量子物理 2025 春季学期考试

——————简答题——————

1. 在求解氢原子薛定谔方程的过程中出现了 3 个量子数，给出这些量子数的物理解释，各量子数如何取值?
2. 简述斯特恩–盖拉赫实验及物理意义。
3. 设氢原子的核外电子组态为 2p 3p ，在 LS 耦合下可能形成的原子态有哪些?
4. 对于双自旋体系，分别给出其非耦合表象和耦合表象的本征态 (完备基) 。
5. 写出耦合表象两电子自旋波函数的单重态和三重态，以及 S_1^2, S_2^2, S^2, S_z 的相应取值。
6. 写出用 CNOT 门将一个直积态转换成纠缠态的过程。
7. 如何区分纯态和混合态? 单比特量子态的纯态和混合态在 Bloch 球上如何区分?
8. 什么是泡利不相容原理以及量子不可克隆定理?
9. 写出 Bell 基，画出双量子比特门 – Bell 基制备的线路。
10. 量子比特可以由二能级量子系统来实现，请列举两类典型的二能级量子系统，并分别说明如何实现对这两类量子比特的操控。

——————计算题——————

1. 假设氢原子处于 $n=3, l=1$ 的状态，则原子的轨道角动量在空间有哪些可能的取向? 各个可能取向的角动量与 z 轴之间的夹角?
2. 粒子处于态 $\psi=\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{10}+cY_{20}$ ，其中 Y_{lm} 为球谐函数，求：(1) 归一化系数 c ；(2) L_z 的可能值；(3) 测得到 $L^2=6\hbar^2$ 的概率。
3. 证明：若两个厄米算子 A, B 的乘积 AB 也是厄米算子，则 A, B 应该满足什么条件?
4. 已知 $\left|\Psi\right\rangle_A=\frac{1}{\sqrt{2}}(\left|0\right\rangle_A+i\left|1\right\rangle_A), \left|\Psi\right\rangle_B=\frac{1}{\sqrt{2}}(\left|0\right\rangle_B-\left|1\right\rangle_B)$ ，求它们的直积态。
5. 计算纯态 $\left|\Psi\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(\left|H\right\rangle+\left|V\right\rangle)$ 和混合态 $\left\{\frac{1}{2}:\left|H\right\rangle;\frac{1}{2}:\left|V\right\rangle\right\}$ 的各自密度算子的形式。
6. 对于自旋 1/2 的系统，定义升降算子 $S_\pm=S_x\pm iS_y$ 。(1) 写出 $S_\pm$ 在 S_z 表象中的矩阵；(2) 计算 $S_-\left|\uparrow\right\rangle$ 和 $S_+\left|\downarrow\right\rangle$ ；(3) 验证 S_+S_- 的特征值。
7. 一个自旋 1/2 的粒子处在自旋状态 $N\begin{pmatrix}3i\\4\end{pmatrix}$ ，求：(1) 归一化系数 N ；(2) 测量 S_x, S_y, S_z 得到的期望值分别是多少?
8. 两比特系统初始态为 $\left|\varphi_0\right\rangle=\frac{1}{2}\left(\left|00\right\rangle+\left|01\right\rangle+\left|10\right\rangle+\left|11\right\rangle\right)$ 。(1) 对其作用受控相位门 $\mathrm{CZ}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ ，求输出态 $\left|\varphi_1\right\rangle$ ；(2) 再对第一个比特作用 Hadamard 门，求最终态 $\left|\varphi_2\right\rangle$ ；(3) 测量得到 $\left|11\right\rangle$ 的概率是多少?
9. 两个态 $\left|\Psi_1\right\rangle, \left|\Psi_2\right\rangle$ 的保真度定义为 $F=\left|\left\langle\Psi_1\mid\Psi_2\right\rangle\right|^2$ ，计算如下两个量子态之间的保真度：$\left|\Psi_1\right\rangle=\cos\frac{\theta_1}{2}\left|0\right\rangle+\sin\frac{\theta_1}{2}\left|1\right\rangle, \left|\Psi_2\right\rangle=\cos\frac{\theta_2}{2}\left|0\right\rangle+i\sin\frac{\theta_2}{2}\left|1\right\rangle.$
10. Alice 和 Bob 共享一对纠缠光子 (量子信道) $\left|\Phi^+\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|00\right\rangle+\left|11\right\rangle\right)$ ，推导 Alice 如何将任意量子态 $\left|\Psi\right\rangle=\alpha\left|0\right\rangle+\beta\left|1\right\rangle$ 通过量子隐形传态过程来传给 Bob ?

答案

1. n (主量子数) 反映了轨道能量为 $-E_0/n^2=-13.6\ \mathrm{eV}/n^2$ ；l (角量子数) 反映了轨道角动量 (理解为“公转”，与自旋的“自转”并不相同) 的模长为 $\sqrt{l(l+1)}\hbar$ ，m (磁量子数) 反映了轨道角动量 z 方向的分量为 $m\hbar$ 。约束条件为

$$n=1,\ 2,\ \ldots$$
$$l=0,\ 1,\ \ldots,n-1$$
$$m=-l,-l+1,\ \ldots,l-1,\ l$$

2. 银原子经过不均匀分布的磁场会分裂成 2 束，对应自旋向上与自旋向下。预言了电子的自旋。
3. p, p 对应 2 个核外电子轨道角动量分别为 $l_1=1,\ l_2=1$ (s, p, d, f 对应 $l=0,1,2,3$)，总轨道角动量为 $l=l_1+l_2,l_1+l_2-1,\ \ldots,\left|l_1-l_2\right|=2,1,0$ 。2 个核外电子的自旋都是 $s_1=s_2=1/2$ ，总自旋为 $s=s_1+s_2,s_1+s_2-1,\ \ldots,\left|s_1-s_2\right|=1,0$ 。总角动量为 $j=l+s,\ldots,\left|l-s\right|$：
   (A) 当 $l=2,\ s=1$ ，$j=3,2,1$ ，对应 $^3\mathrm{D}_3,^3\mathrm{D}_2,^3\mathrm{D}_1$ 。(符号 $^{2s+1}?_j$ ，$?=\mathrm{S,P,D,F}$ 对应 $l=0,1,2,3$)
   (B) 当 $l=2,\ s=0$ ，$j=2$ ，对应 $^1\mathrm{D}_2$ 。
   (C) 当 $l=1,\ s=1$ ，$j=2,1,0$ ，对应 $^3\mathrm{P}_2,^3\mathrm{P}_1,^3\mathrm{P}_0$ 。
   (D) 当 $l=1,\ s=0$ ，$j=1$ ，对应 $^1\mathrm{P}_1$ 。
   (E) 当 $l=0,\ s=1$ ，$j=1$ ，对应 $^3\mathrm{S}_1$ 。
   (F) 当 $l=0,\ s=0$ ，$j=0$ ，对应 $^1\mathrm{S}_0$ 。
4. 非耦合表象，只需将 $\left|\uparrow\right\rangle_z,\left|\downarrow\right\rangle_z$ 进行克罗内克乘积即可：

$$\left|\uparrow\right\rangle_z\otimes\left|\uparrow\right\rangle_z=(1,\ 0)^T\otimes(1,\ 0)^T=(1,\ 0,\ 0,\ 0)^T$$
$$\left|\uparrow\right\rangle_z\otimes\left|\downarrow\right\rangle_z=(1,\ 0)^T\otimes(0,\ 1)^T=(0,\ 1,\ 0,\ 0)^T$$
$$\left|\downarrow\right\rangle_z\otimes\left|\uparrow\right\rangle_z=(0,\ 1)^T\otimes(1,\ 0)^T=(0,\ 0,\ 1,\ 0)^T$$
$$\left|\downarrow\right\rangle_z\otimes\left|\downarrow\right\rangle_z=(0,\ 1)^T\otimes(0,\ 1)^T=(0,\ 0,\ 0,\ 1)^T$$

「克罗内克乘积将 $n\times m$ 与 $q\times p$ 的矩阵映射至 $(nq)\times(mp)$ 的矩阵：

$$\begin{pmatrix}A_1^1 & \cdots & A_m^1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_1^n & \cdots & A_m^n\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}B_1^1 & \cdots & B_p^1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ B_1^q & \cdots & B_p^q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1^1B & \cdots & A_m^1B\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_1^nB & \cdots & A_m^nB\end{pmatrix}$$

」

耦合表象的选取并不直接，但是它具有较好的物理意义：只需定义 2 个电子耦合的“角动量算子”即可 ($I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 是单位矩阵)：

$$J_x=S_x\otimes I+I\otimes S_x$$
$$J_y=S_y\otimes I+I\otimes S_y$$
$$J_z=S_z\otimes I+I\otimes S_z$$
$$J^2=J_x^2+J_y^2+J_z^2$$

可以利用 MATLAB 计算克罗内克乘积 $\mathrm{kron}(A,B)$ ，得到

$$J_z=\hbar\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\quad J^2=\hbar^2\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

耦合表象选取为矩阵 J_z,J^2 共同的特征向量：

$$J_3\chi_{1,1}=\hbar\chi_{1,1}\qquad J_3\chi_{1,0}=0\qquad J_3\chi_{1,-1}=-\hbar\chi_{1,-1}\qquad J_3\chi_{0,0}=0$$
$$J^2\chi_{1,1}=2\hbar^2\chi_{1,1}\qquad J^2\chi_{1,0}=2\hbar^2\chi_{1,0}\qquad J^2\chi_{1,-1}=2\hbar^2\chi_{1,-1}\qquad J^2\chi_{0,0}=0$$

其中

$\chi_{1,1}=(1,\,0,\,0,\,0)^T \qquad \chi_{1,0}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,\,1,\,1,\,0)^T \qquad \chi_{1,-1}=(0,\,0,\,0,\,1)^T \qquad \chi_{0,0}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,\,1,\,-1,\,0)^T$

前三者对应 J^2 的特征值是相同的，称为三重态。对于 $\chi_{q,p}$ ，总角动量 (J^2 的特征值) 的模长为 $\sqrt{q(q+1)}\hbar$ ， z 方向 (J_3 的特征值) 的分量为 $p\hbar$.

5. 前一部分详见上题。「这里 S_1^2, S_2^2, S^2, S_z 个人认为是 J_x^2, J_y^2, J^2, J_z ，后 2 项详见上题，前 2 项则分别为 $J_x^2=(S_x\otimes I+I\otimes S_x)^2=\dfrac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$, $J_y^2=(S_y\otimes I+I\otimes S_y)^2=\dfrac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$」
6. 对于直积态 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle+\left|1\right\rangle\right)\otimes\left|0\right\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ ，经过CNOT $=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\left|\Phi^+\right\rangle$$

$\left|\Phi^+\right\rangle$ 是纠缠态「无法表示成 2 个列向量 $a\otimes b$ 的形式」。
7. 纯态可以表示为 $\left|\Psi\right\rangle\left\langle\Psi\right|$ ，混合态需要表示为非零线性组合 $\sum_i P_i\left|\Psi_i\right\rangle\left\langle\Psi_i\right|$ 。其中 $\left\langle\Psi\right|$ 是 $\left|\Psi\right\rangle$ 的共轭转置，因此密度矩阵是 2 阶矩阵 (通过形式 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}(c\quad d)=\begin{pmatrix}ac&ad\\bc&bd\end{pmatrix}$ 得到)。

   纯态对应布洛赫球面 $\mathbb{S}^2$ 上的点，混合态对应球内部的点 (与原点的距离小于 1)。
8. 原子的任意 2 个核外电子状态「第 1 题的 n,l,m ，以及自旋向上与向下的状态」都不能完全相同「因此，如果 n,l,m 都相同，那么必然其中一个自旋向上，另一个自旋向下」。一个量子比特的状态无法被“拷贝”至另一个。
9. $\left|\Psi^+\right\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,\,1,\,1,\,0)^T, \left|\Psi^-\right\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,\,1,\,-1,\,0)^T, \left|\Phi^+\right\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,\,0,\,0,\,1)^T, \left|\Phi^-\right\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,\,0,\,0,\,-1)^T.$

   我们可以通过计算 CNOT 的逆矩阵，得到原来的直积态。$\mathrm{CNOT}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$,

$$\mathrm{CNOT}^{-1}\left|\Psi^+\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{CNOT}^{-1}\left|\Psi^-\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{CNOT}^{-1}\left|\Phi^+\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

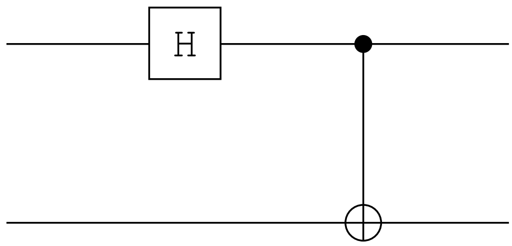
$$\mathrm{CNOT}^{-1}\left|\Phi^-\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

   因此，这些直积态经过 CNOT 就得到了 Bell 基。

Hadamard 门将 $\left|0\right\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 转化为

$H\left|0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

因此，只要将 $\left|01\right\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 输入到这一线路，那么输出结果是 $\left|\Psi^{+}\right\rangle$ 。



kron(H,1)　CNOT

10. 多翻阅课件叭「其实我也不会」，超导回路中的电流方向（顺时针、逆时针）；丙氨酸分子核磁共振中的核自旋（向上、向下）；人造原子及天然原子、离子、分子等体系中隔离选出的两个特定能级；光子系统。

1. 绝对值大小为 $\sqrt{l(l+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$ ，z 方向为 $m\hbar = l\hbar, (l-1)\hbar, \ldots, -l\hbar = \hbar, 0, -\hbar$。夹角分别为 $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}, \arccos 0, \arccos -\frac{1}{\sqrt{2}} = 45°, 90°, 135°$.
2. 归一化需要满足 $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + |c|^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad c = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ 。因为 Y_{10}, Y_{20} 都对应 $m=0$ ，我们将以 100% 的概率测量得到 z 方向角动量为 $m\hbar = 0$ 。测量得到角动量平方为 $6\hbar^2 = 2(2+1)\hbar^2$ 的概率为 $|c|^2 = \frac{1}{2}$ ，对应 Y_{20} 这一状态。
3. 与共轭转置一样，伴随算子同样满足 $(AB)^* = B^*A^*$ 。厄米算子，即伴随算子等同于自身。A, B 是厄米算子，因此 $B^*A^* = BA$ ；AB 是厄米算子，因此 $(AB)^* = AB$ 。这表明 $AB = BA$ ，A, B 是交换的。
4. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle + i\left|1\right\rangle\right)\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle - \left|1\right\rangle\right) = \frac{1}{2}(1, i)^T \otimes (1, -1)^T = \frac{1}{2}(1, -1, i, -i)^T$
5. $\left|\Psi\right\rangle\left\langle\Psi\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|H\right\rangle + \left|V\right\rangle\right)\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left\langle H\right| + \left\langle V\right|\right) = \frac{1}{2}\left(\left|H\right\rangle\left\langle H\right| + \left|H\right\rangle\left\langle V\right| + \left|V\right\rangle\left\langle H\right| + \left|V\right\rangle\left\langle V\right|\right)$

   $\sum_j P_j\left|\Psi\right\rangle\left\langle\Psi\right| = \frac{1}{2}\left|H\right\rangle\left\langle H\right| + \frac{1}{2}\left|V\right\rangle\left\langle V\right|$ ，其中 P_1, P_2 对应取到 $\left|H\right\rangle, \left|V\right\rangle$ 的概率。
6. 自旋矩阵是泡利矩阵的 $\frac{\hbar}{2}$ 倍：

   $$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix} \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

   因此 $S_+ = S_x + iS_y = \hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, S_- = S_x - iS_y = \hbar\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ 。

   $S_-\left|\uparrow\right\rangle = \hbar\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, S_+\left|\downarrow\right\rangle = \hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

   $S_+S_- = \hbar^2\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \hbar^2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ ，特征值（判定条件为 $\det(A - \lambda I) = 0$）为 $\hbar^2$ 或 0 。

7. $\left|3i\right|^2 + \left|4\right|^2 = 9 + 16 = 25$ ，归一化系数为 $N = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$ 。

   期望值为 「$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3i\\4\end{pmatrix}^* = \frac{1}{5}(-3i \quad 4)$ 是题中状态的共轭转置」

$$\langle S_x\rangle = \frac{1}{25}\times\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}-3i & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3i\\ 4\end{pmatrix} = 0$$

$$\langle S_y\rangle = \frac{1}{25}\times\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}-3i & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3i\\ 4\end{pmatrix} = -\frac{12\hbar}{25}$$

$$\langle S_z\rangle = \frac{1}{25}\times\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}-3i & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3i\\ 4\end{pmatrix} = -\frac{7\hbar}{50}$$

8. $$\left|\varphi_1\right\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\left|\varphi_2\right\rangle = (H\otimes I)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|00\right\rangle + \left|11\right\rangle\right).$$

$\Pr\{11\} = \dfrac{1}{2}$.

9. $\left|\Psi_1\right\rangle = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_1}{2}\\ \sin\frac{\theta_1}{2}\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \left\langle\Psi_1\right| = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_1}{2} & \sin\frac{\theta_1}{2}\end{pmatrix}$ 「注意，是共轭转置！如果矩阵元素是复数，我们必须进行共轭操作！」

$$\left|\Psi_2\right\rangle = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_2}{2}\\ i\sin\frac{\theta_2}{2}\end{pmatrix}$$

$$\left\langle\Psi_1\mid\Psi_2\right\rangle = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_1}{2} & \sin\frac{\theta_1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_2}{2}\\ i\sin\frac{\theta_2}{2}\end{pmatrix} = \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} + i\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}$$

$$F = \left|\left\langle\Psi_1\mid\Psi_2\right\rangle\right|^2 = \cos^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2} + \sin^2\frac{\theta_1}{2}\sin^2\frac{\theta_2}{2}$$

10. 首先进行直积

$$\left|\Psi\right\rangle\otimes\left|\Phi^+\right\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left|000\right\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left|011\right\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left|100\right\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left|111\right\rangle$$

利用简答题第 9 题，

$$\left|00\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\Phi^+\right\rangle + \left|\Phi^-\right\rangle\right)$$

$$\left|01\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\Psi^+\right\rangle + \left|\Psi^-\right\rangle\right)$$

$$\left|10\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\Psi^+\right\rangle - \left|\Psi^-\right\rangle\right)$$

$$\left|11\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\Phi^+\right\rangle - \left|\Phi^-\right\rangle\right)$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\left|\Psi\right\rangle \otimes \left|\Phi^+\right\rangle &= \frac{\alpha}{2}\left(\left|\Phi^+\right\rangle + \left|\Phi^-\right\rangle\right) \otimes \left|0\right\rangle + \frac{\alpha}{2}\left(\left|\Psi^+\right\rangle + \left|\Psi^-\right\rangle\right) \otimes \left|1\right\rangle \\
&\quad + \frac{\beta}{2}\left(\left|\Psi^+\right\rangle - \left|\Psi^-\right\rangle\right) \otimes \left|0\right\rangle + \frac{\beta}{2}\left(\left|\Phi^+\right\rangle - \left|\Phi^-\right\rangle\right) \otimes \left|1\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left|\Psi^+\right\rangle \otimes \left(\beta\left|0\right\rangle + \alpha\left|1\right\rangle\right) + \frac{1}{2}\left|\Psi^-\right\rangle \otimes \left(-\beta\left|0\right\rangle + \alpha\left|1\right\rangle\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left|\Phi^+\right\rangle \otimes \left(\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle\right) + \frac{1}{2}\left|\Phi^-\right\rangle \otimes \left(\alpha\left|0\right\rangle - \beta\left|1\right\rangle\right)
\end{aligned}
$$

对第 1–2 个量子比特进行 Bell 基测量，

(A) 如果测量得到 $\left|\Psi^+\right\rangle$ ，那么第 3 个量子比特变为 $\beta\left|0\right\rangle + \alpha\left|1\right\rangle = \begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$ ，经过矩阵 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 可还原到 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ 。

(B) 如果测量得到 $\left|\Psi^-\right\rangle$ ，那么第 3 个量子比特变为 $-\beta\left|0\right\rangle + \alpha\left|1\right\rangle = \begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$ ，经过矩阵 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ 可还原到 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ 。

(C) 如果测量得到 $\left|\Phi^+\right\rangle$ ，那么第 3 个量子比特变为 $\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ 。

(D) 如果测量得到 $\left|\Phi^-\right\rangle$ ，那么第 3 个量子比特变为 $\alpha\left|0\right\rangle - \beta\left|1\right\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}$ ，经过矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 可还原到 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ 。