在耗散，为避免实际不存在的无穷大共振，第一项和第三项策动力必为零，即

$$\begin{cases}\dfrac{\omega A^3}{4}-\omega A=0 \\ C_1 A=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=2 \\ C_1=0\end{cases}$$

一阶近似方程化简为

$$\ddot{x}_1+\omega^2 x_1 = 2\omega\sin(3\phi)$$

设 $x_1 = A_1\sin(3\phi)$ 代入上式，可得 $A_1=-\dfrac{1}{4\omega}$，将 x_0 和 x_1 的解代入二阶近似方程得

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2+\omega^2 x_2 &= 3A_1\omega\cos 3\phi-3\omega A_1 A^2\cos^2\phi\cos 3\phi+2A_1A^2\omega\sin 3\phi\sin\phi\cos\phi+C_2 A\cos\phi \\ &= \left(3A_1\omega-\frac{3A_1A^2\omega}{2}\right)\cos 3\phi+\left(C_2A-\frac{A_1A^2\omega}{4}\right)\cos\phi-\frac{5A_1A^2\omega}{4}\cos 5\phi \\ &= \left(2C_2+\frac{1}{4}\right)\cos\phi+\frac{3}{4}\cos 3\phi+\frac{5}{4}\cos 5\phi\end{aligned}$$

为避免无穷大共振，$2C_2+\dfrac{1}{4}=0$，则 $C_2=-\dfrac{1}{8}$.

二阶近似方程化简为

$$\ddot{x}_2+\omega^2 x_2 = \frac{3}{4}\cos 3\phi+\frac{5}{4}\cos 5\phi$$

设 $x_2 = B_1\cos(3\phi)+B_2\cos(5\phi)$ $B_1=-\dfrac{3}{32\omega^2}$ 代入上式，可得

$$B_1=-\frac{3}{32\omega^2},\quad B_2=-\frac{5}{96\omega^2}$$

最终解：

$$x = 2\cos\phi-\frac{1}{4\omega}\sin(3\phi)-\frac{3}{32\omega^2}\cos(3\phi)-\frac{5}{96\omega^2}\cos(5\phi)$$

其中，$\phi=\omega t+\varphi$, $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\dfrac{1}{8}}$.

2.18　证明：由带电粒子在电磁场中的拉格朗日函数可以导出运动方程 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = e(E+v\times\boldsymbol{B})$.

证明
$$L = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - e(\varphi - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m\ddot{\boldsymbol{r}} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = -e\nabla\varphi + e\nabla(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) = -e\nabla\varphi + e(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + e\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$$

将上两式代入拉格朗日方程得

$$\begin{aligned} 0 &= m\ddot{\boldsymbol{r}} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} + e\nabla\varphi - e(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - e\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) \\ &= m\ddot{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + e\nabla\varphi - e\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = m\ddot{\boldsymbol{r}} - e\boldsymbol{E} - e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \end{aligned}$$

即满足运动方程

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = e(E + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

2.19　质量为 m、电荷为 q 的粒子在轴对称电场 $\boldsymbol{E} = E_0\,\boldsymbol{e}_R/R$ 和均匀磁场 $\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{e}_z$ 中运动. 求粒子的运动微分方程.

解　可设 $\varphi = E_0 \ln R$，可以取 $\boldsymbol{A} = \frac{B_0}{2}R\boldsymbol{e}_\theta$，位矢 $\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{e}_R + z\boldsymbol{e}_z$，速度为 $\boldsymbol{v} = \dot{R}\boldsymbol{e}_R + R\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{z}\boldsymbol{e}_z$，

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2), \qquad U = e(\varphi - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}) = e\left(-E_0 \ln R - \frac{1}{2}R^2\dot{\theta}B_0\right)$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + eE_0 \ln R + \frac{e}{2}R^2\dot{\theta}B_0$$

代入关于 R、θ和 z 的拉格朗日方程分别得

$$\begin{cases} m\ddot{R} - mR\dot{\theta}^2 - eE_0 / R - eB_0R\dot{\theta} = 0 \\ mR^2\ddot{\theta} + 2mR\dot{\theta}\dot{R} + eB_0R\dot{R} = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

由于θ和 z 均为循环坐标，后两式可积为

$$\begin{cases} m\ddot{R} - mR\dot{\theta}^2 - eE_0 / R - eB_0R\dot{\theta} = 0 \\ mR^2\dot{\theta} + 2mR\dot{\theta}\dot{R} + eB_0R^2 / 2 = C_1 \\ m\dot{z} = C_2 \end{cases}$$

2.20　一个粒子受到中心力 $F = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2}\right)$的作用而在一个平面内运动，求产生这个力的广义势能，并给出该体系的拉格朗日函数.

解
$$F=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{\dot{r}^2-2r\ddot{r}}{c^2}\right)=\frac{1}{r^2}+\frac{\dot{r}^2}{c^2r^2}+\frac{2r\ddot{r}-2\dot{r}^2}{c^2r^2}$$

$$\Rightarrow U=\frac{1}{r}+\frac{\dot{r}^2}{c^2r}$$

则中心力下，拉格朗日函数为

$$L=T-U=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{1}{r}\left(1+\frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)$$

第 3 章　哈密顿力学

3.1　写出自由质点在柱坐标和球坐标中的哈密顿函数.

解　（1）在柱坐标下

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)-V(r,\theta,z)$$

则广义动量

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r},\quad p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta},\quad p_z=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=m\dot{z}$$

哈密顿函数

$$\begin{aligned}H&=\sum_\alpha \dot{q}_\alpha p_\alpha-L=m\dot{r}^2+mr^2\dot{\theta}^2+m\dot{z}^2-\left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)-V(r,\theta,z)\right]\\&=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)+V(r,\theta,z)=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+p_z^2\right)+V(r,\theta,z)\end{aligned}$$

（2）在球坐标下

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)-V(r,\theta,\varphi)$$

则广义动量

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r},\quad p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta},\quad p_z=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$$

哈密顿函数

$$\begin{aligned}H&=\sum_\alpha \dot{q}_\alpha p_\alpha-L\\&=m\dot{r}^2+mr^2\dot{\theta}^2+mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2-\left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)-V(r,\theta,\varphi)\right]\\&=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)+V(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_z^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+V(r,\theta,\varphi)\end{aligned}$$

3.2　一质点 m 在 $F(x,t)=\dfrac{k}{x^2}\mathrm{e}^{-t/\tau}$ 作用下做一维运动，其中 k 和 τ 均为正的常数. 给出该体系的哈密顿函数，并与其总能量比较.

解　$$V=-\int_x^{\infty}F(x,t)\mathrm{d}x=\frac{k}{x}\mathrm{e}^{-t/\tau}，\quad L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{k}{x}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

广义动量

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$$

哈密顿函数

$$H=p\dot{x}-L=\frac{p^2}{2m}+\frac{k}{x}\mathrm{e}^{-t/\tau}=T+V$$

是总能量，但不守恒.

3.3　写出相对论粒子的哈密顿正则方程.

解　相对论粒子的拉格朗日函数

$$L=m_0c^2(1-\sqrt{1-\beta^2})-V(\boldsymbol{r}),\quad \beta=\frac{v}{c}=\frac{|\dot{\boldsymbol{r}}|}{c}$$

$$\boldsymbol{p}=\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}=\frac{m_0\dot{\boldsymbol{r}}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{m_0\dot{\boldsymbol{r}}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}}{c}\right)^2}},\ \Rightarrow \dot{\boldsymbol{r}}^2=\frac{c^2\dot{\boldsymbol{p}}^2}{m_0c^2+\dot{\boldsymbol{p}}^2}$$

$$H=\boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}-L=\frac{m_0\dot{\boldsymbol{r}}^2}{\sqrt{1-\beta^2}}-[m_0c^2(1-\sqrt{1-\beta^2})-V(\boldsymbol{r})]=c\sqrt{m_0^2c^4+p^2c^2}-m_0c^2+V(\boldsymbol{r})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dot{\boldsymbol{r}}=\dfrac{\partial H}{\partial \dot{\boldsymbol{p}}}=\dfrac{c\dot{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{m_0^2c^2+\dot{\boldsymbol{p}}^2}}\\[2ex] \dot{\boldsymbol{p}}=-\dfrac{\partial H}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}=-\dfrac{\partial V}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\end{cases}$$

3.4　计算非相对论情形电磁场中带电粒子的哈密顿正则方程.

解　带电粒子在电磁场中的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2-e\varphi+e\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$$

广义动量为

$$\boldsymbol{p}=\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}=m\dot{\boldsymbol{r}}+e\boldsymbol{A}$$

哈密顿函数为

$$H = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + e\varphi = \frac{(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2}{2m} + e\varphi$$

则哈密顿正则方程

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}}{m}$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{1}{2m}\nabla(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2 - e\nabla\varphi \\ &= e\dot{\boldsymbol{r}}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + e(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - e\nabla\varphi = e\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B} + e\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial A}{\partial t}\right) + e\left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) \\ &= e\dot{\boldsymbol{A}} + e(\boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

3.5　计算相对论情形电磁场中带电粒子的哈密顿正则方程.

解　相对论情形下，带电粒子在电磁场中的拉格朗日函数为

$$L = m_0c^2(1-\sqrt{1-\beta^2}) - e\varphi + e\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$$

广义动量为

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = \frac{m_0c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\boldsymbol{A}$$

则

$$H = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - L = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) + e\varphi = \sqrt{(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2 + e\varphi$$

正则方程为

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})c^2}{\sqrt{(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2c^2 + m_0^2c^4}}$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{c^2\nabla(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2}{2\sqrt{(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2c^2 + m_0^2c^4}} - e\nabla\varphi \\ &= e\dot{\boldsymbol{r}}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + e(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + e\left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) \\ &= e\left[(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right] + e\boldsymbol{E} + e\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B} = e\dot{\boldsymbol{A}} + e(\boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

3.6　一个系统的拉格朗日函数为 $L = \dot{q}^2 + q$，用哈密顿正则方程求解该系统的 $q(t)$.

解

$$L = \dot{q}^2 + q \Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 2\dot{q}$$

哈密顿量

$$H = p\dot{q} - L = \dot{q}^2 - q = \frac{p^2}{4} - q$$

由哈密顿正则方程

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{2} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = 1 \end{cases} \Rightarrow \ddot{q} = \frac{\dot{p}}{2} = \frac{1}{2}$$

积分得

$$q = \frac{1}{4}t^2 + At + B$$

其中，A 和 B 由初始条件决定.

3.7　一个单位质量的质点在极坐标表达的势能 $k\cos\theta/r^2$ 的一个平面上运动，其中 k 为常数. 求哈密顿正则方程.

解　极坐标下，拉格朗日量

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k\cos\theta}{r^2}$$

则

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = r^2\dot{\theta}$$

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + \frac{k\cos\theta}{r^2}$$

哈密顿正则方程为

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} = p_r \\ \dot{p}_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} = \dfrac{p_\theta^2}{r^3} + \dfrac{2k\cos\theta}{r^3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{r^2} \\ \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = \dfrac{k\sin\theta}{r^2} \end{cases}$$

3.8　抛物线状的光滑金属丝 $y = ax^2$ 绕其竖直方向的对称轴以匀角速度ω转动，一质量为 m 的小环套在金属丝上可自由滑动. 以小环的 x 坐标写出小环的哈密顿函数，并由此导出 x 所满足的运动微分方程.

解　对于抛物线轨道 $y = ax^2$，$\dot{y} = 2ax\dot{x}$，

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \omega^2x^2) = \frac{1}{2}m[(1 + 4a^2x^2)\dot{x}^2 + \omega^2x^2], \quad V = mgy = mgax^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m[(1 + 4a^2x^2)\dot{x}^2 + \omega^2x^2] - mgax^2$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(1+4a^2x^2)\dot{x}$$

$$\begin{aligned}H &= p_x\dot{x} - L = m(1+4a^2x^2)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m[(1+4a^2x^2)\dot{x}^2 + \omega^2x^2] + mgax^2 \\ &= \frac{1}{2}m(1+4a^2x^2)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + mgax^2 \\ &= \frac{1}{2m}\frac{p_x{}^2}{1+4a^2x^2} - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + mgax^2\end{aligned}$$

哈密顿正则方程为

$$\begin{cases}\dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} = \dfrac{1}{m}\dfrac{p_x}{1+4a^2x^2} \\ \dot{p}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = \dfrac{1}{m}\dfrac{4a^2xp_x{}^2}{(1+4a^2x^2)^2} + m\omega^2x - 2mgax\end{cases}$$

消去 p_x 得

$$(1+4a^2x^2)\ddot{x} + 4a^2x\dot{x}^2 - (\omega^2 - 2ga)x = 0$$

3.9　质点 m 在重力下沿 $z = k\theta$, $r = a$ 的螺线运动，其中 k 和 a 为常数. 求哈密顿正则方程.

解

$$T = \frac{1}{2}m(k^2\dot{\theta}^2 + a^2\dot{\theta}^2), \quad V = mgz = mgk\theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(k^2\dot{\theta}^2 + a^2\dot{\theta}^2) - mgk\theta$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(k^2 + a^2)\dot{\theta}$$

$$H = p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{1}{2}m(k^2\dot{\theta}^2 + a^2\dot{\theta}^2) + mgk\theta = \frac{p_\theta{}^2}{2m(k^2+a^2)} + mgk\theta$$

哈密顿正则方程为

$$\begin{cases}\dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{m(k^2+a^2)} \\ \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = -mgk\end{cases}$$

3.10　质量为 m 的质点受重力作用，被约束在半顶角为α的竖直光滑圆锥面内运动. 以柱坐标 r 和θ为广义坐标，写出质点的哈密顿函数和关于 r 的运动微分方程.

解　对于轨道 $r = z\tan\alpha$, $\dot{r} = \dot{z}\tan\alpha$，

$$T=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2+\dot z^2)=\frac{1}{2}m\left(\frac{\dot r^2}{\sin^2\alpha}+r^2\dot\theta^2\right),\quad V=mgr\cot\alpha$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\left(\frac{\dot r^2}{\sin^2\alpha}+r^2\dot\theta^2\right)-\frac{mgr}{\tan\alpha}$$

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial\dot r}=\frac{m\dot r}{\sin^2\alpha},\quad p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}=mr^2\dot\theta$$

$$\begin{aligned}H=p_r\dot r+p_\theta\dot\theta-L&=\frac{\dot r^2}{\sin^2\alpha}+r^2\dot\theta^2-\frac{1}{2}m\left(\frac{\dot r^2}{\sin^2\alpha}+r^2\dot\theta^2\right)+mgr\cot\alpha\\&=\frac{1}{2}m\left(\frac{\dot r^2}{\sin^2\alpha}+r^2\dot\theta^2\right)+\frac{mgr}{\tan\alpha}=\frac{\sin^2\alpha\, p_r^2}{2m}+\frac{p_\theta{}^2}{2mr^2}+mgr\cot\alpha\end{aligned}$$

θ为循环坐标，$p_\theta=mr^2\dot\theta$ 为运动积分. 径向满足的哈密顿正则方程为

$$\begin{cases}\dot r=\dfrac{\partial H}{\partial p_r}=\dfrac{\sin^2\alpha\, p_r}{m}\\[2ex]\dot p_r=-\dfrac{\partial H}{\partial r}=\dfrac{p_\theta{}^2}{mr^3}-\dfrac{mg}{\tan\alpha}\end{cases}$$

可化成运动方程

$$\ddot r-\left(\frac{p_\theta\sin\alpha}{m}\right)^2\frac{1}{r^3}+g\sin\alpha\cos\alpha=0$$

3.11　一个质量为 m 的质点在重力作用下在旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 内滑动，z 轴竖直向上. 用劳斯方程导出柱坐标中非循环坐标的运动方程.

解　系统动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2+4r^2\dot r^2)$$

以 $z=0$ 面为零势面，则系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2+4r^2\dot r^2)-mgr^2$$

易知 θ 是循环坐标，$p_\theta=\dfrac{\partial L}{\partial\dot\theta}=mr^2\dot\theta$ 为运动积分.

故劳斯函数

$$R=\dot\theta p_\theta-L=\frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2-\frac{1}{2}m(\dot r^2+4r^2\dot r^2)+mgr^2=\frac{p_\theta{}^2}{2mr^2}-\frac{1}{2}m\dot r^2(1+4r^2)+mgr^2$$

$$\dot p_\theta=-\frac{\partial R}{\partial\theta}=0,\quad \dot\theta=\frac{\partial R}{\partial p_\theta}=\frac{1}{mr^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial\dot r}=-m\dot r(1+4r^2),\quad \frac{\partial R}{\partial r}=-\frac{p_\theta^2}{mr^3}-4m\dot r^2r+2mgr$$

代入$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial R}{\partial \dot{r}}-\dfrac{\partial R}{\partial r}=0$得到

$$(1+4r^2)\ddot{r}+4r\dot{r}^2-\frac{p_\theta^2}{m^2r^3}+2gr=0$$

3.12　一个力学体系动能和势能分别为$\dfrac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2+\dfrac{\dot{q}_2^2}{a+bq_1^2}\right)$和$\dfrac{1}{2}(k_1q_1^2+k_2)$，其中 a，b，k_1 和 k_2 均为常量，写出劳斯函数和劳斯方程.

解　拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2+\frac{\dot{q}_2^2}{a+bq_1^2}\right)-\frac{1}{2}(k_1q_1^2+k_2)$$

易知q_2为循环坐标，$p_2=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}=\dfrac{\dot{q}_2}{a+bq_1^2}$为运动积分，故劳斯函数

$$R=\dot{q}_2p_2-L=\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_2^2}{a+bq_1^2}-\frac{1}{2}\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}(k_1q_1^2+k_2)=\frac{1}{2}p_2{}^2(a+bq_1^2)-\frac{1}{2}\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}(k_1q_1^2+k_2)$$

$$\dot{p}_2=-\frac{\partial R}{\partial q_2}=0,\quad \dot{q}_2=\frac{\partial R}{\partial p_2}=p_2(a+bq_1^2)$$

代入$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial R}{\partial \dot{q}_1}-\dfrac{\partial R}{\partial q_1}=0$，得到

$$\ddot{q}_1+q_1(bp_2^2+k_1)=0$$

3.13　证明$Q_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}q_1-\dfrac{1}{2}q_2$，$Q_2=\dfrac{1}{2}q_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}q_2$，$P_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}p_1-\dfrac{1}{2}p_2$，$P_2=\dfrac{1}{2}p_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}p_2$是正则变换.

证明

$$\begin{aligned}
&\sum_\alpha p_\alpha\delta q_\alpha-P_\alpha\delta Q_\alpha\\
&=p_1\delta q_1+p_2\delta q_2-P_1\delta Q_1-P_2\delta Q_2\\
&=p_1\delta q_1+p_2\delta q_2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}p_1-\frac{1}{2}p_2\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\delta q_1-\frac{1}{2}\delta q_2\right)-\left(\frac{1}{2}p_1+\frac{\sqrt{3}}{2}p_2\right)\left(\frac{1}{2}\delta q_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\delta q_2\right)\\
&=p_1\delta q_1+p_2\delta q_2-(p_1\delta q_1+p_2\delta q_2)=0
\end{aligned}$$

故为正则变换.

3.14　证明 $q=\sqrt{\dfrac{2Q}{k}}\cos P$，$p=\sqrt{2kQ}\sin P$ 是正则变换. 若原哈密顿函数 $H=\dfrac{1}{2}(p^2+k^2q^2)$，求用新的正则变量表示的哈密顿函数和哈密顿正则方程.

证明

$$
\begin{aligned}
p\delta q-P\delta Q&=\sqrt{2kQ}\sin P\delta\left(\sqrt{\frac{2Q}{k}}\cos P\right)-P\delta Q\\
&=\sqrt{2kQ}\sin P\left[\sqrt{\frac{2}{k}}\cos P\frac{1}{2}Q^{-\frac{1}{2}}\delta Q+\sqrt{\frac{2Q}{k}}(-\sin P)\delta P\right]-P\delta Q\\
&=(\sin P\cos P-P)\delta Q-2Q\sin^2 P\delta P=\delta\left[Q\left(\frac{1}{2}\sin 2P-P\right)\right]
\end{aligned}
$$

可以写成全变分的形式，故是正则变换，

$$
H'=\frac{1}{2}(p^2+k^2q^2)=\frac{1}{2}\left(2kQ\sin^2 P+k^2\frac{2Q}{k}\cos^2 P\right)=kQ
$$

其哈密顿正则方程为

$$
\dot{Q}=\frac{\partial H'}{\partial P}=0,\quad \dot{P}=-\frac{\partial H'}{\partial Q}=-k
$$

3.15　证明 $Q=q^2+\dfrac{p^2}{n^2}$，$P=\dfrac{n}{2}\arctan\left(\dfrac{p}{nq}\right)$ 是正则变换，其中 n 是常数.

证明

$$
\begin{aligned}
p\delta q-P\delta Q&=p\delta q-\frac{n}{2}\arctan\left(\frac{p}{nq}\right)\delta\left(q^2+\frac{p^2}{n^2}\right)\\
&=\left[p-nq\arctan\left(\frac{p}{nq}\right)\right]\delta q-\frac{p}{n}\arctan\left(\frac{p}{nq}\right)\delta q
\end{aligned}
$$

因为

$$
\frac{\partial}{\partial p}\left[p-nq\arctan\left(\frac{p}{nq}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial q}\left[-\frac{p}{n}\arctan\left(\frac{p}{nq}\right)\right]=\frac{p^2}{n^2q^2+p^2}
$$

所以 $p\delta q-P\delta Q$ 可写成某个函数的全变分，即该变换是正则变换.

3.16　证明 $Q=q+te^p$，$P=p$ 是正则变换，并求生成函数 $F_1(q,Q,t)$.

解　　$p\delta q-P\delta Q=p\delta q-p(\delta q+te^p\delta p)=-pte^p\delta p$

又 $\dfrac{\partial(-pte^p)}{\partial q}=0$，故 $p\delta q-P\delta Q$ 可以写成某个函数的全变分，即该变换为正则变换.

生成函数满足

$$
\frac{\partial F_1}{\partial q}=p=\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right),\quad \frac{\partial F_1}{\partial Q}=P=-\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)
$$

则

$$F_1=\int \ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)\mathrm{d}q+f(Q)=(q-Q)\ln(Q-q)-q-q\ln t+f(Q)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q}=-\ln(Q-q)-1+f'(Q)=-\ln(Q-q)+\ln t$$

解得 $f(Q)=Q\ln t+Q$，

$$\Rightarrow F_1=(Q-q)\left(1-\ln\frac{Q-q}{t}\right)$$

3.17　质量为 m 的粒子在圆柱对称的势场中运动，对称轴为 z 轴. 作变换

$$X=x\cos\omega t+y\sin\omega t,\quad Y=-x\sin\omega t+y\cos\omega t,\quad Z=z$$

如果这是一个正则变换，写出变换的母函数和新的哈密顿函数.

解　新旧坐标的变换为

$$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t & 0\\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

可简记为 $X_i=\sum_j A_{ij}x_j$，设新旧动量的变换为 $P_i=\sum_j B_{ij}p_j$，正则变换要求 $[X_i,P_j]=\delta_{ij}$，即

$$[X_i,P_j]=\left[\sum_k A_{ik}x_k,\sum_l B_{jl}p_l\right]=\sum_{kl}[A_{ik}x_k,B_{jl}p_l]=\sum_{kl}A_{ik}B_{jl}\delta_{kl}=\sum_{kl}A_{ik}B_{jk}=\delta_{ij}$$

写成矩阵形式为 $AB^{\mathrm{T}}=I$，由于 A 是正交矩阵，$B=A$.

$$\sum_i p_i\delta x_i+X_i\delta P_i=\sum_{ij}A_{ji}P_j\delta x_i+\sum_{ij}A_{ij}x_j\delta P_i=\delta\sum_{ij}P_iA_{ij}x_j=\delta F_2$$

$$\Rightarrow F_2=\sum_{ij}P_iA_{ij}x_j=(x\cos\omega t+y\sin\omega t)P_X+(-x\sin\omega t+y\cos\omega t)P_Y+zP_Z$$

因为

$$H=\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m}+V(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

所以

$$K=H+\frac{\partial F_2}{\partial t}=H+\omega[(-x\sin\omega t+y\cos\omega t)P_X+(-x\cos\omega t-y\sin\omega t)P_Y]$$

$$=\frac{P_X^2+P_Y^2+P_Z^2}{2m}+V(\sqrt{X^2+Y^2+Z^2})+\omega(YP_X-XP_Y)$$

3.18　证明泊松括号的前 5 个性质.

泊松括号的前 5 个性质：

1．反对称性 $[u,v]=-[v,u]$

$$[u,v]=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial u}{\partial q_\alpha}\frac{\partial v}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial u}{\partial p_\alpha}\frac{\partial v}{\partial q_\alpha}\right)=-\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial v}{\partial q_\alpha}\frac{\partial u}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial v}{\partial p_\alpha}\frac{\partial u}{\partial q_\alpha}\right)=-[v,u]$$

2．微商性质 $\frac{\partial}{\partial x}[u,v]=\left[\frac{\partial u}{\partial x},v\right]+\left[u,\frac{\partial v}{\partial x}\right]$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}[u,v]&=\frac{\partial}{\partial x}\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial u}{\partial q_\alpha}\frac{\partial v}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial u}{\partial p_\alpha}\frac{\partial v}{\partial q_\alpha}\right)\\&=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial q_\alpha}\frac{\partial v}{\partial p_\alpha}+\frac{\partial u}{\partial q_\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial p_\alpha}\frac{\partial v}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial u}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial q_\alpha}\right)\\&=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial u}{\partial q_\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\&=\left[\frac{\partial u}{\partial x},v\right]+\left[u,\frac{\partial v}{\partial x}\right]\end{aligned}$$

3．分配率 $[u,v+w]=[u,v]+[u,w]$

$$\begin{aligned}[u,v+w]&=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial u}{\partial q_\alpha}\frac{\partial(v+w)}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial u}{\partial p_\alpha}\frac{\partial(v+w)}{\partial q_\alpha}\right)\\&=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial u}{\partial q_\alpha}\frac{\partial v}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial u}{\partial p_\alpha}\frac{\partial v}{\partial q_\alpha}\right)+\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial u}{\partial q_\alpha}\frac{\partial w}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial u}{\partial p_\alpha}\frac{\partial w}{\partial q_\alpha}\right)\\&=[u,v]+[u,w]\end{aligned}$$

4．结合律 $[u,vw]=[u,v]w+v[u,w]$

$$\begin{aligned}[u,vw]&=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial u}{\partial q_\alpha}\frac{\partial(vw)}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial u}{\partial p_\alpha}\frac{\partial(vw)}{\partial q_\alpha}\right)\\&=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial u}{\partial q_\alpha}\frac{\partial v}{\partial p_\alpha}w+v\frac{\partial u}{\partial q_\alpha}\frac{\partial w}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial u}{\partial p_\alpha}\frac{\partial v}{\partial q_\alpha}w-v\frac{\partial u}{\partial p_\alpha}\frac{\partial w}{\partial q_\alpha}\right)\\&=[u,v]w+v[u,w]\end{aligned}$$

5．涉及广义坐标和广义动量的泊松括号

$$[q_\alpha,q_\beta]=0,\quad [p_\alpha,p_\beta]=0,\quad [q_\alpha,p_\beta]=\delta_{\alpha\beta}$$

$$[q_\alpha,f]=\frac{\partial f}{\partial p_\alpha},\quad [p_\alpha,f]=-\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}$$

$$[q_\alpha,q_\beta]=\sum_{\gamma=1}^{s}\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\gamma}\frac{\partial q_\beta}{\partial p_\gamma}-\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_\gamma}\frac{\partial q_\beta}{\partial q_\gamma}\right)=0,\quad [p_\alpha,p_\beta]=\sum_{\gamma=1}^{s}\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\gamma}\frac{\partial p_\beta}{\partial p_\gamma}-\frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\gamma}\frac{\partial p_\beta}{\partial q_\gamma}\right)=0$$

$$\left[q_\alpha, p_\beta\right] = \sum_{\gamma=1}^{s}\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\gamma}\frac{\partial p_\beta}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_\gamma}\frac{\partial p_\beta}{\partial q_\gamma}\right) = \sum_{\gamma=1}^{s}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\gamma} - 0) = \delta_{\alpha\beta}$$

$$\left[q_\alpha, f\right] = \sum_{\beta=1}^{s}\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\beta}\frac{\partial f}{\partial p_\beta} - \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_\beta}\frac{\partial f}{\partial q_\beta}\right) = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}$$

$$\left[p_\alpha, f\right] = \sum_{\beta=1}^{s}\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta}\frac{\partial f}{\partial p_\beta} - \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta}\frac{\partial f}{\partial q_\beta}\right) = -\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}$$

3.19　证明：以 r^2, p^2 和 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}$ 为自变量的任意函数 f 与角动量分量 J_z 的泊松括号为零.

证明　$f = f(r^2, p^2, \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})$，其中 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p} = xp_x + yp_y + zp_z$，$J_z = xp_y - yp_x$.

$$\begin{aligned}
[f, J_z] &= \sum_\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial J_z}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial J_z}{\partial q_\alpha}\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial J_z}{\partial p_x} - \frac{\partial f}{\partial p_x}\frac{\partial J_z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial J_z}{\partial p_y} - \frac{\partial f}{\partial p_y}\frac{\partial J_z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial J_z}{\partial p_z} - \frac{\partial f}{\partial p_z}\frac{\partial J_z}{\partial x} \\
&= -y\frac{\partial f}{\partial x} - p_y\frac{\partial f}{\partial p_x} + x\frac{\partial f}{\partial y} + p_x\frac{\partial f}{\partial p_y} \\
&= -y\left(\frac{\partial f}{\partial r^2}2x + \frac{\partial f}{\partial(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})}p_x\right) - p_y\left(\frac{\partial f}{\partial p^2}2p_x + \frac{\partial f}{\partial(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})}x\right) \\
&\quad + x\left(\frac{\partial f}{\partial r^2}2y + \frac{\partial f}{\partial(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})}p_y\right) + p_x\left(\frac{\partial f}{\partial p^2}2p_y + \frac{\partial f}{\partial(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})}y\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

3.20　已知系统的哈密顿函数为 $H = H[f(q_1, p_1), q_2, p_2, t]$，证明 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t = 0$.

证明　$H = H[f(q_1, p_1), q_2, p_2, t]$，又 f 与 $q_2 p_2$ 无关，

$$[f, H] = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0$$

3.21　证明上题结论可进一步推广为：若系统的哈密顿函数可写成下列形式，则 f 守恒.

$$H = H[f(q_1, q_2, \cdots, q_m; p_1, p_2, \cdots, p_m); q_{m+1}, \cdots, q_s; p_{m+1}, \cdots, p_2; t]$$

证明　$\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$；当 $\alpha > m$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial q_\alpha} = 0$，所以

$$[f,H]=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)=\sum_{\alpha=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+[f,H]=0\text{，即 }f\text{ 守恒}$$

3.22　设 φ 是坐标和动量的任意标量函数，证明 $[\varphi,J_z]=0$.

解　φ 是坐标和动量的任意标量函数，即 φ 可以表示为 $\varphi=\varphi(r^2,\ p^2,\ \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})$，以下证明见 3.19 题解.

3.23　质点在势场 $V=\dfrac{a}{r^2}-\dfrac{bz}{r^3}$ 中运动，a 和 b 是常数. 求哈密顿主函数和哈密顿特征函数.

解　拉格朗日函数

$$L=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2+r^2\sin^2\theta\cdot\dot\varphi^2)-\frac{a}{r^2}+\frac{b\cos\theta}{r^2}$$

则广义动量

$$p_r=\frac{\partial H}{\partial\dot r}=m\dot r,\quad p_\theta=\frac{\partial H}{\partial\dot\theta}=mr^2\dot\theta,\quad p_\varphi=\frac{\partial H}{\partial\dot\varphi}=mr^2\sin^2\theta\cdot\dot\varphi$$

所以哈密顿函数

$$H=p_r\dot r+p_\theta\dot\theta+p_\varphi\dot\varphi-L=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right)+\frac{a}{r^2}-\frac{b\cos\theta}{r^2}$$

令 $p_r=\dfrac{\partial W}{\partial r}$，$p_\theta=\dfrac{\partial W}{\partial\theta}$，$p_\varphi=\dfrac{\partial W}{\partial\varphi}$，则

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2\right]+\frac{a}{r^2}-\frac{b\cos\theta}{r^2}=E$$

整理得

$$r^2\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+2ma-2mEr^2+\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2-2mb\cos\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2=0 \qquad ①$$

分离变量 $W(r,\theta,\varphi)=W_r(r)+W_\theta(\theta)+W_\varphi(\varphi)$，$H$ 不显含 φ，则 p_φ 为运动积分，令 $p_\varphi=C_2$，即 $W_\varphi(\varphi)=C_2\varphi$，代入式①得

$$\begin{cases}r^2\left(\dfrac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2-2mEr^2=-C_1\\[2ex]\left(\dfrac{\partial W_\theta}{\partial\theta}\right)^2+\dfrac{C_2^2}{\sin^2\theta}-2mb\cos\theta+2ma=C_1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} W_r(r) = \int \sqrt{2mE - \dfrac{C_1}{r^2}}\mathrm{d}r \\ W_\theta(\theta) = \int \sqrt{C_1 + 2mb\cos\theta - \dfrac{C_2^2}{\sin^2\theta} - 2ma}\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

即哈密顿特征函数

$$W = C_2\varphi + \int \sqrt{2mE - \frac{C_1}{r^2}}\mathrm{d}r + \int \sqrt{C_1 + 2mb\cos\theta - \frac{C_2^2}{\sin^2\theta} - 2ma}\mathrm{d}\theta$$

哈密顿主函数

$$S = -Et + W$$

3.24　用哈密顿-雅可比方程求解第 3.6 题.

解

$$L = \dot{q}^2 + q$$

广义动量

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 2\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{1}{2}p \Rightarrow H = \frac{1}{4}p^2 - q$$

令 $p = \dfrac{\partial W}{\partial q}$，则

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 - q = E \Rightarrow W = \frac{4}{3}(q+E)^{\frac{3}{2}}$$

新坐标

$$\xi = -t + \frac{\partial W}{\partial E} = -t + 2(q+E)^{\frac{1}{2}}$$

反解可得

$$q = \frac{1}{4}(\xi + t)^2 - E$$

3.25　用哈密顿-雅可比方程求哈密顿函数为 $H = p^2 - q$ 的体系的运动.

解　根据哈密顿函数得哈-雅方程

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 - q = E \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \pm\sqrt{E+q}$$

则哈密顿特征函数

$$W = \pm\frac{2}{3}(E+q)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\xi = -t + \frac{\partial W}{\partial E} = -t \pm \sqrt{E+q}$$

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \pm\sqrt{E+q} = \xi + t, \quad q = (\xi+t)^2 - E$$

3.26　体系的哈密顿 $H = \frac{p_1^{\ 2}}{2m} + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2$，用哈密顿-雅可比方程求解轨道方程.

解　由哈密顿函数得哈-雅方程

$$E = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2} - kq_1\right)^2$$

设 $W = W_1(q_1) + W_2(q_2)$，由于 q_2 为循环坐标，p_2 为运动积分，可令 $\frac{\partial W_2}{\partial q_2} = C_1$，所以

$$E = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{2m}(C_1 - kq_1)^2$$

$$\Rightarrow W_1 = \pm\int\sqrt{2mE - (C_1 - kq_1)^2}\,\mathrm{d}q_1, \quad W_2 = C_1 q_2 + C'$$

$$\Rightarrow W = \pm\int\sqrt{2mE - (C_1 - kq_1)^2}\,\mathrm{d}q_1 + C_1 q_2 + C'$$

所以

$$\frac{\partial W}{\partial C_1} = \pm\int\frac{C_1 - kq_1}{\sqrt{2mE - (C_1 - kq_1)^2}}\mathrm{d}q_1 + q_2 = C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = \pm\frac{1}{k}\sqrt{2mE - (C_1 - kq_1)^2} + q_2$$

轨道方程为

$$\left(q_1 - \frac{C_1}{k}\right)^2 + (q_2 - C_2)^2 = \frac{2mE}{k^2}$$

3.27　质点 m 做斜抛运动，初速度为 v_0，水平仰角为 α. 用哈密顿-雅可比方程求解.

解　哈密顿函数 $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + mgy$，哈-雅方程

$$E = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right] + mgy$$

由于 x 是循环坐标，$p_x = \frac{\partial W}{\partial x}$ 为常数，记为 C_1.

设 $W=W_1(x)+W_2(y)$，则有

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right)^2=2mE-2m^2gy-\left(\frac{\partial W_2}{\partial y}\right)^2=C_1^2$$

则解得

$$W_1=C_1x+C',\quad W_2=\pm\int\sqrt{2mE-C_1{}^2-2m^2gy}\,\mathrm{d}y$$

所以

$$W=C_1x\pm\int\sqrt{2mE-C_1^2-2m^2gy}\,\mathrm{d}y+C'$$

$$\frac{\partial W}{\partial C_1}=x\pm\int\frac{C_1}{\sqrt{2mE-C_1^2-2m^2gy}}\mathrm{d}y=x\pm\frac{C_1}{m^2g}\sqrt{2mE-C_1^2-2m^2gy}=x_0$$

代入 $C_1=p_x=mv_0\cos\alpha$，$E=\dfrac{1}{2}mv_0^2$，解得

$$y=\frac{2mE-C_1^2-\dfrac{m^4g^2(x-x_0)^2}{C_1^2}}{2m^2g}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}-\frac{g(x-x_0)^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

设初始时刻质点在原点，可得 $x_0=\dfrac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}$，代入上式化简得轨道方程

$$y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

3.28　一系统 $T=\dfrac{1}{2}(A_1+A_2+\cdots+A_s)(B_1\dot{q}_1^2+B_2\dot{q}_2^2+\cdots+B_s\dot{q}_s^2)$, $V=\dfrac{V_1+V_2+\cdots+V_s}{A_1+A_2+\cdots+A_s}$, 其中 A_α、B_α和 V_α都只是一个参数 q_α的函数. 证明此系统的运动问题可用积分法求解.

解　由题意，

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}=\sum\nolimits_\beta A_\beta B_\alpha\dot{q}_\alpha=p_\alpha$$

所以

$$\dot{q}_\alpha=\frac{p_\alpha}{B_\alpha\sum\nolimits_\beta A_\beta}$$

$$H=T+V=\frac{1}{2}\sum\nolimits_\beta A_\beta\sum\nolimits_\beta B_\beta\dot{q}_\beta^2+\frac{\sum\nolimits_\beta V_\beta}{\sum\nolimits_\beta A_\beta}=\sum\nolimits_\beta\left(\frac{p_\beta^2}{2B_\beta}+V_\beta\right)\Big/\sum\nolimits_\beta A_\beta$$

哈-雅方程为

$$\sum\nolimits_\beta\left(\frac{1}{2B_\beta}\left(\frac{\partial W}{\partial q_\beta}\right)^2+V_\beta\right)\Big/\sum\nolimits_\beta A_\beta=E$$

用分离变量法，设 $W=\sum_\beta W_\beta(q_\beta)$，则上式变形为

$$\sum_\beta\left(\frac{1}{2B_\beta}\left(\frac{\mathrm{d}W_\beta}{\mathrm{d}q_\beta}\right)^2+V_\beta-EA_\beta\right)=0$$

由于各 W_β 无关，所以有

$$\frac{1}{2B_\beta}\left(\frac{\mathrm{d}W_\beta}{\mathrm{d}q_\beta}\right)^2+V_\beta-EA_\beta=C_\beta$$

其中，C_β为常数，且满足约束 $\sum_\beta C_\beta=0$，最终积分得

$$W_\beta=\int\sqrt{2B_\beta(EA_\beta-V_\beta+C_\beta)}\mathrm{d}q_\beta$$

3.29　验证玻尔氢原子模型满足位力定理.

证明　设圆周运动的半径为 a，则

$$ma\dot{\varphi}^2-\frac{ke^2}{a^2}=0$$

$$T=\frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2=\frac{kq^2}{2a},\quad V=-\frac{kq^2}{a}$$

则对任意时刻，$T=-\frac{1}{2}V$，所以

$$\overline{T}=-\frac{1}{2}\overline{V}$$

满足位力定理.

3.30　验证行星的椭圆轨道运动满足位力定理.

证明　设椭圆半长轴为 a，半短轴为 b，焦距长为 c.

令 $p=\frac{b^2}{a}$, $e=\frac{c}{a}$，椭圆轨道方程为 $r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}$，又 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{S}{T}$，则

$$\begin{aligned}\overline{V}&=\frac{1}{T}\int_0^T-\frac{GMm}{r}\mathrm{d}t=-\frac{GMm}{S}\iint_S\frac{1}{r}\mathrm{d}S=-\frac{GMm}{\pi ab}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\varphi\\&=-\frac{GMm}{2\pi ab}\int_0^{2\pi}\frac{p}{1+e\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi=-\frac{GMm}{2\pi ab}\frac{2p\pi}{\sqrt{1-e^2}}=-\frac{GMm}{a}\end{aligned}$$

能量守恒：

$$\overline{T+V}=T+V=-\frac{GMm}{2a}=\frac{1}{2}\overline{V}$$

$$\Rightarrow\overline{T}=-\frac{1}{2}\overline{V}$$

满足位力定理.

第 4 章　刚体的运动

4.1　证明刚体上任意两点的速度在两点连线方向的分量相等.

证明　考察质点 1 和质点 2，$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_c+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_c+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_2$，则

$$(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)=[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)]\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)=[(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\times(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)]\cdot\boldsymbol{\omega}=0$$

可见$\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$在$\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$方向（连线方向）无投影，故$\boldsymbol{v}_1$和$\boldsymbol{v}_2$在该方向分量相等.

4.2　半球形碗的半径为 R，长为 l 的杆的 A 端在碗内滑动，并斜靠在碗的边缘 P. 如果杆始终处于一个固定的竖直平面内，求杆上任一点的轨迹及转动瞬心的轨迹.

解　以 P 点为原点，考虑杆上任一点 B，与 A 端相距 a，杆与 x 轴的夹角为θ，B 点的轨迹方程为

$$r=2R\cos\theta-a$$

设转动瞬心为 C，则 AC 经过圆心，且 $PC\perp AP$，所以 C 就是 A 点关于竖直圆环的对径点，在惯性坐标系下的轨迹为 $x'^2+y'^2=R^2$，是此圆的上半部分.

在以 A 点为原点的本体坐标系中，$\overline{CA}=2R$，即 $x^2+y^2=4R^2$.

4.3　陀螺以常角速度 ω 自转，其 z 轴以常角速度 ω_1 绕铅直线扫出一个顶角为 2θ 的圆锥. 求此陀螺总角速度的大小和方向.

解　ω_1沿竖直方向，ω在竖直方向的分量为$\omega\cos\theta$，总角速度

$$\omega_0=\sqrt{\omega^2+\omega_1{}^2+2\omega\omega_1\cos\theta}$$

$$\cos\phi=\frac{\omega_1+\omega\cos\theta}{\omega_0}\Rightarrow\phi=\arccos\frac{\omega_1+\omega\cos\theta}{\sqrt{\omega^2+\omega_1{}^2+2\omega\omega_1\cos\theta}}$$

总角速度以夹角ϕ绕铅直线进动.

4.4　证明式（4.2.8），即三次旋转分别绕着 z',y'',z'''旋转时的总变换矩阵为

$$\begin{pmatrix}-\sin\varphi\sin\psi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\psi+\cos\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\theta\cos\psi\\ -\sin\varphi\cos\psi-\cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \sin\theta\sin\psi\\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\end{pmatrix}$$

证明　第一次绕 z' 轴逆时针旋转 φ 角，变换矩阵

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

第二次绕 y'' 轴逆时针旋转 θ 角，变换矩阵

$$A_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$$

第三次绕 z''' 轴逆时针旋转 ψ 角，变换矩阵

$$A_\psi=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

则总变换矩阵

$$\begin{aligned}A&=A_\psi A_\theta A_\varphi\\
&=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\sin\psi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\psi+\cos\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\theta\cos\psi\\ -\sin\varphi\cos\psi-\cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \sin\theta\sin\psi\\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

4.5　刚体的欧拉角随时间的变化关系为 $\varphi=4t,\ \theta=\pi/3,\ \psi=\pi/2-2t$．求本体系中的角速度分量.

解　由欧拉角随时间变化关系式可得 $\dot\varphi=4,\ \dot\theta=0,\ \dot\psi=-2$，则总角速度在本体系下的分量为

$$\begin{cases}\omega_x=\dot\varphi\sin\theta\sin\psi+\dot\theta\cos\psi=4\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2t\right)=2\sqrt{3}\cos 2t\\ \omega_y=\dot\varphi\sin\theta\cos\psi-\dot\theta\sin\psi=4\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2t\right)=2\sqrt{3}\sin 2t\\ \omega_z=\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi=0\end{cases}$$

4.6　刚体的欧拉角随时间的变化关系为 $\varphi=\varphi_0+n_1t,\ \theta=\theta_0,\ \psi=\psi_0+n_2t$．求刚体的总角速度大小、转动瞬轴的本体极迹和空间极迹.

解　由欧拉角随时间变化关系式可得

$$\dot\varphi=n_1,\quad \dot\theta=0,\quad \dot\psi=n_2 \qquad ①$$

则总角速度在本体系下的分量为

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi = n_1\sin\theta_0\sin(\psi_0 + n_2 t) \\ \omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi = n_1\sin\theta_0\cos(\psi_0 + n_2 t) \\ \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} = n_1\cos\theta_0 + n_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\omega_x{}^2 + \omega_y{}^2 + \omega_z{}^2} \\ &= \sqrt{(n_1\sin\theta_0\sin(\psi_0 + n_2 t))^2 + (n_1\sin\theta_0\cos(\psi_0 + n_2 t))^2 + (n_1\cos\theta_0 + n_2)^2} \\ &= \sqrt{n_1{}^2 + n_2{}^2 + 2n_1 n_2\cos\theta_0} \end{aligned}$$

本体极迹是转动瞬轴在本体坐标下的运动轨迹，ω 与 z 轴的夹角为常量

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\omega}\right) = \arcsin\left(\frac{n_1\sin\theta_0}{\omega}\right)$$

故本体极迹是顶角为 $2\arcsin\left(\frac{n_1\sin\theta_0}{\omega}\right)$ 或 $2\arctan\left(\frac{n_1\sin\theta_0}{n_1\cos\theta_0 + n_2}\right)$ 的空间圆锥面

$$x^2 + y^2 - \frac{n_1{}^2\sin^2\theta_0}{(n_1\cos\theta_0 + n_2)^2}z^2 = 0$$

空间极迹是转动瞬轴在惯性坐标下的运动轨迹，ω 与 z' 轴的夹角为常量

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2}}{\omega}\right) = \arcsin\left(\frac{n_2\sin\theta_0}{\omega}\right)$$

或

$$\arctan\left(\frac{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\omega_z}\right) = \arctan\left(\frac{n_2\sin\theta_0}{\omega_z}\right)$$

故空间极迹是顶角为 $2\arcsin\left(\frac{n_2\sin\theta_0}{\omega}\right)$ 或 $2\arctan\left(\frac{n_2\sin\theta_0}{n_1 + n_2\cos\theta_0}\right)$ 的空间圆锥面

$$x'^2 + y'^2 - \frac{n_2{}^2\sin^2\theta_0}{(n_1 + n_2\cos\theta_0)^2}z'^2 = 0$$

4.7　证明 4.3.3 小节中惯量主轴非唯一性的性质.

证明　中心惯量主轴对应的转动惯量张量

$$I^C = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

将坐标系平移，使新坐标系原点在（a, 0, 0）处，对于 $i \neq j$，由平行轴定理知

$$I_{ij}^{Q} = I_{ij}^{C} + M\left(\delta_{ij}\sum_{k} a_k^2 - a_i a_j\right) = 0$$

可见在新坐标系下惯量积均为零，坐标轴同样为惯量主轴.

4.8 一个质点系由位于点 $(a,-a,a)$ 质量为 $4m$ 的质点、位于点 $(-a,a,a)$ 质量为 $3m$ 的质点和位于点 (a,a,a) 质量为 $2m$ 的质点组成. 求关于坐标原点的惯量张量，并求过原点、方向为 (1,1,0) 的轴的转动惯量.

解

$$I_{11} = \sum_{\alpha} m_\alpha (y_\alpha^2 + z_\alpha^2) = 18ma^2, \quad I_{12} = -\sum_{\alpha} m_\alpha x_\alpha y_\alpha = 5ma^2$$

$$I_{13} = -\sum_{\alpha} m_\alpha x_\alpha z_\alpha = -3ma^2, \quad I_{22} = \sum_{\alpha} m_\alpha (x_\alpha^2 + z_\alpha^2) = 18ma^2$$

$$I_{23} = -\sum_{\alpha} m_\alpha y_\alpha z_\alpha = -ma^2, \quad I_{33} = \sum_{\alpha} m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) = 18ma^2$$

于是关于坐标原点的惯量张量为

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 18 & 5 & -3 \\ 5 & 18 & -1 \\ -3 & -1 & 18 \end{pmatrix} ma^2$$

(1,1,0) 轴的方向矢量为 $(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$，转动惯量为

$$\begin{aligned} I &= \alpha^2 I_{11} + \beta^2 I_{22} + \gamma^2 I_{33} + 2\alpha\beta I_{12} + 2\beta\gamma I_{23} + 2\gamma\alpha I_{31} \\ &= \frac{1}{2}18ma^2 + \frac{1}{2}18ma^2 + 5ma^2 = 23ma^2 \end{aligned}$$

或缩写为

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 18 & 5 & -3 \\ 5 & 18 & -1 \\ -3 & -1 & 18 \end{pmatrix} ma^2 \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 23ma^2$$

也可以由转动惯量定义 $I = \sum_{\alpha} m_\alpha r_\alpha^2$ 计算，点 $(a,-a,a), (-a,a,a), (a,a,a)$ 到轴 (1,1,0) 的距离分别为 $r_1 = \sqrt{3}a, r_2 = \sqrt{3}a, r_3 = a$，则

$$I = 4mr_1^2 + 3mr_2^2 + 2mr_3^2 = 23ma^2$$

4.9 一个质点系由位于点 $(a,-a,0)$ 质量为 $4m$ 的质点、位于点 $(-a,a,0)$ 质量为 $3m$ 的质点和位于点 $(a,a,0)$ 质量为 $2m$ 的质点组成. 求关于坐标原点的惯量张量、主转动惯量和惯量主轴.

解 采用上题方法可得关于坐标原点的惯量张量

$$I=\begin{pmatrix}9 & 5 & 0\\ 5 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 18\end{pmatrix}ma^2$$

$$\det\left|I-\lambda ma^2\right|=\begin{vmatrix}9-\lambda & 5 & 0\\ 5 & 9-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 18-\lambda\end{vmatrix}ma^2=0$$

$$(\lambda^2-18\lambda+56)(18-\lambda)=0\Rightarrow\lambda_1=4,\lambda_2=14,\lambda_3=18$$

则主转动惯量为 $I_1=4ma^2$，$I_2=14ma^2$，$I_3=18ma^2$.

而对于惯量主轴 X_i，满足 $IX_i=\lambda_i X_i$，解得归一化主轴方向矢量为

$$X_1=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2\\ 0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\\ 0\end{pmatrix},\quad X_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

4.10　已知 $\hat{I}=\begin{pmatrix}A & B & B\\ B & A & B\\ B & B & A\end{pmatrix}$，求主转动惯量和惯量主轴.

解　$$\det\left|\hat{I}-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}A-\lambda & B & B\\ B & A-\lambda & B\\ B & B & A-\lambda\end{vmatrix}=-[\lambda-(A-B)]^2[\lambda-(A+2B)]=0$$

$$\Rightarrow\lambda_{1,2}=A-B,\lambda_3=A+2B$$

主转动惯量

$$I_{1,2}=A-B,\quad I_3=A+2B$$

惯量主轴满足

$$IX_i=\lambda_i X_i\Rightarrow\boldsymbol{e}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\quad\frac{1}{\sqrt{3}},\quad\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不确定，但它们与 $\boldsymbol{e}_3$ 垂直且 $\boldsymbol{e}_1\perp\boldsymbol{e}_2$，如可取

$$\boldsymbol{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\quad-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0\right)^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{e}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0,\quad\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$$

4.11　均质薄圆盘半径为 R，质量为 m. 求当质心在坐标原点，z 向主轴与圆盘法线夹 θ 时的惯量张量.

解　首先求关于坐标原点的主转动惯量

$$I_3=\int_0^R\int_0^{2\pi}\rho r^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{m}{\pi R^2}r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}mR^2$$

由对称性可得

$$I_x = I_y = \frac{1}{2}I_z = \frac{1}{4}mR^2$$

此时的转动惯量张量

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{4}mR^2$$

设圆盘旋转轴位于 xz 平面，题中状态为坐标系绕 y 轴旋转 θ 角所得，则旋转矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

新坐标系中转动惯量张量为

$$\hat{I}' = T\hat{I}T^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{4}mR^2\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\sin^2\theta & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & 0 & 1+\cos^2\theta \end{pmatrix}\frac{1}{4}mR^2$$

4.12　一均质圆柱形刚体半径为 R，如果以圆柱质心为原点，其惯量矩阵正比于单位矩阵，求圆柱的高. 如果取底面中心为原点，其惯量矩阵正比于单位矩阵,再求圆柱的高.

解

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 H}$$

（1）以质心为原点

$$I_3^C = \int_{-H/2}^{H/2}\int_0^R\int_0^{2\pi}\rho r^2 r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}h = \frac{\pi\rho R^4 H}{2} = \frac{1}{2}mR^2$$

$$I_1^C = I_2^C = \int_{-H/2}^{H/2}\int_0^R\int_0^{2\pi}\rho(r^2\sin^2\varphi + h^2)r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}h = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mH^2$$

惯量矩阵正比于单位矩阵，则 $I_1^C = I_2^C = I_3^C$

$$\Rightarrow H = \sqrt{3}R$$

（2）以底面中心为原点，根据平行轴定理

$$I_1=I_2=I_1^C+m\frac{H^2}{4}=\frac{mR^2}{4}+\frac{mH^2}{3},\quad I_3=I_3^C$$

$$I_1=I_2=I_3\Rightarrow H=\frac{\sqrt{3}}{2}R$$

4.13　若刚体对某一点的主转动惯量满足 $I_1=I_2\neq I_3$，证明刚体绕该定点转动时，角动量 $\boldsymbol{J}$、角速度 ω 和 z 坐标轴三者共面.

证明

$$\boldsymbol{J}=I_1\omega_x\boldsymbol{e}_x+I_1\omega_y\boldsymbol{e}_y+I_3\omega_z\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{\omega}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ I_1\omega_x & I_1\omega_y & I_3\omega_z\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\end{vmatrix}=(I_1-I_3)\omega_z\omega_y\boldsymbol{e}_x+(I_3-I_1)\omega_x\omega_z\boldsymbol{e}_y$$

$$\Rightarrow(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{e}_z=0$$

可见 $\boldsymbol{e}_z$ 在 $\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{\omega}$ 所张成的平面内，即三者共面.

4.14　已知均匀椭球的三个半轴长度分别为 a、b 和 c，质量 m，绕 c 轴以角速度 $\dot{\varphi}$ 转动，而 c 轴又以角速度 $\dot{\theta}$ 绕 b 轴转动，求椭球的动能和角动量.

解　刚体上任一质点坐标为 $(ar\sin\theta\cos\varphi, br\sin\theta\sin\varphi, cr\cos\theta)$, 其中 $0\leqslant r\leqslant 1$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$0\leqslant\varphi<2\pi$，质量以密度表示为 $m=\dfrac{4}{3}\pi abc\rho$.

$$I_1=abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1\rho(b^2r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+c^2r^2\cos^2\theta)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{5}m(b^2+c^2)$$

由对称性，$I_2=\dfrac{1}{5}m(c^2+a^2)$, $I_3=\dfrac{1}{5}m(a^2+b^2)$. 而角速度

$$\boldsymbol{\omega}=(\dot{\theta}\sin\varphi,\dot{\theta}\cos\varphi,\dot{\varphi})$$

所以

$$\boldsymbol{J}=\sum_i I_i\omega_i\boldsymbol{e}_i=\frac{1}{5}m(b^2+c^2)\dot{\theta}\sin\varphi\boldsymbol{e}_x+\frac{1}{5}m(c^2+a^2)\dot{\theta}\cos\varphi\boldsymbol{e}_y+\frac{1}{5}m(a^2+b^2)\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$$

$$T=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{J}=\frac{1}{10}m(b^2+c^2)\dot{\theta}^2\sin^2\varphi+\frac{1}{10}m(c^2+a^2)\dot{\theta}^2\cos^2\varphi+\frac{1}{10}m(a^2+b^2)\dot{\varphi}^2$$

4.15　已知均匀圆锥体的半径为 r，高 h，求在什么条件下它对质心的惯量椭球退化为圆球.

解　圆锥体质心必在中心轴上，设高度为 h_0，则

$$h_0=\int_0^h\pi r^2\left(\frac{h-l}{h}\right)^2l\mathrm{d}l/V=\frac{1}{12}\pi r^2h^2\bigg/\left(\frac{1}{3}\pi r^2h\right)=\frac{1}{4}h$$

相对于底面圆心，三个主转动惯量分别为

$$I_1' = \rho\int_0^r\int_0^{h-\frac{hR}{r}}\int_0^{2\pi}(y^2+z^2)R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\mathrm{d}R = \rho\int_0^r\int_0^{h-\frac{hR}{r}}\int_0^{2\pi}(R^2\sin^2\theta+z^2)R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\mathrm{d}R$$

$$=\frac{1}{20}\rho\pi hr^4+\frac{1}{30}\rho\pi h^3r^2=\frac{3}{20}mr^2+\frac{1}{10}mh^2=I_2'$$

$$I_3' = \rho\int_0^r\int_0^{h-\frac{hR}{r}}\int_0^{2\pi}(x^2+y^2)R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\mathrm{d}R = \rho\int_0^r\int_0^{h-\frac{hR}{r}}\int_0^{2\pi}R^3\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\mathrm{d}R=\frac{1}{10}\rho\pi r^4h=\frac{3}{10}mr^2$$

均匀圆锥体对其质心的主转动惯量

$$I_1=I_2=I_1'-m\left(\frac{1}{4}h\right)^2=\frac{3}{20}mr^2+\frac{3}{80}mh^2\,,\qquad I_3=I_3'=\frac{3}{10}mr^2$$

按题意有 $I_{11}=I_{22}=I_{33}$，代入得到 $h=2r$.

4.16　刚体的惯量为 $\hat{I}=\begin{pmatrix}150 & 0 & -100\\ 0 & 250 & 0\\ -100 & 0 & 300\end{pmatrix}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$，质心为原点，求主转动惯量. 如果它以角速度$10\boldsymbol{e}_x+0\boldsymbol{e}_y+0\boldsymbol{e}_z$转动，求外力矩.

解　$$\det|I-\lambda|=\begin{vmatrix}150-\lambda & 0 & -100\\ 0 & 250-\lambda & 0\\ -100 & 0 & 300-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-100)(250-\lambda)(\lambda-350)=0$$

即主转动惯量为 100kg·m^2、250 kg·m^2 和 350 kg·m^2. 角动量

$$\boldsymbol{J}=\hat{I}\cdot\boldsymbol{\omega}=\begin{pmatrix}150 & 0 & -100\\ 0 & 250 & 0\\ -100 & 0 & 300\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1500\\0\\-1000\end{pmatrix}$$

外力矩

$$\boldsymbol{N}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 10 & 0 & 0\\ 1500 & 0 & -1000\end{pmatrix}=10000\boldsymbol{e}_y(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m})$$

4.17　一回转仪绕中心作规则进动，$I_1=I_2=2I_3$. 已知其自转角速度为 ω_1，自转轴与进动轴夹 60° 角，求进动角速度 ω_2 的大小.

解　由题意 $\dot{\psi}=\omega_1,\ \dot{\varphi}=\omega_2$，规则进动 $\dot{\theta}=0,\ \theta=60^\circ$.

因为 $I_1=I_2=2I_3$，所以

$$\omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}=\omega_1+\omega_2\cos60^\circ=\omega_1+\frac{1}{2}\omega_2$$

$$\omega_2 = (\omega_z + \Omega)\sec\theta = \left(\omega_z + \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_z\right)\sec\theta$$
$$= \frac{I_3}{I_1}\omega_z \sec\theta = \frac{I_3}{I_1}\left(\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2\right)\sec\theta = \omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2$$

所以 $\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1$.

4.18　一个半径为 r 的均质圆盘绕其质心旋转，开始时角速度为 ω_0，轴与盘面法线成 α. 求进动角速度及进动轴与盘面法线的夹角.

解　$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}I_3$，为对称欧拉陀螺，其解为

$$\begin{cases} \omega_x = A\cos(\Omega t + \phi_0) \\ \omega_y = A\sin(\Omega t + \phi_0) \\ \omega_z = \omega_{z0} \end{cases}$$

其中，$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_{z0} = \omega_{z0}$，且有 $\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_{z0}^2 = \omega_0^2$，所以

$$A = \omega_0 \sin\alpha, \quad \omega_{z0} = \omega_0 \cos\alpha$$
$$\tan\theta = \frac{I_1 A}{I_3 \omega_{z0}} = \frac{I_1}{I_3}\tan\alpha = \frac{1}{2}\tan\alpha$$
$$\dot{\varphi} = (\omega_{z0} + \Omega)\sec\theta = 2\omega_{z0}\sec\theta = 2\omega_0\cos\alpha\sqrt{1 + \tan^2\theta}$$
$$= \omega_0\cos\alpha\sqrt{4 + \tan^2\alpha} = \omega_0\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}$$

4.19　一回转仪绕其质心作自由转动，$I_1 = I_2 = nI_3$，初始时对称轴与进动轴间的夹角为 θ_0. 证明:

（1）刚体作规则进动;

（2）自转角速度与进动角速度以 $\dot{\psi} = (n-1)\dot{\varphi}\cos\theta_0$ 相联系.

证明　（1）$I_1 = I_2 = nI_3$，为对称欧拉陀螺. 由欧拉动力学方程可解得

$$\begin{cases} \omega_x = A\cos(\Omega t + \phi_0) \\ \omega_y = A\sin(\Omega t + \phi_0) \\ \omega_z = \omega_{z0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_x = J\sin\theta\sin\psi = I_1\omega_x = I_1 A\cos(\Omega t + \phi_0) \\ J_y = J\sin\theta\cos\psi = I_1\omega_y = I_1 A\sin(\Omega t + \phi_0) \\ J_z = J\cos\theta = I_3\omega_{z0} \end{cases}$$

所以

$$\cos\theta = \frac{J_z}{J} = \frac{I_3\omega_{z0}}{J} = \text{Const.} = \cos\theta_0$$

故陀螺作规则进动.

（2）
$$\Omega=\frac{I_3-I_1}{I_1}\omega_{z0}=\frac{1-n}{n}\omega_{z0}\Rightarrow\omega_{z0}=-\frac{n}{n-1}\Omega=\frac{n}{n-1}\dot\psi$$

所以

$$\dot\varphi=(\omega_{z0}+\Omega)\sec\theta_0=\frac{I_3}{I_1}\omega_{z0}\sec\theta_0=\frac{1}{n}\frac{n}{n-1}\dot\psi\sec\theta_0=\frac{1}{n-1}\dot\psi\sec\theta_0$$

即 $\dot\psi=(n-1)\dot\varphi\cos\theta_0$.

4.20　物体绕质心自由转动，$I_1>I_2>I_3$. 初始 $\omega_z>0,\ \omega_x<0$，角动量与动能有关系 $J^2=2I_2T$. 证明:

$$\omega_x=-\frac{J}{I_2}\left[\frac{I_2(I_2-I_3)}{I_1(I_1-I_3)}\right]^{1/2}\operatorname{sech}\tau,\quad \omega_y=\frac{J}{I_2}\tanh\tau,\quad \omega_z=\frac{J}{I_2}\left[\frac{I_2(I_1-I_2)}{I_3(I_1-I_3)}\right]^{1/2}\operatorname{sech}\tau$$

其中，$\tau=\dfrac{J}{I_2}\left[\dfrac{(I_1-I_2)(I_2-I_3)}{I_1I_3}\right]^{1/2}t$. 并讨论 $t\to\infty$ 时的运动状态.

证明　角动量大小守恒，则

$$J^2=J_x^2+J_y^2+J_z^2=I_1^2\omega_x^2+I_2^2\omega_y^2+I_3^2\omega_z^2$$

为常数，自由刚体的能量，即动能守恒，则

$$E=\frac{1}{2}(I_1\omega_x^2+I_2\omega_y^2+I_3\omega_z^2)$$

为常数.

由已知 $J^2=2I_2T=I_1I_2\omega_x^2+I_2^2\omega_y^2+I_3I_2\omega_z^2$ 并结合初始 $\omega_z>0,\ \omega_x<0$ 得

$$\begin{cases}\omega_x=-\left[\dfrac{(I_2-I_3)(J^2-I_2^2\omega_y^2)}{I_1I_2(I_1-I_3)}\right]^{\frac12}\\[2ex]\omega_z=\left[\dfrac{(I_1-I_2)(J^2-I_2^2\omega_y^2)}{I_2I_3(I_1-I_3)}\right]^{\frac12}\end{cases}$$

代入 $I_2\dot\omega_y-(I_3-I_1)\omega_z\omega_x=0$ 得

$$I_2\dot\omega_y=\frac{\tau'}{J}(J^2-{I_2}^2{\omega_y}^2)\text{，其中 }\tau'=\frac{J}{I_2}\left[\frac{(I_1-I_2)(I_2-I_3)}{I_1I_3}\right]^{\frac12}$$

$$\Rightarrow\int\frac{\mathrm d\omega_y}{J^2-{I_2}^2{\omega_y}^2}=\int\frac{\tau'}{JI_2}\mathrm dt$$

令 $\tau't=\tau$，则

$$\operatorname{arctanh}\frac{I_2}{J}\omega_y=\tau' t=\tau \qquad （设初始\ \omega_y=0\ ）$$

$$\Rightarrow \omega_y=\frac{J}{I_2}\tanh\tau$$

代入 ω_x,ω_z 表达式中得

$$\begin{cases}\omega_x=-\left[\dfrac{(I_2-I_3)(J^2-I_2^2\omega_y^2)}{I_1I_2(I_1-I_3)}\right]^{\frac{1}{2}}=-\left[\dfrac{I_2-I_3}{I_1I_2(I_1-I_3)}\right]^{\frac{1}{2}}J\operatorname{sech}\tau\\ \omega_z=\left[\dfrac{(I_1-I_2)(J^2-I_2^2\omega_y^2)}{I_2I_3(I_1-I_3)}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\dfrac{I_1-I_2}{I_2I_3(I_1-I_3)}\right]^{\frac{1}{2}}J\operatorname{sech}\tau\end{cases}$$

当 $t\to\infty$ 时，

$$\omega_y\to\frac{J}{I_2},\quad \omega_x,\omega_z\to 0$$

即沿最大和最小惯量主轴角速度趋于 0，沿中间惯量主轴角速度稳定在 $\dfrac{J}{I_2}$.

4.21　一个有固定点的重对称陀螺，以恒定角速度 Ω 绕竖直轴进动，章动角 θ_0 不变，陀螺质量为 m，质心离固定点的距离为 h. 求自转角速度.

解　因为 θ 为常数，拉格朗日陀螺

$$L=\frac{I_1}{2}\dot\varphi^2\sin^2\theta+\frac{I_3}{2}(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)^2-mgh\cos\theta$$

代入关于 θ 的拉格朗日方程得

$$I_1\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta+I_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)(-\dot\varphi\sin\theta)+mgh\sin\theta=0$$

陀螺以恒定角速度 Ω 绕竖直轴进动，即 $\dot\varphi=\Omega$ ，而章动角 $\theta=\theta_0$，所以

$$\dot\psi=\frac{I_1-I_3}{I_3}\dot\varphi\cos\theta+\frac{mgh}{\dot\varphi I_3}=\frac{(I_1-I_3)\Omega^2\cos\theta_0+mgh}{\Omega I_3}$$

4.22　如果拉格朗日陀螺初始 $\theta=60^\circ,\ \dot\theta=0,\ \dot\varphi=2\sqrt{\dfrac{mgl}{3I_1}},\ \omega_z=\dfrac{I_1}{I_3}\sqrt{\dfrac{3mgl}{I_1}}$ ，求证在以后的运动中，满足条件 $\sec\theta=1+\operatorname{sech}\sqrt{\dfrac{mgl}{I_1}}t$.

证明　$t=0$ 时，

$$\omega_z=\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi=\frac{I_1}{I_3}\sqrt{\frac{3mgl}{I_1}}\ ,\qquad \dot\varphi=2\sqrt{\frac{mgl}{3I_1}}$$

则

$$\dot{\psi}=\frac{3I_1-I_3}{I_3}\sqrt{\frac{mgl}{3I_1}}$$

两个守恒量$J_z, J_{z'}$分别为

$$J_z=I_3\omega_z=I_3\frac{I_1}{I_3}\sqrt{\frac{3mgl}{I_1}}=\sqrt{3mglI_1}$$

$$\begin{aligned}J_{z'}&=(I_1\sin^2\theta+I_3\cos^2\theta)\dot{\varphi}+I_3\cos\theta\dot{\psi}\\&=\frac{3I_1+I_3}{4}2\sqrt{\frac{mgl}{3I_1}}+\frac{I_3}{2}\frac{3I_1-I_3}{I_3}\sqrt{\frac{mgl}{3I_1}}=\sqrt{3mglI_1}\end{aligned}$$

$t=0$时，$\theta=60^\circ$, $\dot{\theta}=0$，

$$\begin{aligned}E'&=E-\frac{J_z^2}{2I_3}-mgl=\frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+mgl(\cos\theta-1)\\&=\frac{I_1}{2}\left(0+\frac{4mgl}{3I_1}\frac{3}{4}\right)+mgl\left(\frac{1}{2}-1\right)=0\end{aligned}$$

运动方程满足$\frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2+V_{\text{eff}}(\theta)=E'$，其中

$$V_{\text{eff}}(\theta)=\frac{(J_{z'}-J_z\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}-mgl(1-\cos\theta)=\frac{3mgl}{2}\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}-mgl(1-\cos\theta)$$

所以

$$\frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2+\frac{3mgl}{2}\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}-mgl(1-\cos\theta)=0$$

$$\frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)\sqrt{2\cos\theta-1}}\mathrm{d}\theta=\sqrt{\frac{mgl}{I_1}}\mathrm{d}t$$

令$2\cos\theta-1=s^2$，则

$$-\frac{2}{1-s^2}\mathrm{d}s=\sqrt{\frac{mgl}{I_1}}\mathrm{d}t$$

两边积分：

$$-\ln\frac{1+\sqrt{2\cos\theta-1}}{1-\sqrt{2\cos\theta-1}}=\sqrt{\frac{mgl}{I_1}}t$$

化简得

$$\sec\theta=1+\operatorname{sech}\sqrt{\frac{mgl}{I_1}}t$$

4.23　质量为 m 的拉格朗日陀螺，质心到固定点的距离为 l，则

（1）写出关于欧拉角的哈密顿函数;

（2）列出哈密顿正则方程.

解　（1）体系的拉格朗日函数为

$$L=\frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{I_3}{2}(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2-mgl\cos\theta$$

所以

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=(I_1\sin^2\theta+I_3\cos^2\theta)\dot{\varphi}+I_3\cos\theta\dot{\psi}$$

$$p_\psi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}=I_3(\dot{\psi}+\cos\theta\dot{\varphi}),\quad p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=I_1\dot{\theta}$$

反解得

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi-p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta},\quad \dot{\psi}=\frac{(I_1\sin^2\theta+I_3\cos^2\theta)p_\psi-I_3\cos\theta}{I_1I_3\sin^2\theta}p_\varphi,\quad \dot{\theta}=\frac{p_\theta}{I_1}$$

代入 $H=\sum p\dot{q}-L$ 得

$$H=p_\varphi\dot{\varphi}+p_\psi\dot{\psi}+p_\theta\dot{\theta}-L=\frac{p_\theta^2}{2I_1}+\frac{p_\psi^2}{2I_3}+\frac{(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}+mgl\cos\theta$$

（2）

$$\dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}=\frac{p_\varphi-p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta},\quad \dot{p}_\varphi=-\frac{\partial H}{\partial\varphi}=0$$

$$\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{p_\theta}{I_1},\quad \dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial\theta}=-\frac{(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)(p_\psi-p_\varphi\cos\theta)}{I_1\sin^3\theta}+mgl\sin\theta$$

$$\dot{\psi}=\frac{\partial H}{\partial p_\psi}=-\frac{p_\varphi-p_\psi\cos\theta}{I_1\sin\theta\tan\theta}+\frac{p_\psi}{I_3},\quad \dot{p}_\psi=-\frac{\partial H}{\partial\psi}=0$$

4.24　质量为 m 的拉格朗日陀螺，质心到固定点的距离为 l，求陀螺轴绕竖直方向稳定转动的条件.

解　此时 $\theta=0$，则有 $p_\varphi=p_\psi$，所以

$$V_{\mathrm{eff}}(\theta)=\frac{(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}-mgl(1-\cos\theta)=\frac{p_\psi^2(1-\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}-mgl(1-\cos\theta)$$

当 θ 稍微偏离时，$V_{\mathrm{eff}}(\theta)=\left(\frac{p_\psi^2}{8I_1}-\frac{mgl}{2}\right)\theta^2$，稳定转动要求 $V_{\mathrm{eff}}(\theta)>V_{\mathrm{eff}}(0)=0$，即

$$p_\psi^2>4I_1mgl\Rightarrow\omega_z^2>\frac{4I_1mgl}{I_3^2}$$

(O-6255.01)

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材配套教辅

- 《力学与理论力学（第二版）》习题解答　　杨维纮　秦　敢　编　著
- 《电磁学与电动力学（第二版）》习题解答　　胡友秋　程福臻　叶邦角　刘之景　胡岳东　编　著
- 《热学 热力学与统计物理（第二版）》习题解答　　周子舫　曾烈兆　编　著

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-046754-6

定 价：36.00 元

高等教育出版中心　数理出版分社
联系电话：010-64015178
E-mail：mph@mail.sciencep.com