

提要

吸收与热传导

逆韧致吸收

电子热传导

量纲分析与自相似流动

量纲

II 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波

烧蚀与内爆 · I

(受控热核聚变导论 · 第十一章)

郑 坚

中国科学技术大学核科学技术学院

2023–2024 第二学期

提要

吸收与热传导

逆轆致吸收

电子热传导

量纲分析与自相似流动

量纲

II 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波

1 吸收与热传导

2 量纲分析与自相似流动

提要

吸收与热传导

逆轫致吸收

电子热传导

量纲分析与自相似流动

量纲

IT 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波

烧蚀

高功率激光脉冲或者X射线辐射场辐照物质表面时，由于物质的吸收，会强烈加热表面层的物质。被加热的物质向外飞散时，对剩余物质产生巨大的压强，这个过程就是**烧蚀**(ablation)。烧蚀提供了聚变燃料内爆的动力。

激光聚变的烧蚀类型：

- 激光烧蚀：高功率激光脉冲辐照物质，直接驱动的内爆驱动力；
- 辐射烧蚀：高温黑体辐射辐照物质，间接驱动的内爆驱动力。

提要

吸收与热传导

逆轆致吸收

电子热传导

量纲分析与自相似流动

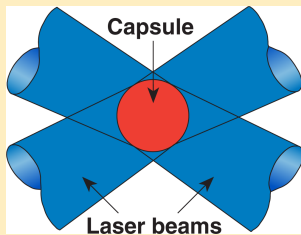
量纲

II 定理

自相似等温稀疏波

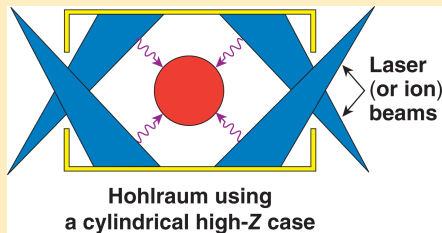
非线性热波

直接驱动



直接驱动的内爆驱动力来自激光烧蚀

间接驱动



间接驱动的内爆驱动力来自辐射烧蚀

提要

吸收与热传导

逆韧致吸收

电子热传导

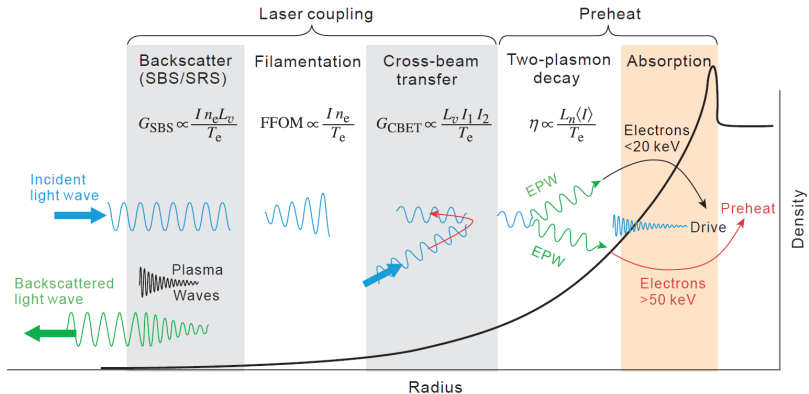
量纲分析与自相似流动

量纲

II 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波



高功率激光脉冲辐照物质后，产生高温等离子体。高功率激光脉冲与等离子体之间的相互作用十分复杂，是激光聚变的主要科学挑战之一^a。本章只涉及激光在等离子体中的逆韧致吸收。

^a 图片摘自 E. M. Campbell, Matter Radiat. Extremes **2**, 37 (2017).

激光的逆韧致吸收

高功率激光脉冲辐照材料时，在激光电场的作用下，材料迅速离化；离化产生的自由电子在激光场中振荡，因电子—离子之间的无规碰撞，电子有序振荡的动能转化为无规热运动的动能，从而使激光能量转化为等离子体热能，发生所谓的逆韧致吸收(inverse bremsstrahlung absorption)。

表面假定等离子体中有一交变电场

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}.$$

仅考虑电子与离子之间的碰撞，利用线性化电子动量方程，有

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} - \nu_{ei} \mathbf{u}_e, \quad (1)$$

这里 ν_{ei} 是交变电场中电子—离子碰撞频率，

$$\nu_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{Z^2 e^4 n_i}{T_e^{3/2} m_e^{1/2}} \ln \frac{2^{5/2} T_e^{3/2}}{\gamma^{5/2} \omega Z e^2 m_e^{1/2}}. \quad (2)$$

在电场作用下电子发生振荡，等离子体中会产生感生电流

$$\mathbf{j} = -en_e \mathbf{u}_e = \frac{e^2 n_e}{m_e (-i\omega + \nu_{ei})} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (3)$$

单位时间内，电场沉积在单位体积等离子体中的能量为

$$Q_{IB} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*] = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu_{ei}^2} \nu_{ei} \frac{E_0^2}{8\pi}. \quad (4)$$

其中 ω_{pe} 就是朗缪尔频率(Langmuir frequency),

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}} = 5.641 \times 10^4 n_e^{1/2} [\text{cm}^{-3}]. \quad (5)$$

当 $\omega \gg \nu_{ei}$ ，方程(4)近似为

$$Q_{IB} \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \nu_{ei} \frac{E_0^2}{8\pi}. \quad (6)$$

由此可见，光波在等离子体中的沉积率正比于电子-离子碰撞频率 ν_{ei} 。

在等离子体中，电磁波的频率和波数之间必须满足一定的关系。将电磁场写为平面电磁波的形式，

$$\mathbf{E}, \mathbf{B} \propto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t),$$

此时等离子体感生电流依然可以写为

$$\mathbf{j} = \frac{e^2 n_e}{m_e(-i\omega + \nu_{ei})} \mathbf{E}.$$

将感生电流代入 Maxwell 方程组，

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \end{aligned}$$

我们得到电磁波在等离子体中的色散关系，

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{1 + i\nu_{ei}/\omega}. \quad (7)$$

将波矢 \mathbf{k} 写为 $\mathbf{k} = k\mathbf{n} = (k_r + ik_i)\mathbf{n}$, 其中 k_r 和 k_i 分别是波数 k 的实部和虚部, \mathbf{n} 是波矢的方向。当 $\omega \gg \nu_{ei}$ 时, 由色散方程(7)近似有

$$\omega^2 = k_r^2 c^2 + \omega_{pe}^2, \quad (8a)$$

$$k_i = \frac{\omega_{pe}^2}{2k_r} \frac{\nu_{ei}}{\omega} = \frac{(\omega_{pe}/\omega)^2}{2\sqrt{1 - (\omega_{pe}/\omega)^2}} \frac{\nu_{ei}}{c}. \quad (8b)$$

由(8a)可以看到, 在等离子体中传播的电磁波, 其频率有一个下限值,

$$\omega \geq \omega_{pe}. \quad (9)$$

引入临界密度(critical density),

$$\omega^2 = \frac{4\pi n_c e^2}{m_e}. \quad (10)$$

临界密度与电磁波在真空中的波长有如下关系

$$n_c [\text{cm}^{-3}] = \frac{1.1 \times 10^{21}}{\lambda_{\mu\text{m}}^2}.$$

利用临界密度, 方程(8b)可以改写为

$$k_i = \frac{(n_e/n_c)}{2\sqrt{1-(n_e/n_c)}} \frac{\nu_{ei}}{c}. \quad (11)$$

由色散关系(8), 单色平面电磁波在等离子体中传播时, 电场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ik_r \ell - k_i \ell - i\omega t}.$$

其中 \mathbf{E}_0 是电磁波在真空中的振幅, ℓ 是电磁波在等离子体中的传播距离。由于光强 I 与电场之间的关系为 $I \propto |\mathbf{E}|^2$, 因此光强为 $I = I_0 e^{-2k_i \ell}$, 这等价于

$$\frac{\partial I}{\partial \ell} = -\kappa_{IB} I, \quad (12)$$

其中吸收系数 κ_{IB} 为

$$\kappa_{IB} = 2k_i = \frac{(n_e/n_c)\nu_{ei}}{c\sqrt{1-n_e/n_c}}. \quad (13)$$

由此可见, 逆轫致吸收在临界密度附近最为强烈。

逆韧致吸收的特点

- 电子密度越高，吸收越强；
- 电子温度越低，吸收越强；
- 离子电荷数越大，吸收越强；
- 给定电子密度和温度，激光频率越低，吸收越强。

$$k_i = \frac{(n_e/n_c)\nu_{ei}}{c\sqrt{1-n_e/n_c}},$$

$$\nu_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{Z^2 e^4 n_i}{T_e^{3/2} m_e^{1/2}} \ln \frac{2^{5/2} T_e^{3/2}}{\gamma^{5/2} \omega Z e^2 m_e^{1/2}}.$$

提要

吸收与热传导

逆韧致吸收

电子热传导

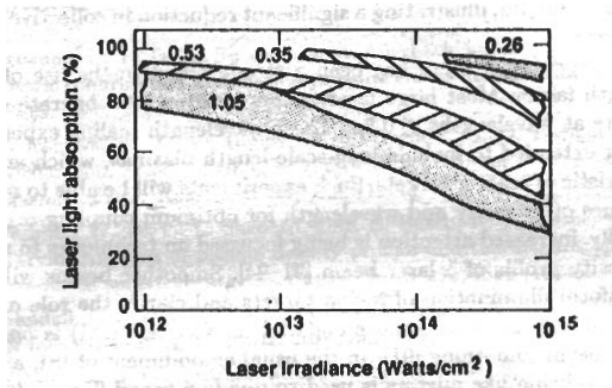
量纲分析与自相似流动

量纲

II 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波



激光吸收效率与激光波长及其强度的关系。同等激光强度下，激光波长越短，吸收越高。这促使激光聚变采用紫外波长的激光器，通常是 $0.351 \mu\text{m}$ 。

提要

吸收与热传导

逆韧致吸收

电子热传导

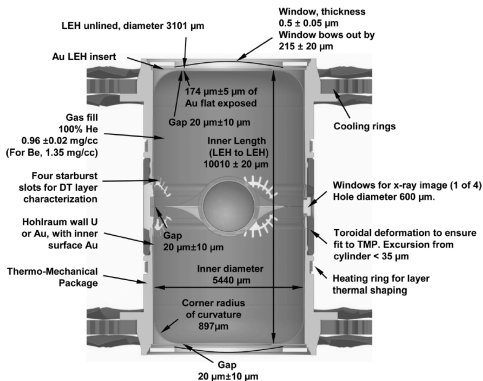
量纲分析与自相似流动

量纲

IT 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波



逆韧致吸收对腔靶的要求

- 腔壁采用高- Z 材料(如 Au, U): 增加 Z , 提高激光在腔壁的吸收效率;
- 激光波长尽量短($0.351 \mu\text{m}$): 增加 n_e , 提高激光在腔壁的吸收效率
- 充气气体的 Z 尽量低(He): 减小 Z , 降低激光在气体中的吸收;
- 充气气体的密度尽量低: 减小 n_e , 降低激光在气体中的吸收。

提要

吸收与热传导

逆韧致吸收

电子热传导

量纲分析与自相似流动

量纲

IT 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波

决定逆韧致吸收系数的电子-离子碰撞频率

$$\nu_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{Z^2 e^4 n_i}{T_e^{3/2} m_e^{1/2}} \ln \frac{2^{5/2} T_e^{3/2}}{\gamma^{5/2} \omega Z e^2 m_e^{1/2}}.$$

基于很多前提假定：

- 电子在光场中的速度分布遵从麦克斯韦分布；
- 光场不改变电子与离子之间的微观碰撞过程。

然而，激光与等离子体之间的强烈相互作用会使上述假定失效：

- 强烈的逆韧致吸收会导致电子速度分布显著偏离麦克斯韦分布，出现所谓的 Langdon 效应；
- 光场很强时，电子与离子之间的库伦散射过程受到光场的影响，微分散射截面发生变化，发生多光子吸收过程，吸收系数依赖于电场强度。

电子-离子之间的微分库伦散射截面为，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{Z^2 e^4}{E_{kin}^2},$$

其中 E_{kin} 是电子的动能。

Langdon 效应

由于散射截面与电子动能的平方成反比，逆轫致吸收首先加热的是低能电子，如果电子与电子之间的库伦散射不够快，电子速度分布就偏离麦克斯韦分布，

$$f_e(v) \propto \exp \left[- \left(\frac{v}{v_T} \right)^m \right],$$

其中

$$m(\alpha) = 2 + \frac{3}{1 + 1.66/\alpha^{0.724}}, \text{ where } \alpha = Zv_{osc}^2/v_T^2.$$

提要

吸收与热传导

逆轫致吸收

电子热传导

量纲分析与自相似流动

量纲

IT 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波

多光子吸收效应

电子在光场中的动能近似为

$$E_{kin} \sim \frac{1}{2} m_e (v_{osc}^2 + v_T^2),$$

当电子在光场中的振荡速度远大于电子的无规热速度，导致电子与离子的散射截面大幅下降，电子-离子有效碰撞频率降低，就出现多光子吸收效应。

提要

吸收与热传导

逆韧致吸收

电子热传导

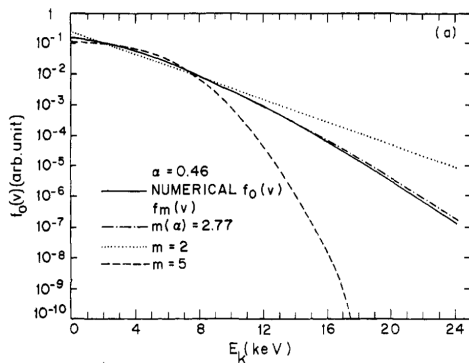
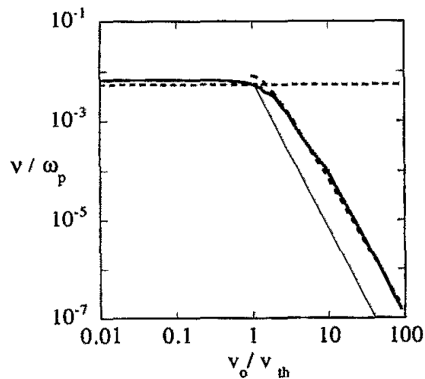
量纲分析与自相似流动

量纲

IT 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波

逆韧致吸收对电子速度分布的影响^a。逆韧致吸收过程的有效碰撞频率 ν_{ei}/ω_{pe} 与 ν_{osc}/v_T 之间的关系^b。^a J. P. Matte et al., Plasma Phys. Controlled Fusion **30**, 1665 (1988).^a C. D. Decker et al., Phys. Plasmas **1**, 4043 (1994).

提要

吸收与热传导

逆韧致吸收

电子热传导

量纲分析与自相

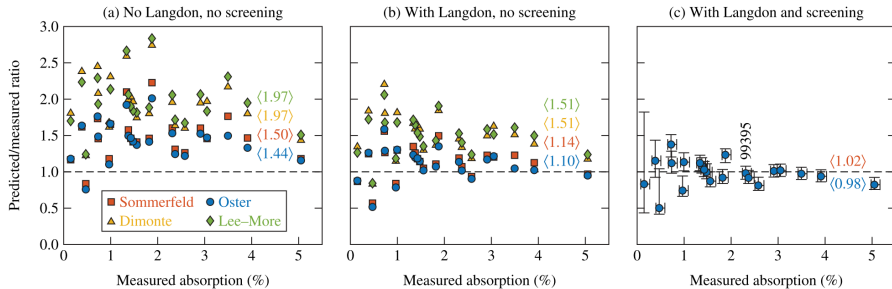
似流动

量纲

IT 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波



逆韧致吸收这样一个基础概念，直到 2023 年才在激光等离子体领域做了比较全面的实验研究。结果表明，传统的逆韧致吸收系数与实验结果有较大偏差，需要做较大修正^a。

^a D. Turnbull et al., Phys. Rev. Lett. **130**, 145103 (2023)

提要

吸收与热传导

逆韧致吸收

电子热传导

量纲分析与自相

似流动

量纲

II 定理

自相等温稀疏波

非线性热波

来自 x_0 两侧的电子热流密度分别为

$$q_+ = \frac{n_e}{2\tau_{ei}} \int_{x_0 - \lambda_e}^{x_0} T_e(x) dx,$$

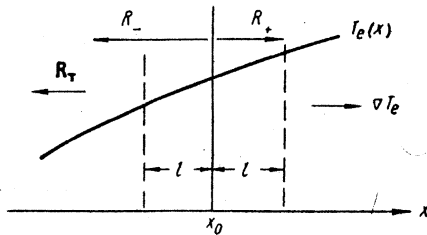
$$q_- = \frac{n_e}{2\tau_{ei}} \int_{x_0}^{x_0 + \lambda_e} T_e(x) dx,$$

其中 τ_{ei} 是电子-离子碰撞时间, $\lambda_e = \tau_{ei} v_e$ 是电子平均自由程, $v_e = \sqrt{T_e/m_e}$ 是电子特征热速度。于是通过 x_0 的净电子热流密度为

$$q = q_+ - q_- \sim -\frac{n_e \lambda_e^2}{2\tau_{ei}} \frac{\partial T_e}{\partial x}.$$

由此可得电子热传导系数,

$$\kappa_e = \frac{n_e \lambda_e^2}{2\tau_{ei}} = \frac{n_e v_e^2 \tau_{ei}}{2}.$$



由于

$$\tau_{ei} = \frac{3\sqrt{m_e}T_e^{3/2}}{4\sqrt{2\pi}Z^2n_ie^4\ln\Lambda}.$$

因此电子的热导敏感依赖于温度,

$$\kappa_e = \frac{3T_e^{5/2}}{8\sqrt{2\pi}Zm_e^{1/2}e^4\ln\Lambda} \propto T_e^{5/2}. \quad (14)$$

电子热导几乎不依赖于等离子体密度。

更严格的计算表明，电子热导系数为

$$\kappa_{\text{SH}} = \delta_Z n_e v_e^2 \tau_{ei}. \quad (15)$$

这里 δ_Z 是一个与离子电荷数 Z 有关的常数，

$$\delta_Z \equiv \frac{\kappa_{\text{SH}}}{n_e v_e^2 \tau_{ei}} = 3.20 \frac{0.24 + Z}{1 + 0.24Z}.$$

我们列表给出若干 δ_Z 。

Z	1	2	3	4	∞
δ_Z	3.16	4.9	6.1	6.9	$128/3\pi$

κ_{SH} 也称为 Spitzer-Härm 热导系数^a。

^a L. Spitzer and R. Härm, Phys. Rev. 89, 977 (1953).

提要

吸收与热传导

逆轆致吸收

电子热传导

量纲分析与自相似流动

量纲

II 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波

更深入的分析发现, Spitzer-Härm 热传导系数成立的前提条件相当苛刻,

$$L_T/\lambda_e > 10^2. \quad (16)$$

这里 $L_T = T_e/|\nabla T_e|$ 是电子温度梯度标长。当条件(16)不能被满足时, Spitzer-Härm 热传导(15)就不能成立。引入所谓的自由流热流 q_f (free-streaming heat flow),

$$q_f = m_e n_e v_e^3. \quad (17)$$

我们将热流经验地写为

$$q = \min \{f q_f, \kappa_{\text{SH}} \nabla T_e\}. \quad (18)$$

其中 f 是所谓的**限流因子**(heat flux limiter)。根据与实验对比的结果, 限流因子的取值范围通常在 $0.03 \sim 0.1$ 之间。方程(18)也称为**限流模型**。

提要

吸收与热传导

逆轫致吸收

电子热传导

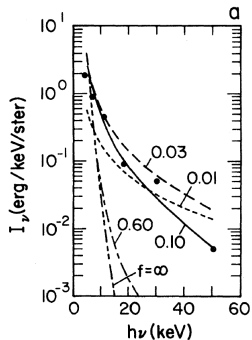
量纲分析与自相似流动

量纲

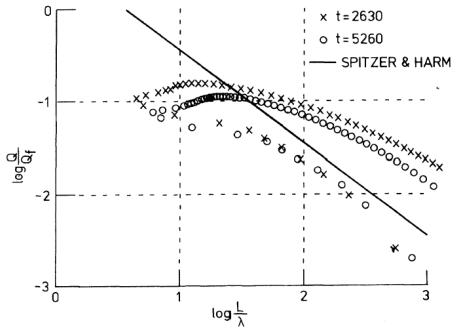
II 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波



将流体模拟与实验结果进行对比，发现采用限流模型的必要性^a。



数值求解 Fokker-Planck 方程，证实了限流模型的必要性^b。

^a R. C. Malone et al., Phys. Rev. Lett. **34**, 721 (1975).

^b A. R. Bell et al., Phys. Rev. Lett. **46**, 243 (1981).

提要

吸收与热传导

逆轫致吸收

电子热传导

量纲分析与自相

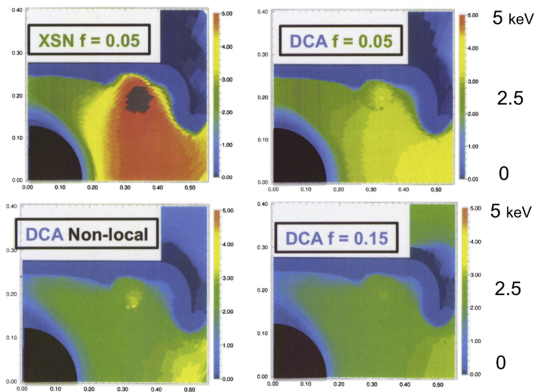
似流动

量纲

IT 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波



NIF 点火腔靶温度模拟结果

NIF 点火腔靶温度分布与限流因子以及原子模型的关系。美国科学家认为，点火腔靶的限流因子取为 0.15，模拟与实验更一致^a。

^a M. D. Rosen et al., High Energy Density Physics **7**, 180 (2011)

力学的基本量纲

- 长度量纲: L ;
- 时间量纲: T ;
- 质量量纲: M 。

定理

任意一个力学量 a 的量纲是基本量纲的幂函数,

$$[a] = M^\alpha L^\beta T^\gamma. \quad (19)$$

其中 α 、 β 、 γ 是常数。

任意力学量的量纲可以由三个基本量纲导出, 例如

- $[\text{密度}] = ML^{-3}$;
- $[\text{压强}] = ML^{-1}T^{-2}$;
- $[\text{速度}] = LT^{-1}$;
- $[\text{能量}] = ML^2T^{-2}$;
- \dots .

在研究任意一个具体的物理现象时，我们总是希望找到刻画该物理现象的物理量之间的关系，也就是找到如下形式的关系式，

$$a = f(a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+m}). \quad (20)$$

其中 a 是待求的物理量； a_1, \cdots, a_{k+m} 是已知的物理量，被称为控制参数(governing parameters)。在 $k+m$ 个控制参数中，其中有 k 个控制参数 a_1, \cdots, a_k 的量纲是相互独立的，其他 m 个控制参数 a_{k+1}, \cdots, a_{k+m} 的量纲必然可以表示为 a_1, \cdots, a_k 量纲的幂，

$$[a_{k+1}] = \prod_{i=1}^k [a_i]^{\alpha_{1,i}}, \cdots, [a_{k+m}] = \prod_{i=1}^k [a_i]^{\alpha_{m,i}}. \quad (21)$$

待求物理量 a 的量纲必然也能表示为 a_1, \cdots, a_k 量纲的幂，

$$[a] = \prod_{i=1}^k [a_i]^{\alpha_i}. \quad (22)$$

提要

吸收与热传导

逆轲致吸收

电子热传导

量纲分析与自相

似流动

量纲

 Π 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波

引入无量纲化的参数

$$\Pi_i = \frac{a_{k+i}}{\prod_{j=1}^k a_j^{\alpha_{i,j}}}, \quad i = 1, \dots, m \quad (23a)$$

$$\Pi = \frac{a}{\prod_{j=1}^k a_j^{\alpha_j}}. \quad (23b)$$

其中 Π 又可以写为

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m})}{\prod_{j=1}^k a_j^{\alpha_j}} \\ &= \frac{1}{\prod_{j=1}^k a_j^{\alpha_j}} f(a_1, \dots, a_k, \Pi_1 \prod_{j=1}^k a_j^{\alpha_{1,j}}, \dots, \Pi_m \prod_{j=1}^k a_j^{\alpha_{m,j}}). \end{aligned} \quad (24)$$

提要

吸收与热传导

逆韧致吸收

电子热传导

量纲分析与自相似流动

量纲

Π 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波

因此, Π 可以表示为 k 个有量纲的控制参数以及 m 个无量纲参数 $\{\Pi_i\}$ 的函数,

$$\Pi = F(a_1, \cdots, a_k, \Pi_1, \cdots, \Pi_m).$$

由于 a_1, \cdots, a_k 的数值与单位的选取有关, 而无量纲化参数 Π 和 $\{\Pi_i\}$ 与单位的选取无关, 因此 Π 不依赖于 a_1, \cdots, a_k ,

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \cdots, \Pi_m). \quad (25)$$

最终, 我们得到如下结论(也称 Π 定理)

$$f = \prod_{j=1}^k a_j^{\alpha_j} \Phi \left(\frac{a_{k+1}}{\prod_{j=1}^k a_j^{\alpha_{1,j}}}, \cdots, \frac{a_{k+m}}{\prod_{j=1}^k a_j^{\alpha_{m,j}}} \right). \quad (26)$$

在 II 定量(26) 中, 如果 $m = 1$, 那么 f 可以表示为

$$f = \prod_{j=1}^k a_j^{\alpha_j} \Phi \left(\frac{a_{k+1}}{\prod_{j=1}^k a_j^{\alpha_{1,j}}} \right). \quad (27)$$

此时物理问题转化为求解只含一个变量 $\xi = a_{k+1} / \prod_{j=1}^k a_j^{\alpha_{1,j}}$ 的函数 $\Phi(\xi)$ 。若 f 满足的是一个偏微分方程, 问题最终化简为求解关于 $\Phi(\xi)$ 的常微分方程, 此时流体的运动是**自相似的**(self-similar)。

提要

吸收与热传导

逆轆致吸收

电子热传导

量纲分析与自相

似流动

量纲

II 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波

例题：利用量纲分析方法证明勾股定理。

证明：对于给定一个锐角 ϕ 的直角三角形，其面积完全决定于斜边长 c 和角度 ϕ ，

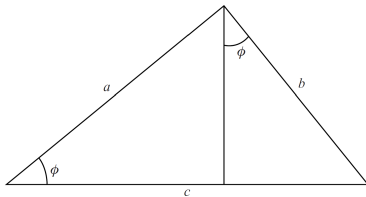
$$S = f(c, \phi).$$

面积的量纲为 L^2 ，边长的量纲为 L ，而角度是无量纲的。依据 II 定理，直角三角形的面积只能表示为如下形式

$$S = c^2 f(\phi).$$

如右图所示，一个直角又可分为两个相似的直角三角形之和，由 $S = S_1 + S_2$ ，其中 $S_1 = a^2 f(\phi)$ ， $S_2 = b^2 f(\phi)$ ，因此我们得

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



例题：利用量纲分析方法研究单摆的周期。

解：单摆的振动周期 θ 只可能表示为如下形式

$$\theta = f(\ell, m, g, \phi_0).$$

其中 ℓ 是单摆的长度， g 是重力加速度， m 是摆的质量， ϕ_0 是摆的初始幅度角。各个量的量纲为

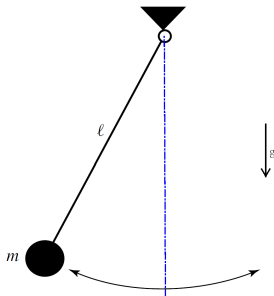
$$[\theta] = T, [\ell] = L, [m] = M, [g] = LT^{-2}, [\phi_0] = 1.$$

利用 II 定量，单摆的周期可表示为

$$\theta = \sqrt{(\ell/g)} f(\phi_0).$$

在小振幅的情况下， $f(\phi_0) \approx f(0) = \text{const}$ 。因此，作小振幅运动的单摆，其周期仅依赖于摆长和重力加速度，

$$\theta = \text{const} \times \sqrt{\ell/g}.$$



强爆炸的 Taylor-Sedov 解

利用量纲分析方法在力学领域得到很多重要的结果，其中强爆炸的激波解，即 Taylor-Sedov 解是最为著名的一个例子。所谓强爆炸，指的是即使远离爆炸源 $r \gg r_0$ ，激波依然很强的爆炸，即有

$$\frac{p_1}{p_0} \gg \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1},$$

此时经过冲击后的气体密度则可以近似为

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}.$$

对于球对称的爆炸，任意一个物理量的解为

$$f = f(r, t; \rho_0, p_0, E, r_0, \cdots).$$

其中 p_0 和 ρ_0 是未受扰动流体的压强和密度， E 是爆炸所释放的能量， r_0 是爆炸源的初始大小。

提要

吸收与热传导

逆轭致吸收

电子热传导

量纲分析与自相似流动

量纲

II 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波

在强爆照情况下, 在 $r \gg r_0$ 时, r_0 的大小可以忽略, 即 $r_0 \simeq 0$; 由于 $p \gg p_0$, 未受扰动气体的压强也可以忽略, 即 $p_0 \simeq 0$ 。此时物理量的解可近似写为

$$f \simeq f(r, t; \rho_0, E).$$

即激波的传播只依赖于两个物理参数: 气体的初始密度 ρ_0 以及爆炸所释放的能量 E 。由这两个物理参数以及两个变量 t 以及 r , 我们只能构造出一个无量纲变量,

$$\xi = r \left(\frac{\rho_0}{Et^2} \right)^{1/5}. \quad (28)$$

因此强激波的传播是自相似的。

提要

吸收与热传导

逆轆致吸收

电子热传导

量纲分析与自相

似流动

量纲

II 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波

因为运动是自相似的, 在激波波阵面 R 处, 必然有 $\xi = \text{const}$ 。我们就得到激波面随时间的关系,

$$R = \xi_0 \left(\frac{Et^2}{\rho_0} \right)^{1/5}. \quad (29)$$

这里 ξ_0 是一个常数。如果能够测量激波半径随时间的变化关系, 就能够得到爆炸所释放的能量 E ,

$$\ln R(t) = \frac{2}{5} \ln t + \frac{1}{5} \ln E + \ln \xi_0 - \frac{1}{5} \ln \rho_0.$$

那么在固定参考系中, 激波的传播速度为

$$U_s = \frac{dR}{dt} = \frac{2}{5} \frac{R}{t} = \frac{2}{5} \xi_0 \left(\frac{E}{\rho_0 t^3} \right)^{1/5} \quad (30)$$

激波速度与爆炸能量的关系为 $U_s \propto E^{1/5}$, 随时间以 $t^{-3/5}$ 的方式降低。

提要

吸收与热传导

逆韧致吸收

电子热传导

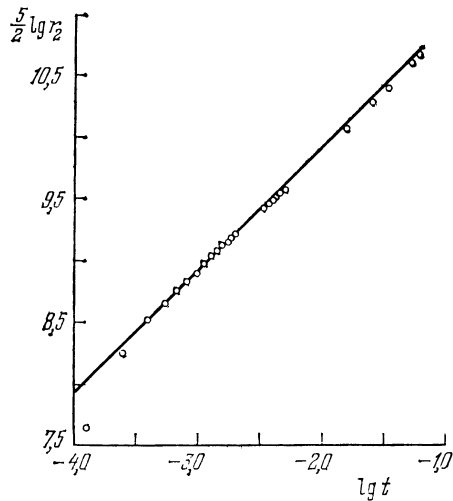
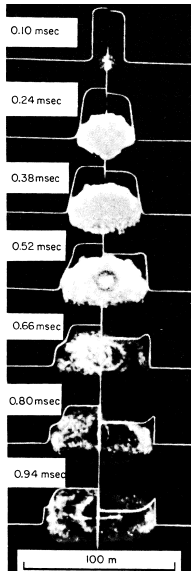
量纲分析与自相似流动

量纲

II 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波



G. I. Taylor分析了第一颗原子弹爆炸的测量结果，与自相似理论高度一致。

提要

吸收与热传导

逆韧致吸收

电子热传导

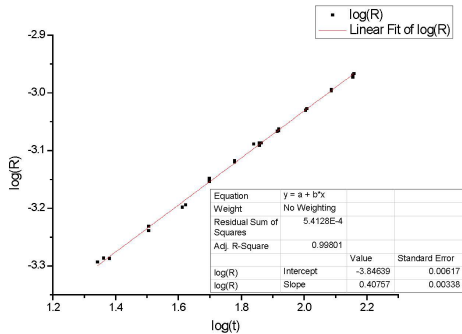
量纲分析与自相似流动

量纲

II 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波



在大气环境中，激光脉冲辐照固体物质在空气中产生的激波也满足 Taylor-Sedov 定标率。[袁鹏、仲珩，2014]

提要

吸收与热传导

逆轆致吸收

电子热传导

量纲分析与自相似流动

量纲

II 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波

若流体在膨胀过程中保持温度均匀，这就是等温稀疏波。在特殊的情况下，等温稀疏波也可以是自相似的，此时所有的物理量通过 (x/t) 依赖与空间和时间。引入新的变量

$$\xi = \frac{x}{t}.$$

那么

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{d}{d\xi} = -\frac{\xi}{t} \frac{d}{d\xi}, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{d}{d\xi} = \frac{1}{t} \frac{d}{d\xi},\end{aligned}$$

提要

吸收与热传导

逆轆致吸收

电子热传导

量纲分析与自相似流动

量纲

IT 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波

于是一维理想流体的连续性方程和动量方程变为

$$(u - \xi) \frac{d\rho}{d\xi} + \rho \frac{du}{d\xi} = 0,$$

$$(u - \xi) \frac{du}{d\xi} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\xi}.$$

理想气体在等温情况下的状态方程为 $p = c_T^2 \rho$, 这里 $c_T = (T/m)^{1/2}$ 是等温声速。于是动量方程可写为

$$(u - \xi) \frac{du}{d\xi} = -\frac{c_T^2}{\rho} \frac{d\rho}{d\xi}.$$

提要

吸收与热传导

逆韧致吸收

电子热传导

量纲分析与自相似流动

量纲

IT 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波

与连续性方程联立，消去 $(du/d\xi)$ ，有

$$(u - \xi) \frac{d\rho}{d\xi} = \frac{c_T^2}{(u - \xi)} \frac{d\rho}{d\xi}.$$

若 $d\rho/d\xi \neq 0$ ，那么有

$$(u - \xi)^2 = c_T^2.$$

因此

$$\xi = u \pm c_T.$$

在下面的计算中，我们只取 $+$ 号，即稀疏波由左向右传播，那么

$$\frac{x}{t} = u + c_T.$$

提要

吸收与热传导

逆韧致吸收

电子热传导

量纲分析与自相似流动

量纲

II 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波

再利用连续性方程，有

$$\frac{du}{d\rho} = -\frac{u - \xi}{\rho} = \frac{c_T}{\rho},$$

积分，有

$$u = c_T \ln(\rho/\rho_0) = \frac{x}{t} - c_T.$$

这里积分边界条件为 $u(\rho = \rho_0) = 0$ 。于是等温稀疏波的密度分布为

$$\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{x}{c_T t} - 1\right).$$

等温稀疏波波头的速度则为 c_T 。

等温稀疏波的总能量为

$$E = \int_{-\infty}^{c_T t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \rho c_T^2 \right) dx = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho_0 c_T^3 t. \quad (31)$$

这表明等温稀疏波的能量随时间增长。利用能量方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \rho c_T^2 \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho c_T^2 \right) u + q \right] = 0.$$

容易验证，在等温稀疏波的波头，必须有能流进入稀疏波，

$$q = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho_0 c_T^3. \quad (32)$$

这里负号表示能流由右流向左边。

为了维持流体的等温稀疏，需要不断向流体输入能量。

在很多时候，热传导系数 κ 、等容热容 c_V 以及流体的内能 ε 都可以近似为温度的幂函数，

$$\varepsilon = \alpha T^{k+1}, \quad c_V = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_V = (k+1)\alpha T^k, \quad \kappa = BT^n.$$

对于完全电离等离子体， $k = 0$ ， $n = 5/2$ 。引入单位体积的内能 E ，

$$E = \alpha \rho T^{k+1}, \quad T = \left(\frac{E}{\alpha \rho} \right)^{1/(k+1)}, \quad (33)$$

忽略流体运动时，温度的演化方程可以改写为内能演化方程，

$$\frac{\partial E}{\partial t} = a \nabla \cdot (E^m \nabla E) + Q, \quad (34)$$

其中 Q 是热源。当 $m \neq 0$ 时，这是一个非线性扩散方程，其中

$$m = \frac{n-k}{k+1}, \quad a = \frac{B}{(\alpha \rho)^{(n+1)/(k+1)}}.$$

例题：一维球对称非线性扩散方程的自相似解

无限大均匀流体中，在 $t = 0$ 时刻于 $\mathbf{r} = 0$ 处瞬时释放 Q_0 的热量： $Q = Q_0 \delta(\mathbf{r}) \delta(t)$ 。假定流体能量按照方程(34)演化，求能量密度的演化。

这个问题是自相似的，因为只有四个控制参数 (r, t, Q_0, a) 。根据方程的物理意义， E 是能量密度，其量纲为

$$[E] = ML^{-1}T^{-2},$$

这里 M 、 L 和 T 分别是质量、长度和时间的量纲。为了保证方程(34)左右两边具有相同的量纲，系数 a 的量纲为

$$[a] = M^{-m}L^{m+2}T^{2m-1}.$$

而 Q_0 是能量，其量纲为

$$[Q_0] = ML^2T^{-2}.$$

提要

吸收与热传导

逆轆致吸收

电子热传导

量纲分析与自相

似流动

量纲

IT 定理

自相似等温稀疏波

非线性热波

由量纲方程

$$[Q_0]^{m_1} [a]^{m_2} [t]^{m_3} [r] = 1. \quad (35)$$

我们得到如下方程组,

$$m_1 = mm_2, \quad m_2 = m_3, \quad m_2 = -\frac{1}{3m+2}.$$

该方程组有唯一的解,

$$m_1 = -\frac{m}{3m+2}, \quad m_2 = m_3 = -\frac{1}{3m+2}.$$

由此我们获得无量纲变量 ζ ,

$$\zeta = \frac{r}{(Q_0^m a t)^{1/(3m+2)}}. \quad (36)$$

由量纲方程

$$[E] = [Q_0]^\alpha [a]^\beta [t]^\gamma = 1. \quad (37)$$

我们得到如下方程组,

$$\alpha - m\beta = 1, \quad 2\alpha + (m+2)\beta = -1, \quad -2\alpha + (2m-1)\beta + \gamma = -2.$$

该方程组有唯一的解,

$$\alpha = \frac{2}{3m+2}, \quad \beta = \gamma = -\frac{3}{3m+2}.$$

因此方程(34)的自相似解可以写为

$$E = \left(\frac{Q_0^{2/3}}{at} \right)^{3/(3m+2)} f(\zeta). \quad (38)$$

其中 $f(\zeta)$ 是待定的函数。

在球对称情况下, 方程(34)为

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{a}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 E^m \frac{\partial E}{\partial r} \right). \quad (39)$$

在有限的时间内, 温度影响的范围是有限的, 即 $E(r \rightarrow \infty, t) = 0$; 另一方面, 根据问题的对称性, 能量密度在原点的梯度为零, 即 $(\partial E / \partial r)_{r=0} = 0$ 。我们就得到问题的边界条件,

$$E(r \rightarrow \infty, t) = 0, \quad (\partial E / \partial r)_{r=0} = 0. \quad (40)$$

我们将(38)代入方程(39), 有

$$\frac{d^2 f^{m+1}}{d\zeta^2} + \frac{2}{\zeta} \frac{df^{m+1}}{d\zeta} + \frac{m+1}{3m+2} \zeta \frac{df}{d\zeta} + \frac{3(m+1)}{3m+2} f = 0. \quad (41)$$

由(40), 方程(39)的边界条件为

$$f(\zeta \rightarrow \infty) = 0, \quad (df/d\zeta)_{\zeta \rightarrow \infty} = 0. \quad (42)$$

容易看到, $f(\zeta) = 0$ 满足非线性方程(41)和边界条件(42)。为了求解非零解, 将方程(41)两端同时乘以 ζ^2 , 有

$$\zeta^2 \frac{d^2 f^{m+1}}{d\zeta^2} + 2\zeta \frac{df^{m+1}}{d\zeta} + \frac{m+1}{3m+2} \zeta^3 \frac{df}{d\zeta} + \frac{3(m+1)}{3m+2} \zeta^2 f = 0.$$

该方程可改写为

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\zeta^2 \frac{df^{m+1}}{d\zeta} + \frac{m+1}{3m+2} \zeta^3 f \right) = 0. \quad (43)$$

对方程积分一次, 并利用边界条件, 我们有

$$\frac{df^{m+1}}{d\zeta} + \frac{m+1}{3m+2} \zeta f = 0.$$

这个方程的形式可改写一下,

$$df^m = -\frac{m}{2(3m+2)} d\zeta^2.$$

再积分一次，并利用边界条件，有

$$f(\zeta) = \begin{cases} \left[\frac{m}{2(3m+2)} \right]^{1/m} (\zeta_f^2 - \zeta^2)^{1/m}, & \text{when } \zeta < \zeta_f, \\ 0, & \text{when } \zeta > \zeta_f. \end{cases} \quad (44)$$

其中 ζ_f 是待定常数，由能量守恒决定。利用能量守恒，有

$$Q_0 = \int_V E d^3r = 4\pi Q_0 \int_0^\infty f(\zeta) \zeta^2 d\zeta.$$

将(44)代入上式，有

$$\begin{aligned} Q_0 &= 4\pi Q_0 \int_0^{\zeta_f} (\zeta_f^2 - \zeta^2)^{1/m} \zeta^2 d\zeta \\ &= 2\pi Q_0 \zeta_f^{(3m+2)/m} \int_0^1 (1-x)^{1/m} x^{1/2} dx. \end{aligned}$$

利用积分公式

$$\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

其中 $\Gamma(x)$ 是伽马函数。我们得

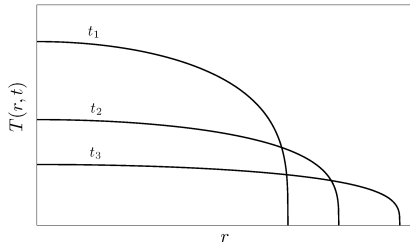
$$\zeta_f = \left[\frac{2^{1/m}(3m+2)^{1/m}\Gamma(1/m+5/2)}{2\pi m^{1/m}\Gamma(1+1/m)\Gamma(3/2)} \right]^{m/(3m+2)}.$$

我们将结果重新写一遍,

$$E(r, t) = \left(\frac{Q_0^{2/3}}{at} \right)^{3/(3m+2)} f(\zeta), \quad \zeta = \frac{r}{(Q_0^m at)^{1/(3m+2)}},$$

$$f(\zeta) = \begin{cases} [m/2(3m+2)]^{1/m}(\zeta_f^2 - \zeta^2)^{1/m}, & \text{when } \zeta < \zeta_f, \\ 0, & \text{when } \zeta > \zeta_f, \end{cases}$$

$$\zeta_f = \left[\frac{2^{1/m}(3m+2)^{1/m}\Gamma(1/m+5/2)}{2\pi m^{1/m}\Gamma(1+1/m)\Gamma(3/2)} \right]^{m/(3m+2)}.$$



非线性热波有一个显著的波前，温度在波前不可导。