20% + 30% + 50%

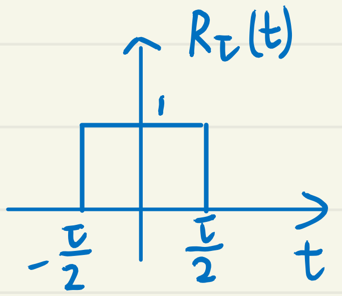
第7周 五-八频域 难点

二、三、四章时域

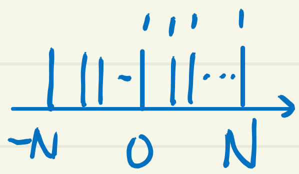
$$1 \xrightarrow[\text{CFT}]{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega) \qquad 1 \xrightarrow{\text{DTFT}} 2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi l)$$

$$e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\text{CFT}} 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \qquad e^{j\Omega_0 n} \xrightarrow{\text{DTFT}} 2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi l)$$

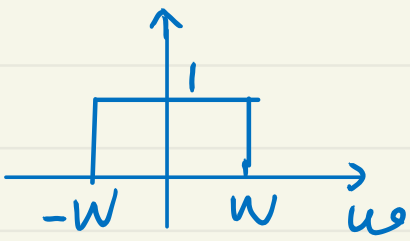
$$\delta(t-t_0) \xrightarrow{\text{CFT}} e^{-j\omega t_0} \qquad \delta[n-n_0] \xrightarrow{\text{DTFT}} e^{-j\Omega n_0}$$



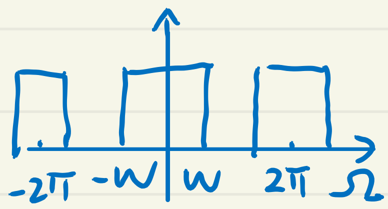
$$\xrightarrow{\text{CFT}} \tau \cdot Sa\frac{\omega\tau}{2}$$



$$\xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{\sin\frac{2N+1}{2}\Omega}{\sin\frac{\Omega}{2}}$$



$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{W}{\pi}Sa(Wt)$$



$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{W}{\pi}Sa(Wn)$$

$$\cos\omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\sin\omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} j\pi\delta(\omega+\omega_0)-j\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\cos\Omega_0 n \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\{\delta(\Omega-\Omega_0+2\pi l)+\delta(\Omega+\Omega_0+2\pi l)\}$$

$$\sin\Omega_0 n \xrightarrow{\mathcal{F}} j\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\{\delta(\Omega+\Omega_0+2\pi l)-\delta(\Omega-\Omega_0+2\pi l)\}$$

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a} \quad Re\{s\} > Re\{-a\} \qquad a^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z|>|a|$$

$$-e^{-at}u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a} \quad Re\{s\} < Re\{-a\} \qquad -a^n u[-n-1] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z|<|a|$$

$\cos\omega_0 t\cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \quad Re\{s\}>0$ 若为 $Re\{s\}<0$ $-\cos\omega_0 t\cdot u(-t)$

$\sin\omega_0 t\cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \quad Re\{s\}>0 \quad -\sin\omega_0 t\cdot u(-t)$

$\cos\Omega_0 n\cdot u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1-\cos\Omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\Omega_0 z^{-1}+z^{-2}} \quad |z|>1$

$\sin\Omega_0 n\cdot u[n] \xrightarrow{Z} \frac{\sin\Omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\Omega_0 z^{-1}+z^{-2}} \quad |z|>1$

$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \quad Re\{s\}>0$

$u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z|>1$

$u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$

$u[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi l)$

$\delta'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega$

$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$

$\delta'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s$

$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$ 整个s平面

$sgn(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{j\omega},\ \omega\neq 0$

$\frac{1}{\pi t} \xrightarrow{\mathcal{F}} -j\,sgn(\omega)$

$sgn(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{j\omega}$

$e^{-at}\cos\omega_0 t\cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{(s+a)^2+\omega_0^2}$

$\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{j\omega+a}{(j\omega+a)^2+\omega_0^2}$

$e^{-at}\sin\omega_0 t\cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$

$\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\omega_0}{(j\omega+a)^2+\omega_0^2}$

$$te^{-at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+a)^2}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(j\omega+a)^2}$$

$$(n+1)a^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{(1-az^{-1})^2}$$

$$\xrightarrow{DTFT} \frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2}$$

$$f(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0}F(s)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0}F(\omega)$$

CFS:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} \tilde{x}(t)\, e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt$$

DFS:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k\in\langle N\rangle} \tilde{X}_k \cdot e^{jk\Omega_0 n}$$

$$\tilde{X}_k = \frac{1}{N}\sum_{n\in\langle N\rangle} \tilde{x}[n]\, e^{-jk\Omega_0 n}$$

DFT:

$$x[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X_k \cdot e^{jk\Omega_0 n}$$

$$X_k = \sum_{n=0}^{M-1} x[n]\, e^{-jk\Omega_0 n}$$

CFT:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} \cdot dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

DTFT:

$$\tilde{X}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \tilde{X}(\Omega)\, e^{j\Omega n} \cdot d\Omega$$

$\mathcal{L}$:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

Z:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

$$e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{h(t)} H(\omega_0)\, e^{j\omega_0 t} \qquad H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t} \cdot dt$$

$$= H(s)\big|_{s=j\omega}$$

$$e^{j\Omega_0 n} \xrightarrow{h[n]} \tilde{H}(\Omega_0)\, e^{j\Omega_0 n} \qquad \tilde{H}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, e^{-j\Omega n}$$

$$= H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$$

$$e^{s_0 t} \xrightarrow{h(t)} H(s_0)\, e^{s_0 t} \qquad H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-st} \cdot dt$$

$$z_0^{\,n} \xrightarrow{h[n]} H(z_0)\, z_0^{\,n} \qquad H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot z^{-n}$$

§6.4.1 时移性质

则 $f(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0}F(s)$. $R_{oc}=R_f$ $\quad$ $f[n-n_0] \xrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-n_0}F(z)$. $R_{oc}=R_f$

$f(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0}F(\omega)$ $\quad$ $f[n-n_0] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} e^{-j\Omega n_0}\tilde{F}(\Omega)$

频移性质:

$e^{j\omega_0 t}f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega-\omega_0)$ $\quad$ $e^{j\Omega_0 n}f[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \tilde{F}(\Omega-\Omega_0)$

$e^{s_0 t}f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s-s_0)$ $\quad$ $z_0^n f[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} F\left(\frac{z}{z_0}\right)$

$R_{oc}=R_f+Re\{s_0\}$ $\quad$ $R_{oc}=R_f\cdot|z_0|$

微分、差分性质

$f'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega F(\omega)$ $\quad$ $\Delta f[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} (1-e^{-j\Omega})\tilde{F}(\Omega)$

$f'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s)$ $\quad$ $\Delta f[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} (1-z^{-1})F(z)$

$-tf(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dF(s)}{ds}$ $\quad$ $-nf[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} z\frac{dF(z)}{dz}$

$-jtf(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{dF(\omega)}{d\omega}$ $\quad$ $-jnf[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \frac{d\tilde{F}(\Omega)}{d\Omega}$

第二章 信号与系统的数学描述及基本性质

§2.2 信号的数学描述及其性质

$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$

二. 信号的分类

① 一维信号：只有1个自变量

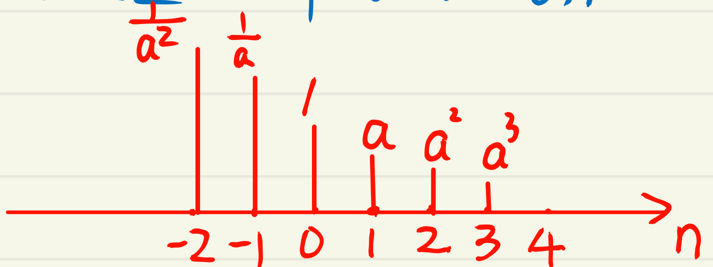
多维信号：2个或2个以上的自变量

② 连续时间信号
离散时间信号 根据自变量的取值

$x[n] = a^n, n\in Z$ 自变量字母常用 n, m, l, k

方括号

若取 $0<a<1$ 波形



不要画纵轴

对于离散时间信号，自变量只能取整数值

对于函数值（因变量），可以取任何数（包括实数、复数…）

三. 实信号和复信号

$x(t) = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$ ← 复信号

四. 确定信号和随机信号

对任意指定时刻，有一个确定的信号值

§2.3 系统的数学描述和分类

§2.4 信号的基本变换、基本系统

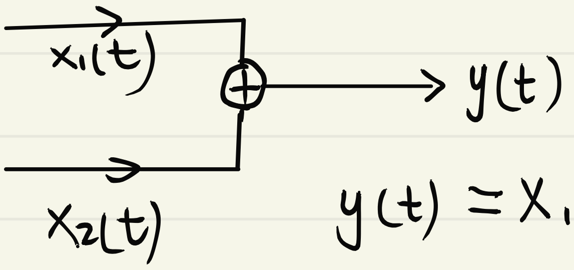
2.4.1 信号的变换

① 数乘系统、数乘器

$x(t) \xrightarrow{c} y(t)$ $x[n] \xrightarrow{c} y[n]$

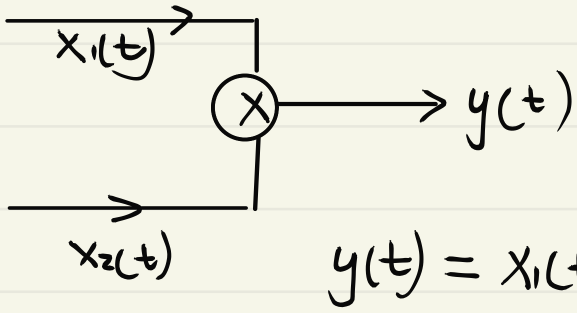
$y(t) = c\,x(t)$ $y[n] = c\,x[n]$

② 加法器



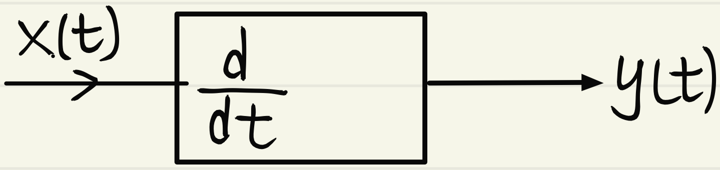
$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ $\qquad$ $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$

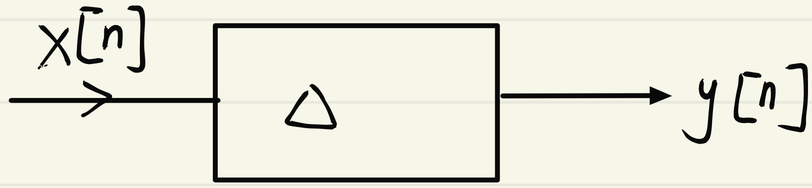
③ 乘法器



$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$ $\qquad$ $y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$

④ 微分器，差分器

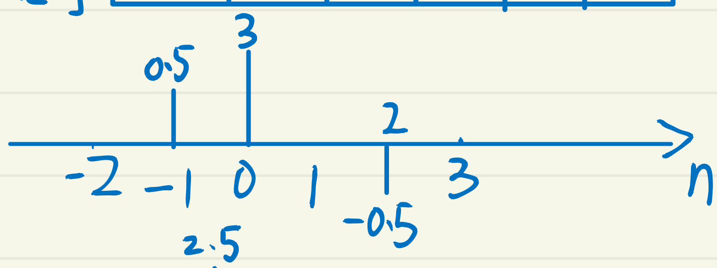




$y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ $\qquad$ $y[n] = \Delta x[n] = x[n] - x[n-1]$

e.g.

n	≤-2	-1	0	1	2	≥3
x[n]	0	0.5	3	0	-0.5	0



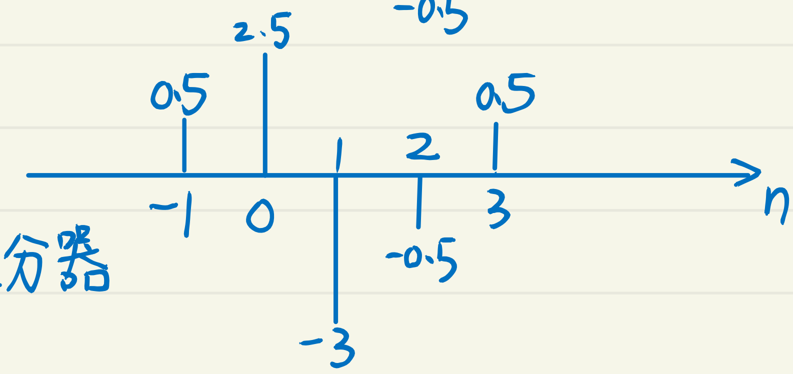
$y[n] = x[n] - x[n-1]$ 一阶后向差分

$y[n] = x[n] - x[n+1]$ 一阶前向差分

$\Downarrow$

$y[n] = \nabla x[n]$

y[n]

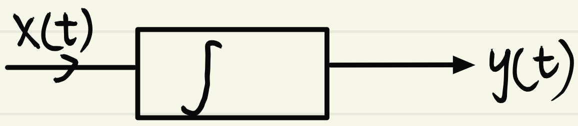


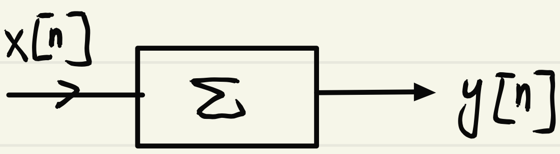
一阶差分器

高阶微分

$y(t) = \frac{d}{dt^k} x(t)$ $\qquad$ $y[n] = \Delta^k x[n] = \Delta^{k-1} x[n] - \Delta^{k-1} x[n-1]$

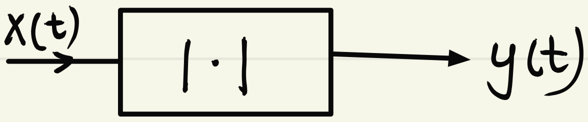
⑤ 积分器、累加器



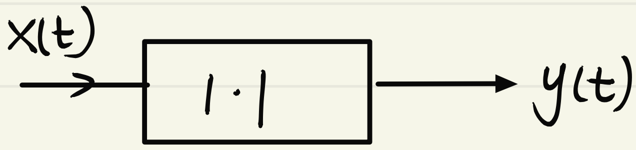


$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) \cdot d\tau$ $\qquad$ $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

⑥ 取模、取绝对值



$y(t) = |x(t)| = \sqrt{x(t)\cdot x^*(t)}$

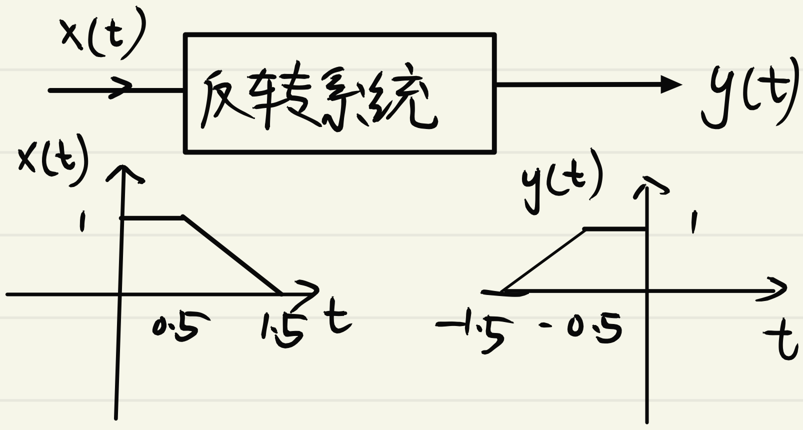


$y[n] = |x[n]| = \sqrt{x[n]\cdot x^*[n]}$

§2.4.2 自变量变换引起的信号变换

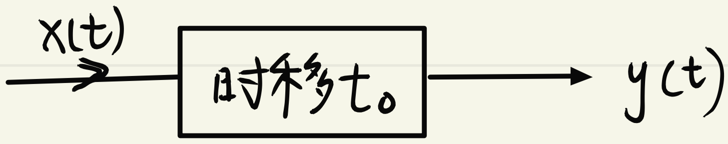
一、反转系统（很少用）

$y(t) = x(-t)$ $\qquad$ $y[n] = x[-n]$



二、时移系统（用得很多）

$y(t) = x(t-t_0)$ $\qquad$ $y[n] = x[n-n_0]$



$t_0 > 0$ 延时（右移）

$t_0 < 0$ 超前（左移）

三、时域的压扩、离散时间的抽取和内插零

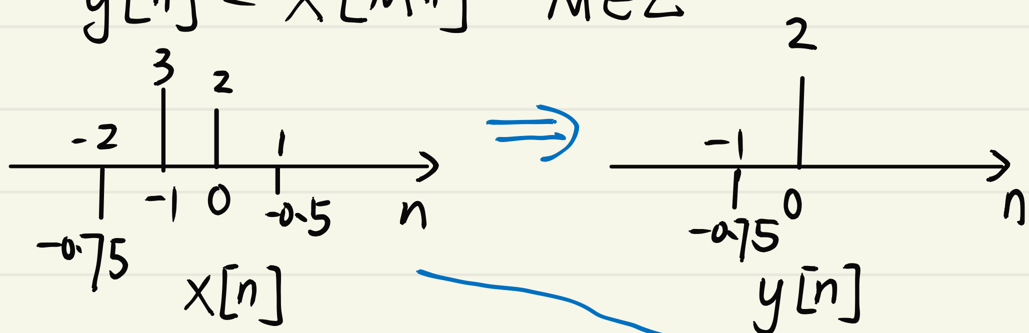
$y(t) = x(at)$

$a>1$，压缩

$0<a<1$，扩展

离散时间抽取

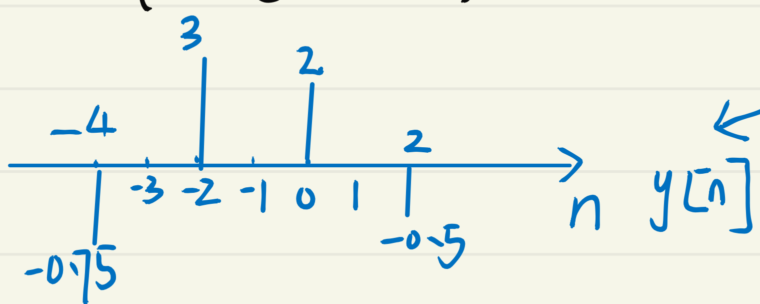
$y[n] = x[Mn]$ $\quad M\in \mathbb{Z}$



内插零

$$y[n] = x_{(M)}[n] = \begin{cases} x[n/M], & n = lM,\ l = 0, \pm1, \pm2\cdots \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

e.g. $M=2$



e.g. $y[n] = x_{(2)}[n+1] = \begin{cases} x\left[\frac{n+1}{2}\right], & n+1 = 2l;\ l=0, \pm1, \pm2\cdots \\ 0, & \text{other} \end{cases}$

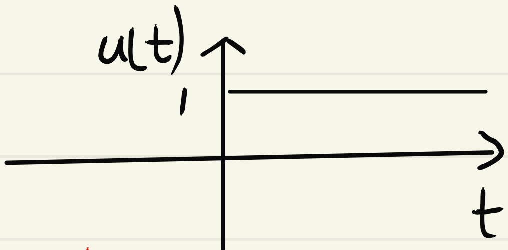
§2.5 基本的连续时间和离散时间信号

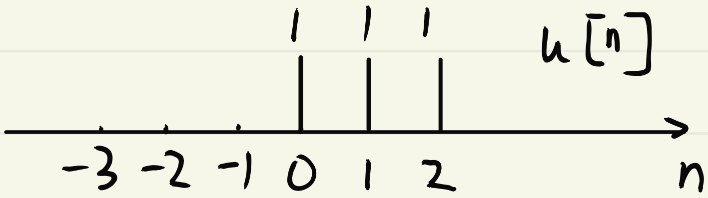
§2.5.1 单位阶跃信号和单位冲激信号

一、单位阶跃信号

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$u[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

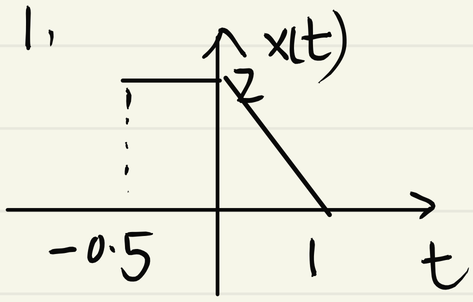




在0时，$u(t)$ 无定义　　　　$u[0]=1$

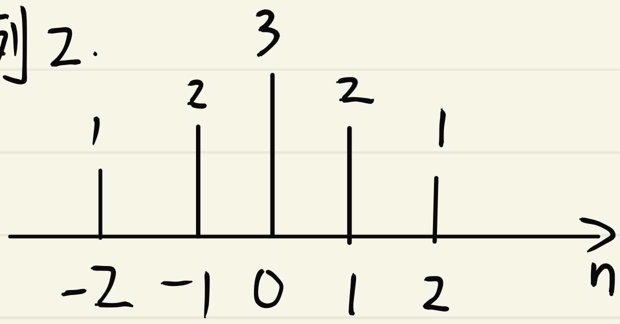
通过 $u(t)/u[n]$ 的时移组合，可以写出任何分段定义的解析表达式

例1.



$$x(t)=2\underbrace{[u(t+0.5)-u(t)]}_{\text{只在 }[-0.5,0]\text{ 取值为}1}+2(1-t)\underbrace{[u(t)-u(t-1)]}_{\text{只在}[0,1]\text{取值为}1}$$

例2.

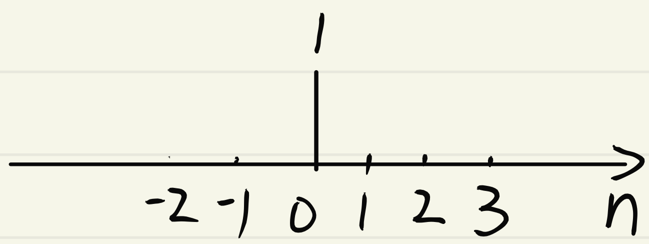


$$x[n]=(n+3)(u[n+2]-u[n-1])+(3-n)(u[n-1]-u[n-3])$$

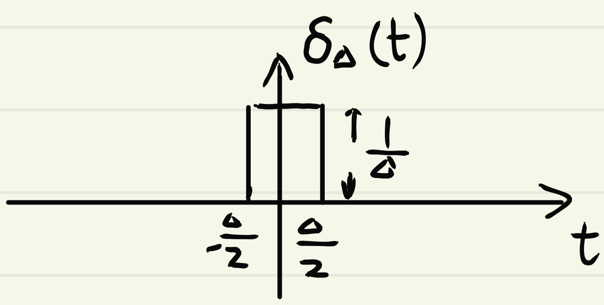
二、单位冲激信号和单位冲激序列

单位冲激序列：

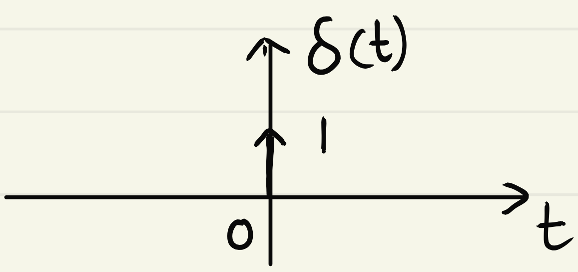
$$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & \text{other}\end{cases}$$



$$\delta_\Delta(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta}, & -\frac{\Delta}{2}<t<\frac{\Delta}{2}\\ 0, & \text{other}\end{cases}$$



$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$$



奇异函数

δ(t)的另外两种定义

① Dirac定义 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1 \qquad \delta(t)=0,\ t\neq 0$

② 分配函数的定义：对于在0点连续的任意常规函数 $x(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)\,dt=x(0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt=x(t_0)$$

三. 冲激信号的性质

① 具有单位面积

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1 \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]=1$$

$$x[n]\,\delta[n]=x[0]\,\delta[n]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\,\delta[n]=x[0]$$

$$x[n]\,\delta[n-n_0]=x[n_0]\,\delta[n-n_0]$$

② 偶函数

$$\delta(t)=\delta(-t) \qquad \delta[n]=\delta[-n]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)x(t)\,dt=x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(-t)\,x(t)\,dt \overset{\tau=-t}{=\!=} \int_{\infty}^{-\infty}\delta(\tau)\,x(-\tau)\,d(-\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\,x(-\tau)\,d\tau=x(-0)$$

③ $x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$ （筛分性质） $x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\,\delta(t-t_0)$

取 $\psi(t)$ 在0连续

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)\psi(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\psi(t)\ \delta(t)\,dt=x(0)\,\psi(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(0)\,\delta(t)\,\psi(t)\,dt=x(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\cdot\delta(t)\,dt=x(0)\cdot\psi(0)$$

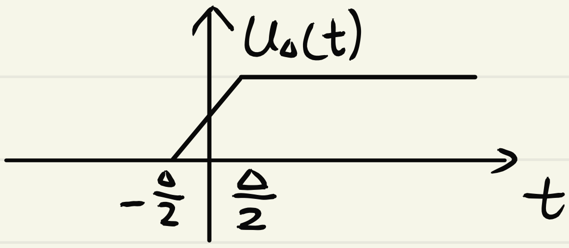
$$\delta(2t)=\frac{1}{2}\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,\delta(2t)\,dt \overset{\tau=2t}{=\!=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x\left(\frac{\tau}{2}\right)\delta(\tau)\cdot d\tau=\frac{1}{2}x(0)$$

④ 与 $u(t)$, $u[n]$ 的关系

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau \qquad \delta(t)=\frac{d}{dt}u(t)$$

$$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k] \qquad \delta[n]=\Delta u[n]\ \text{差分}$$



$$u(t) = \lim_{\Delta\to 0} u_\Delta(t)$$

$$= \frac{d}{dt} u_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & -\frac{\Delta}{2} < t < \frac{\Delta}{2} \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

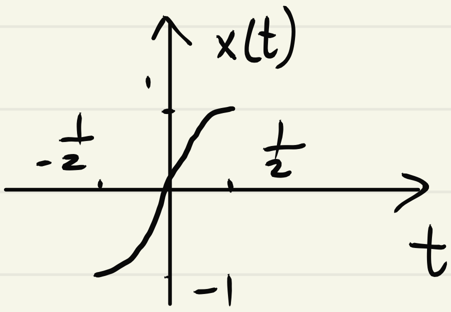
$$= \delta_\Delta(t)$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \delta_\Delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{d}{dt} u_\Delta(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \lim_{\Delta\to 0} u_\Delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

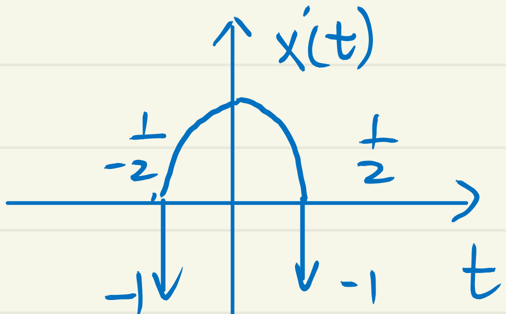
例:



$$x(t) = \sin\pi t\left[u(t+\tfrac{1}{2}) - u(t-\tfrac{1}{2})\right]$$

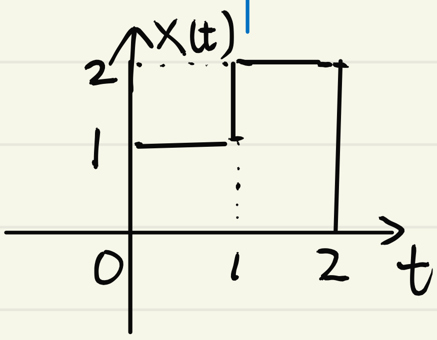
$$x'(t) = \pi\cos\pi t\left[u(t+\tfrac{1}{2}) - u(t-\tfrac{1}{2})\right] + \sin\pi t\left[\delta(t+\tfrac{1}{2}) - \delta(t-\tfrac{1}{2})\right]$$

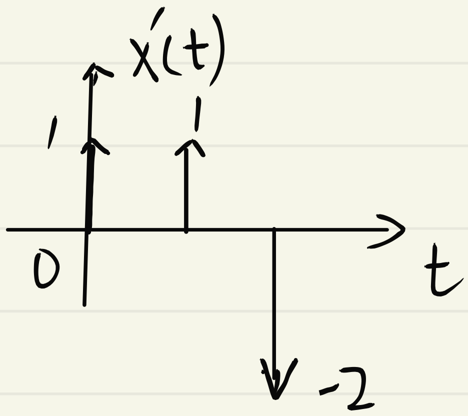
$$= \pi\cos\pi t\left[u(t+\tfrac{1}{2}) - u(t-\tfrac{1}{2})\right] - \delta(t+\tfrac{1}{2}) - \delta(t-\tfrac{1}{2})$$



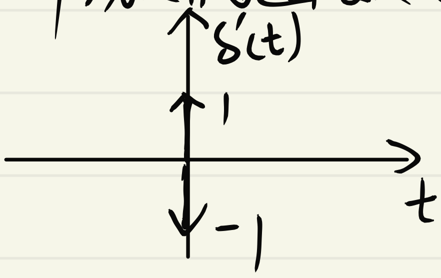
$$\sin\pi t \cdot \delta(t+\tfrac{1}{2}) = \sin\pi\cdot(-\tfrac{1}{2}) \cdot \delta(t+\tfrac{1}{2})$$

$$= -\delta(t+\tfrac{1}{2})$$





单位冲激偶函数 $\delta'(t)$. 也是奇异函数

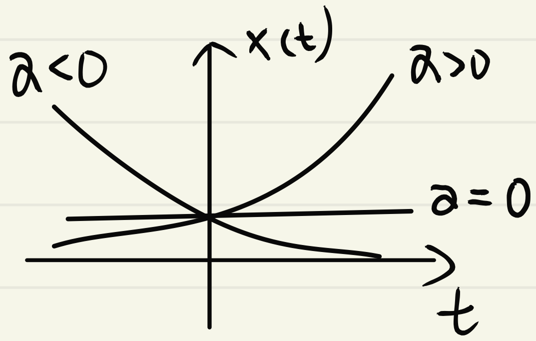


2.5.2 复指数信号和正弦信号

$X(t)=e^{st}$　　$x[n]=z^{n}$

一、实指数信号

$x(t)=e^{at}$　　$x[n]=a^{n}$，$a, a\in R$



① $a>1$　② $a=1$　③ $0<a<1$
④ $a<-1$　⑤ $a=-1$　⑥ $-1<a<0$

二、纯虚的指数信号和正弦信号（用得较多）

$s=j\omega$　　$z=e^{j\Omega}$

$x(t)=e^{j\omega t}$　　$x[n]=e^{j\Omega n}$

$=\cos\omega t+j\sin\omega t$　　$=\cos\Omega n+j\sin\Omega n$

连续时间正弦信号和离散时间正弦信号的区别

① 连续时间是周期函数，离散时间不一定是周期函数

$x[n]=\sin\frac{2}{3}n$ 不是周期序列

$x[n]=\sin\frac{7\pi}{3}n$ 是周期序列

② 对于连续时间信号 ω 不同，$\sin\omega t$ 是不同信号

对于离散时间信号 Ω 和 $\Omega+2k\pi$ 对应的是同一个序列

离散时间 $\sin\pi n$ 振荡最快

连续　ω 越大，振荡越快

三、一般的复指数信号（用得很少）

是前面两者的结合体

$x(t)=e^{st}=e^{(a+j\omega)t}=e^{at}(\cos\omega t+j\sin\omega t)$

$x[n]=z^{n}=a^{n}[\cos\Omega n+j\sin\Omega n]$　$z=a\cdot e^{j\Omega}$

§2.6 信号的时域特性

§2.6.1 周期、周期信号和非周期信号

$\forall t, \exists T, \quad x(t+T) = x(t)$

$n, N, \quad x[n+N] = x[n]$ 　　如果是周期信号，通常用 $\tilde{x}(t)$, $\tilde{x}[n]$

§2.6.2 信号的对称特性

一、奇偶特性及信号的奇偶分解

如果 $x(t) = x(-t)$ 　　$x[n] = x[-n]$ 　　偶对称信号/序列

$x(t) = -x(-t)$ 　　$x[n] = -x[-n]$ 　　奇

对任意的 $x(t)$/$x[n]$ 进行奇偶分解

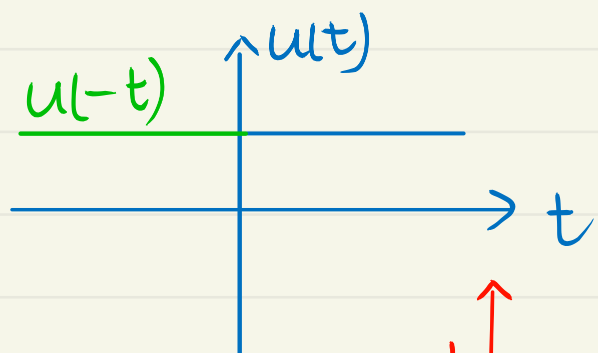
$$X_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2} \qquad X_o(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$$

$$X_e[n] = \frac{x[n]+x[-n]}{2} \qquad X_o(t) = \frac{x[n]-x[-n]}{2}$$

$$X_e(t) = Ev\{x(t)\} \qquad X_e[n] = Ev\{X[n]\}$$

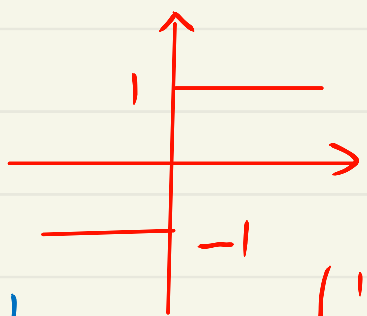
$$X_o(t) = Od\{x(t)\} \qquad X_o[n] = Od\{x[n]\}$$

e.g. 求 $u(t)$, $u[n]$ 的奇偶分量



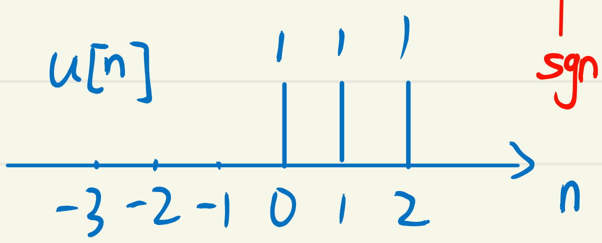
$$Ev\{u(t)\} = \frac{u(t)+u(-t)}{2} = \frac{1}{2}$$

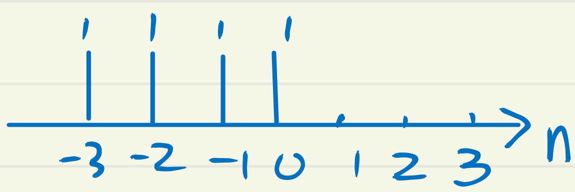
$$Od\{u(t)\} = \frac{u(t)-u(-t)}{2} = \frac{1}{2}sgn(t)$$ 符号函数



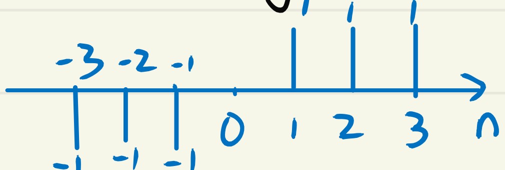
$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ -1, & t<0 \end{cases}$$

$$Ev\{u[n]\} = \frac{u[n]+u[-n]}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta[n]$$





$$Od\{u[n]\} = \frac{u[n]-u[-n]}{2} = \frac{1}{2}sgn[n]$$



二.共轭对称特性.实、虚分解

如果 $x(t)=x^*(t)$ $\quad x[n]=x^*[n]$ $\quad$ 共轭偶对称/实函数

$x(t)=-x^*(t)$ $\quad x[n]=-x^*[n]$ $\quad$ 共轭奇对称/纯虚函数

对∀复函数取实/虚部

$\mathrm{Re}\{x(t)\}$ $\quad \mathrm{Re}\{x[n]\}$ $\quad$ 取实部

$\mathrm{Im}\{x(t)\}$ $\quad \mathrm{Im}\{x[n]\}$ $\quad$ 取虚部

§2.6.3 信号的大小、功率和能量

一、一阶规范量

if $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt<\infty$ $\qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|<\infty$

信号的一阶规范量为

$$\|x(t)\|_1=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt \qquad \|x[n]\|=\sum_{-\infty}^{+\infty}|x[n]|$$

不满足模可积/模可和

$$\|x(t)\|_1=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|dt$$

$$\|x[n]\|_1=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|$$

二、二阶规范量(必用得更多,可积分、微分等操作)

if: $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt<\infty$ $\qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2<\infty$

则信号的二阶规范量:

$$\|x(t)\|_2=\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt} \qquad \|x[n]\|_2=\sqrt{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2}$$

else:

$$\|x(t)\|_2=\sqrt{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt} \qquad \|x[n]\|_2=\sqrt{\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2}$$

if 信号满足 模平方可积/可和，则信号的能量为

$$E_x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt \qquad E_x=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2$$

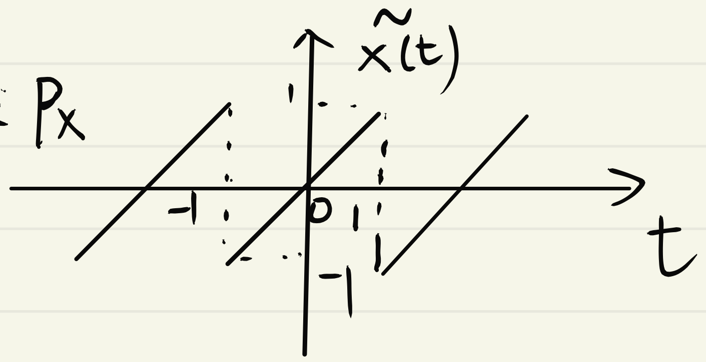
else：定义信号的功率为：

$$P_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt \qquad P_x=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2$$

对于周期信号：(周期为T)

$$P_x=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}|x(t)|^2dt \qquad P_x=\frac{1}{N}\sum_{n\in\langle N\rangle}|x[n]|^2$$

e.g. 求 P_x

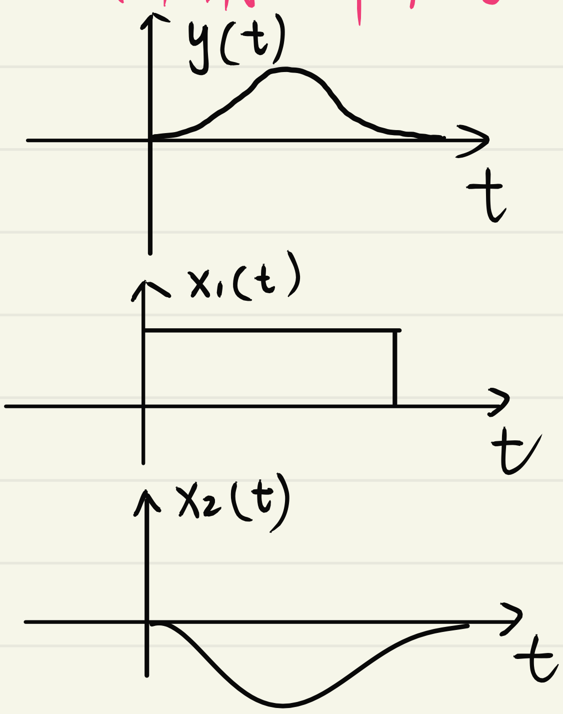


取一个周期内计算

$$P_x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}t^2\cdot dt=\int_0^1 t^2\cdot dt=\frac{1}{3}$$

§2.7 信号的正交和相关函数

§2.7.1 用一个信号去表示另一个信号



$$\hat{y}(t)=a\,x(t)$$

$$\varepsilon=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[y(t)-a\,x(t)\right]^2dt$$

$$\frac{d\varepsilon}{da}=\int_{-\infty}^{+\infty}-2x(t)\left[y(t)-a\,x(t)\right]dt=0$$

$$\Rightarrow a=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,y(t)\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)\,dt}$$

再将a代入

$$\Rightarrow \varepsilon=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2(t)dt-\frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,y(t)\,dt\right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)dt}$$

$$\frac{\varepsilon}{\int_{-\infty}^{+\infty}y^2(t)dt}=1-\frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,y(t)\,dt\right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)dt\int_{-\infty}^{+\infty}y^2(t)dt}=1-\rho_{xy}^2$$

定义相关系数

$$\rho_{xy} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)\,dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)\,dt}}$$

$\rho_{xy}=0$ 两信号正交

§2.7.2 信号的相关函数和相关序列

一、相关函数/序列

对于满足能量受限的信号（$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt<\infty$，$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2<\infty$ 简称能量信号）

其互相关函数定义为：

$$R_{xv}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\tau)v^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\cdot v^*(t-\tau)\,dt$$

$$R_{xv}[m]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n+m]v^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]v^*[n-m]$$

其自相关函数的定义为：

$$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\tau)x^*(t)\,dt \qquad R_x[m]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n+m]x^*[n]$$

对于功率受限信号（即 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt<\infty$ 存在，$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2<\infty$ 存在）

（很少用，考试不涉及）

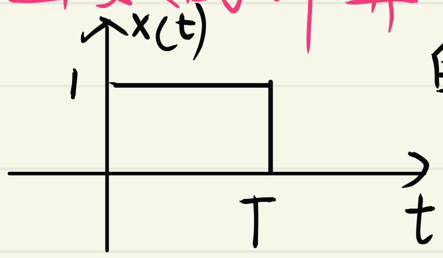
互相关函数定义为：

$$R_{xv}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t+\tau)v^*(t)\,dt,\quad R_{xv}[m]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x[n+m]v^*[n]$$

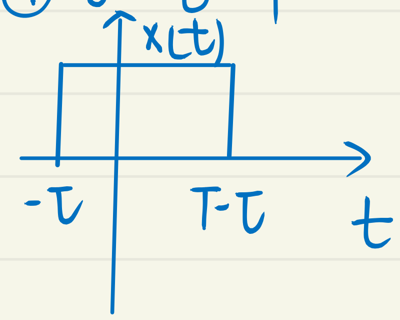
自相关函数定义为：

$$R_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t+\tau)x^*(t)\,dt,\quad R_x[m]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x[n+m]x^*[n]$$

二、相关函数的计算

例1：求  的 $R_x(\tau)$

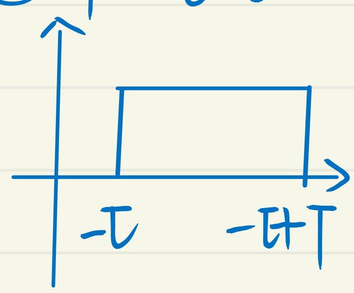
① $0<\tau<T$



$R_x(\tau)=\int_0^{T-\tau} 1\cdot dt$

$=T-\tau$

② $-T<\tau<0$



$R_x(\tau)=\int_{-\tau}^{T} 1\cdot dt$

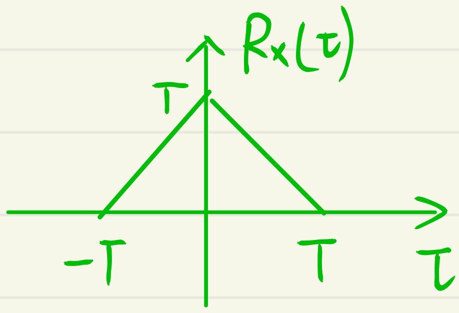
$=T+\tau$

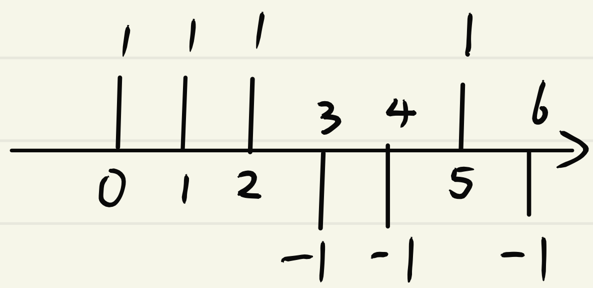
③ $\tau>T$

$R_x(\tau)=0$

④ $\tau<-T$

$R_x(\tau)=0$



例2：  求 $R_x[m]$

Barker

三、相关运算的性质

① $R_{xv}(\tau)=R_{vx}^*(-\tau)$ $\qquad R_{xv}[m]=R_{vx}^*[-m]$

如果是实信号：

$R_{xv}(\tau)=R_{vx}(-\tau)$ $\qquad R_{xv}[m]=R_{vx}[-m]$

$$R_{xv}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)\,v^*(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,v^*(t-\tau)\,dt$$

$$R_{vx}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\,x^*(t-\tau)\cdot dt=\left[\int_{-\infty}^{+\infty} v^*(t)\,x(t-\tau)\,dt\right]^*$$

$$R_{xv}[m]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+m]\,v^*[n]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,v^*[n-m]$$

对实自相关函数

$R_x(\tau)=R_x(-\tau)$ $\qquad R_x[m]=R_x[-m]$

$R_x(0)=\max\limits_{-\infty<\tau<+\infty}\{R_x(\tau)\}$ $\qquad R_x[0]=\max\limits_{-\infty<m<+\infty}\{R_x[m]\}$

$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)\, x(t) \cdot dt$

Cauchy-Scwaze 不等式

$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \cdot dt$

$[R_x(\tau)]^2 \le \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t+\tau)\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt$

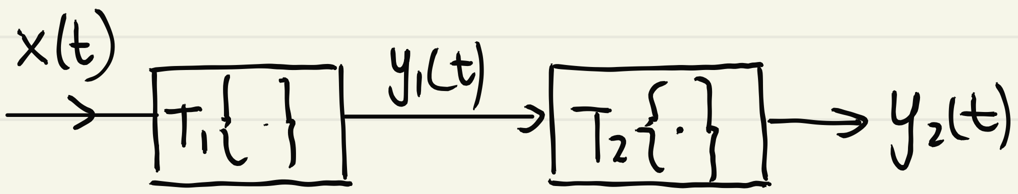
$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt\right]^2$

$\therefore R_x(\tau) \le \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \cdot d(t) = R_x(0)$

§2.9 系统的互联 等效与等价

§2.9.1 系统的互联

① 级联

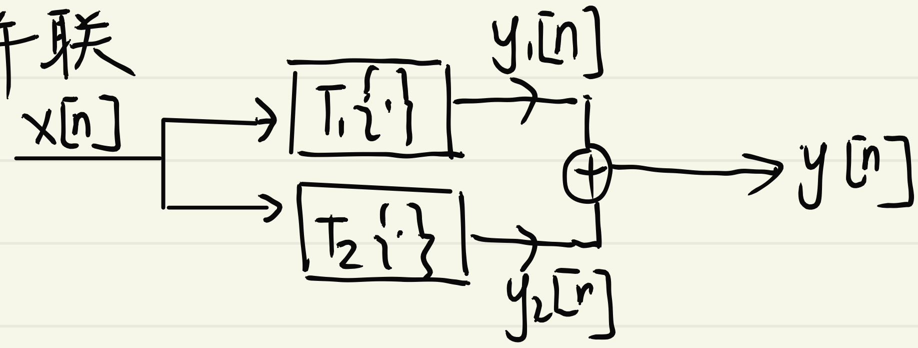


$y_1(t) = T_1\{x(t)\}$

$y_2(t) = T_2\{y_1(t)\}$

离散同理

② 并联

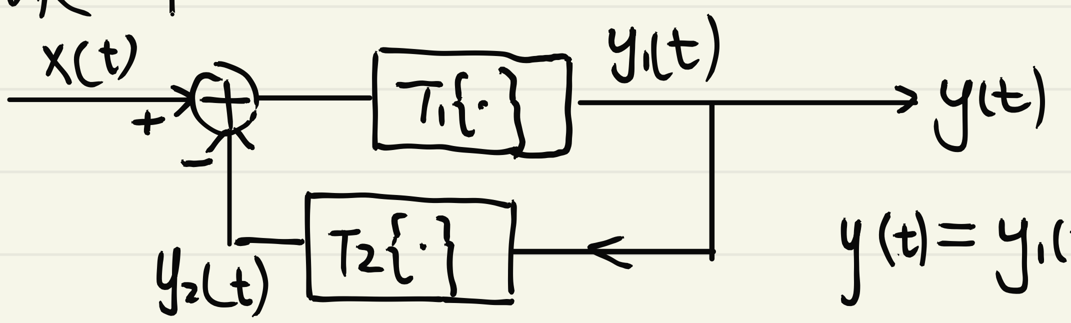


$y[n] = y_1[n] + y_2[n]$

$= T_1\{x[n]\} + T_2\{x[n]\}$

连续同理

③ 反馈互联



$y(t) = y_1(t) = T_1\{x(t) - T_2[y(t)]\}$

§2.9.2 系统的等效或等价

§2.10 系统的六个性质 ※

一、记忆性、无记忆性

一个系统如果任意时刻的输出仅与当前时刻的输入有关，则系统是无记忆的，否则是有记忆的

无记忆的：$y(t)=x(t)\cdot\sin 3t$，数乘器、相加器、相乘器

有记忆的：$y[n]=\Delta x[n]$，$y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$，时移系统、积分器、反转系统、尺度变换系统、累加器、抽取器、内插零系统

二、因果性、非因果性、反因果性

一个系统，对于任意输入，任意时刻的输出，仅与当前时间及以前的输入值有关，则系统是因果的，否则是非因果的（必考）

非因果的：$y(t)=x(2t)$、$y(t)=x(\frac{t}{2})$ [$y(-1)=x(-2)$ 非因果的]

微分器 $y(t)=\int_{-\infty}^{\frac{t}{3}}x(\tau)d\tau$ [反例：$y(-3)=\int_{-\infty}^{-1}x(\tau)d\tau$]

因果：积分器、累加器、一阶后向差分、迟延系统　非因果：一阶前向差分、超前系统、

一个系统，对于任意输入，任意时刻的输出，仅与当前时间及未来的输入值有关，则系统是反因果的（很少涉及）

反因果：$y[n]=\nabla x[n]=x[n]-x[n+1]$

三、稳定性

一个系统，如果对于任意有界的输入，任意时刻的输出也是有界的，则系统是稳定的　数乘器、时移、相加、相乘、一阶差分、反转、尺度变换、抽取器、内插零

稳定的：$y[n]=\Delta x[n]=x[n]-x[n-1]$

不稳定的：$y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$ [反例：$x(t)=u(t)$ 时，在0处 $y(0)\to\infty$]

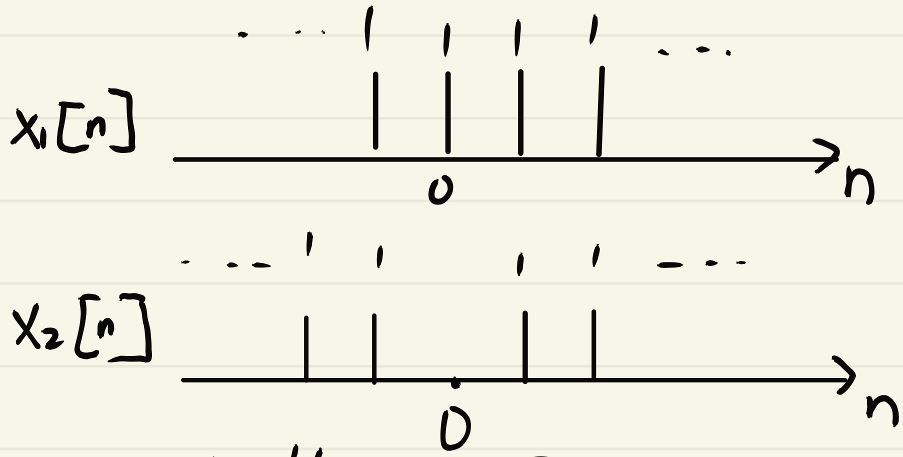
$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$ [反例：$x(t)=u(t)$ 时]　累加器

$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}u[k]=(n+1)u[n]$

四 可逆性与逆系统

对于一个系统，对于任何不同的输入，都有不同的输出，则系统是可逆的

$y[n] = n \cdot x[n]$



输入不同，但输出相同，不可逆的

$y[n] = \Delta x[n]$ （不可逆的） $y(t) = x(\frac{t}{2})$ （可逆的）

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ （可逆的）

$y[n] = x[\frac{n}{3}]$ （可逆，内插 0）
$y[n] = x[3n]$ （不可逆，抽取）

$y(t) = x(t) \cdot \sin 2t$ （不可逆的）
$2t = k\pi$ 处都为 0

一个系统是可逆的，则可找到其逆系统

$y(t) = T\{x(t)\} \Longleftrightarrow \hat{y}(t) = T^{-1}\{\hat{x}(t)\}$

$x(t) \rightarrow \boxed{T\{\cdot\}} \longrightarrow \boxed{T^{-1}\{\cdot\}} \longrightarrow x(t)$

五 时不变性

一个系统，对于任意的输入及时移，其输出也有相应的时移，则系统是时不变的

$x(t) \xrightarrow{T\{\cdot\}} y(t)$

$\forall t_0$

$x(t-t_0) \xrightarrow{T\{\cdot\}} y(t-t_0)$

$\Rightarrow$ 时不变

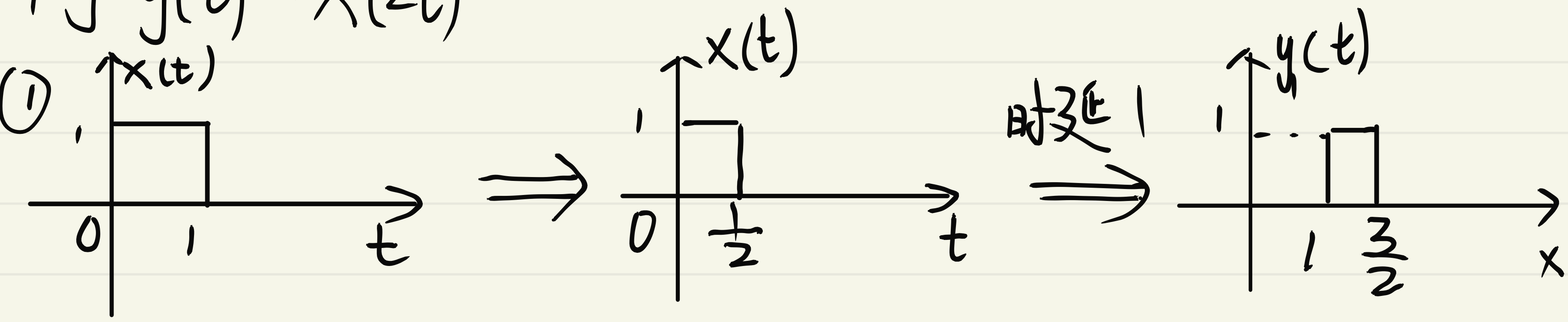
$x(t) \longrightarrow \boxed{T\{\cdot\}} \longrightarrow \boxed{时移\ t_0} \longrightarrow y_1(t)$

$\longrightarrow \boxed{时移\ t_0} \longrightarrow \boxed{T\{\cdot\}} \longrightarrow y_2(t)$

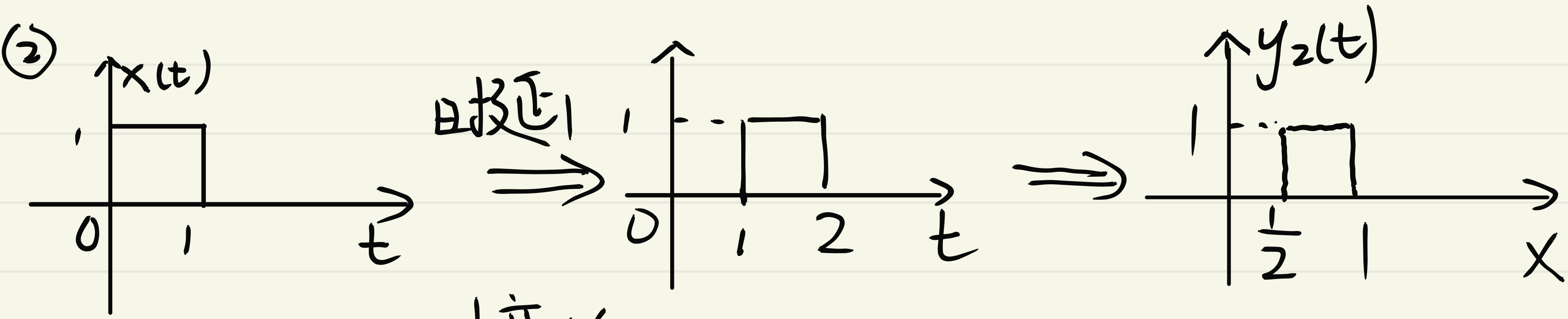
检验方法

例: $y(t)=x(2t)$

①



②



时变的

时变的: $y[n]=x[-n]$, $y(t)=x(2t)$ 连续时间尺度变换系统

$y[n]=x[3n]$ $\quad y[n]=x_{(3)}[n]$

时不变的: $y[n]=\Delta x[n]$ $\quad y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$

$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ $\quad y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\cdot d\tau$

$y[n]=x[n-n_0]$ $\quad y(t)=x(t-t_0)$

六、线性、增量线性

如果 $\forall x_1(t) \xrightarrow{T\{\cdot\}} y_1(t)$ $\quad \xrightarrow{\forall a,\beta} a x_1(t)+\beta x_2(t) \xrightarrow{T\{\cdot\}} a y_1(t)+\beta y_2(t)$

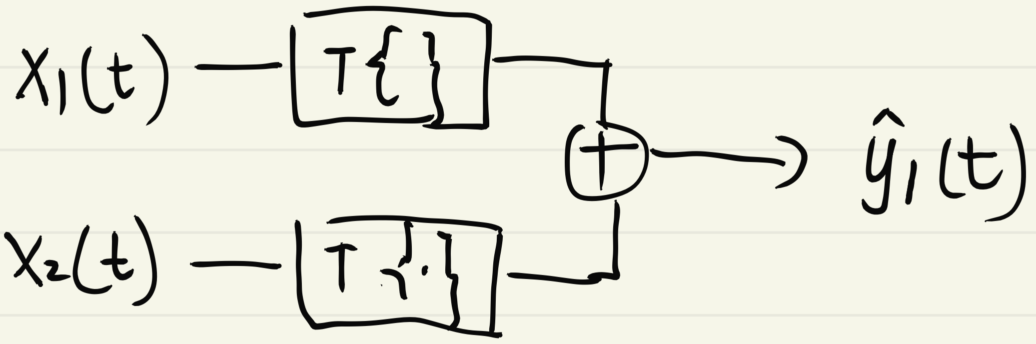
$x_2(t) \xrightarrow{T\{\cdot\}} y_2(t)$

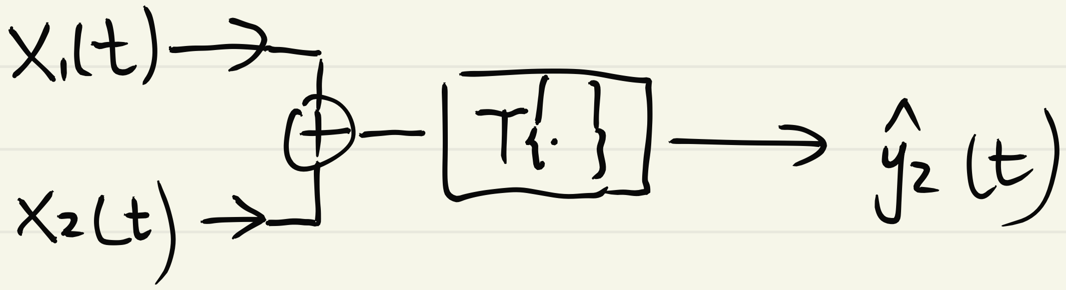
一个系统满足齐次性和可加性,则系统是线性的

齐次性: $x(t) \to \boxed{T\{\cdot\}} \to \boxed{\text{乘以倍数}} \to y_1(t)$

$x(t) \to \boxed{\text{乘以倍数}} \to \boxed{T\{\cdot\}} \to y_2(t)$

可加性:





例: $y(t) = \mathrm{Re}\{x(t)\}$ e.g $x(t) = 1+3j$

齐次性 ①: $1+3j \longrightarrow 1 \xrightarrow{\text{乘}j} j$

②: $1+3j \xrightarrow{\text{乘}j} -3+j \longrightarrow -3$ 非齐次性

推论: 一个系统如果是线性的, 一定有0输入导致0输出 (反过来不一定)

可以用零输入不产生零输出来否定系统的线性

增量线性系统:

e.g $y[n] = 3x[n] + 2$

数乘器、积分器、累加器、微分器、差分器、时移系统、平滑系统都是线性系统

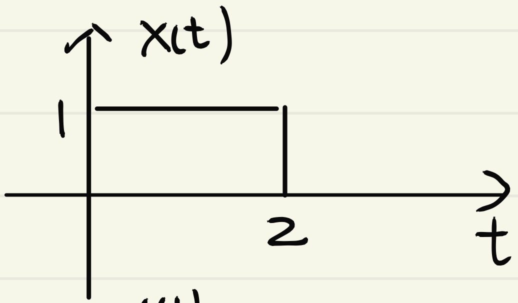
第三章 LTI系统的时域分析和信号卷积

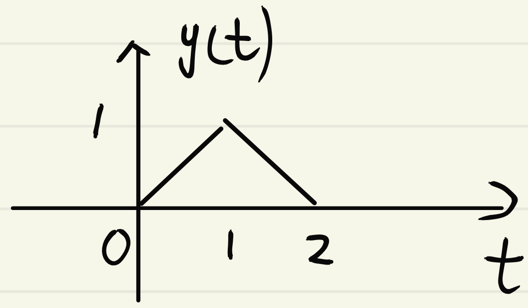
解题思路：$\varphi_i(t) \xrightarrow{LTI} \psi_i(t)$

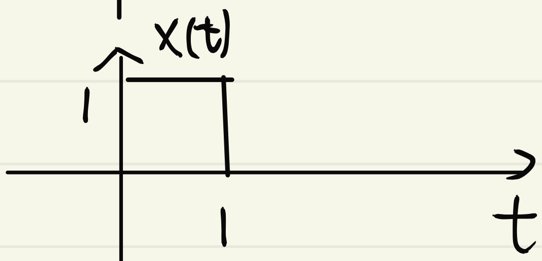
时不变性：$\varphi_i(t-t_k) \xrightarrow{LTI} \psi_i(t-t_k)$

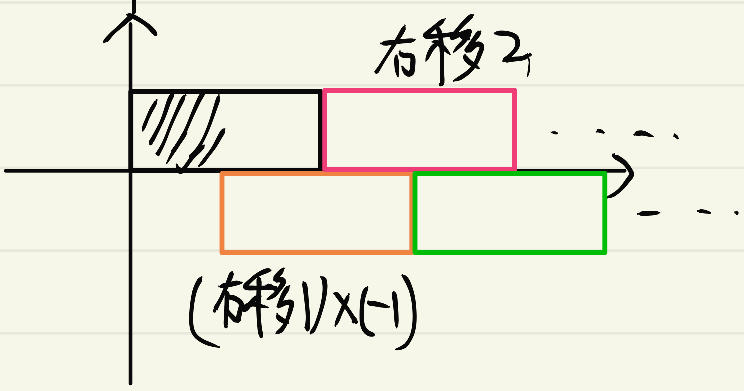
$\forall x(t)$ $\quad x(t) = \sum_{i,k} a_{ik}\varphi_i(t-t_k) \xrightarrow{线性} y(t) = \sum_{i,k} a_{i,k}\psi_i(t-t_k)$

例 3.1

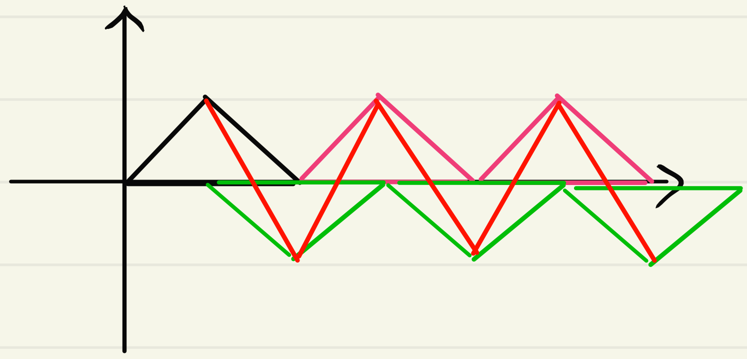








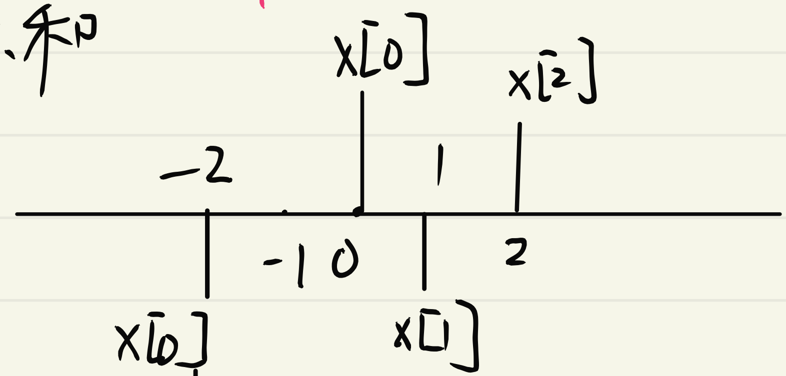
y同样 $\Rightarrow$

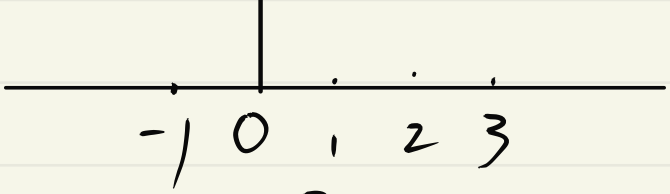


§3.2 卷积的推出

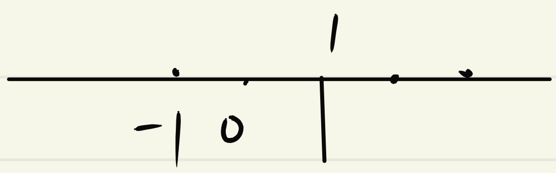
一. 卷积和

$x[n]$





$x[0]\delta[n]$



$x[1]\delta[n-1]$

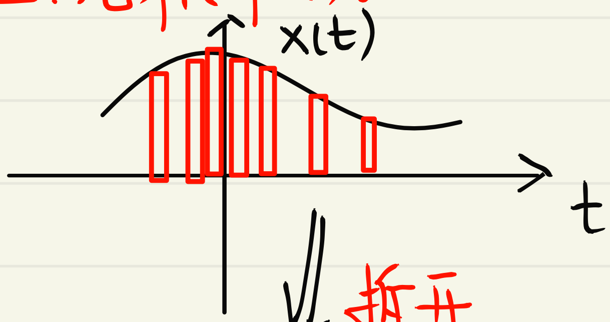
$$\therefore x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

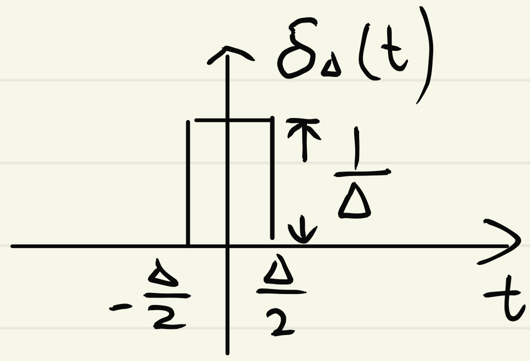
假定 $\delta[n] \xrightarrow{LTI} h[n]$ (单位冲激响应)

则 $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$

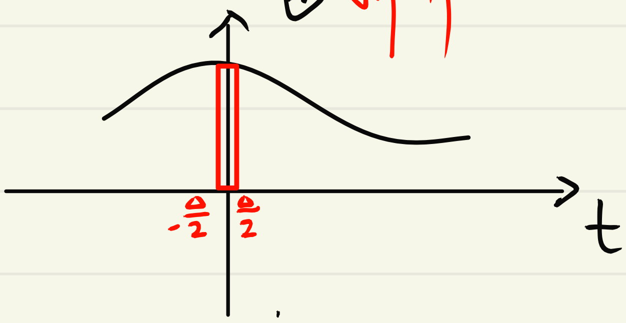
卷积和 $= x[n] * h[n]$

二. 卷积积分





折开



$x(0)\delta_\Delta(t)\cdot\Delta$

$x(\Delta)\delta_\Delta(t-\Delta)\Delta$

$\vdots$

$x_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,\delta_\Delta(t-k\Delta)\,\Delta$

$x(t) = \lim_{\Delta\to 0} x_\Delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$

假定 $\delta_\Delta(t) \xrightarrow{LTI} h_\Delta(t)$ $h(t)$ 单位冲激响应

$x_\Delta(t) \xrightarrow{LTI} \sum_{-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\, h_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$

$\Downarrow \lim_{\Delta\to 0}$

$\Rightarrow y(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=\infty}^{\infty} x(k\Delta) h_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

卷积积分

$y(t) = x(t) * h(t)$

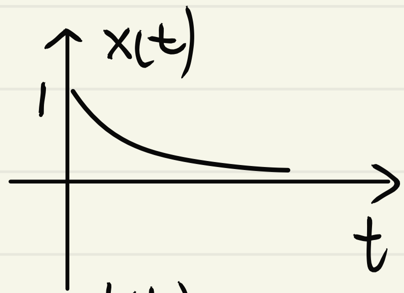
§3.3 卷积的计算

§3.3.2 三种方式求卷积

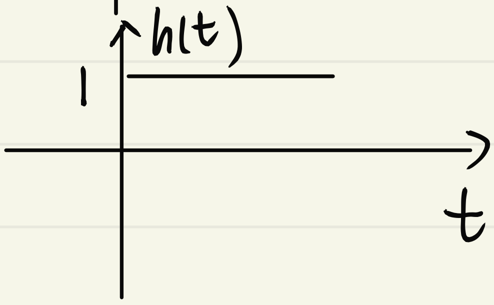
一.图解法

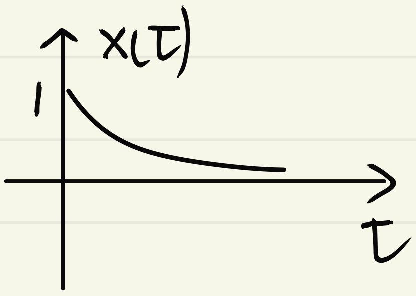
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\,h[n-k] \qquad y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

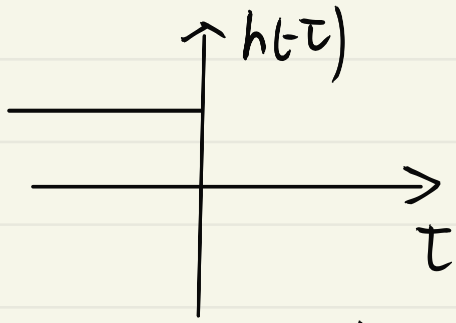
例1:



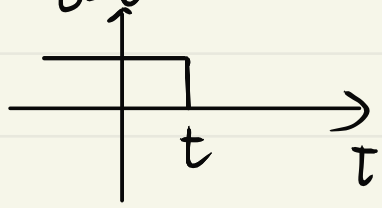
$X(t)=e^{-at}\cdot u(t)$　$h(t)=u(t)$　求 $y(t)=x(t)*h(t)$



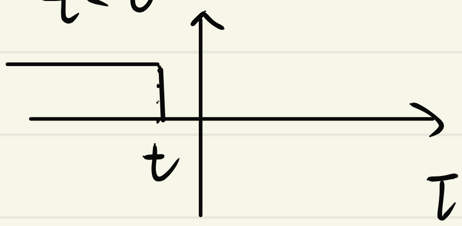




$t>0$



$t<0$



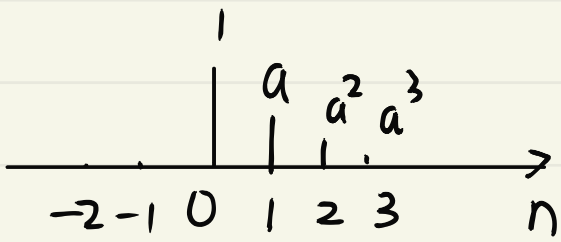
$t>0$时 $y(t)=\int_0^t e^{-a\tau}\,d\tau=\dfrac{1-e^{-at}}{a}$

$t<0$时 $y(t)=0$

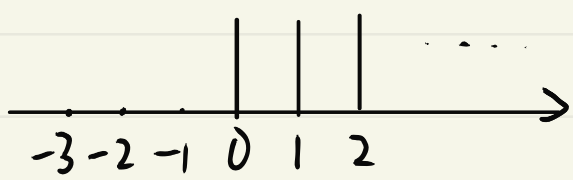
$$\Rightarrow y(t)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-at}}{a}, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

例2:

$x[n]$



$h[n]$

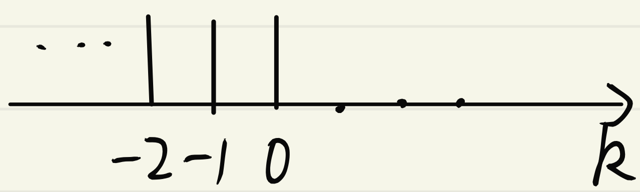


$x[n]=a^n u[n]$

$h[n]=u[n]$

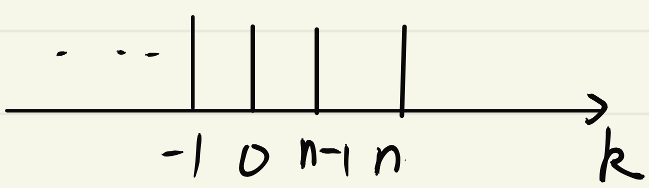
求 $y[n]=x[n]*h[n]$

$h[-k]$



$n\ge0$时

$h[n-k]$

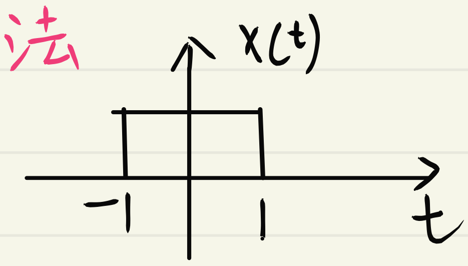


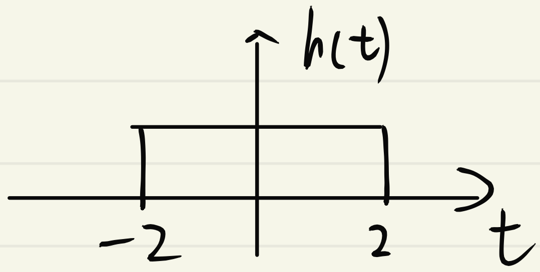
$n\ge0$　$y[n]=\sum_{k=0}^{n}a^k=\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

$n<0$　$y[n]=0$

二、解析法

例3. 求



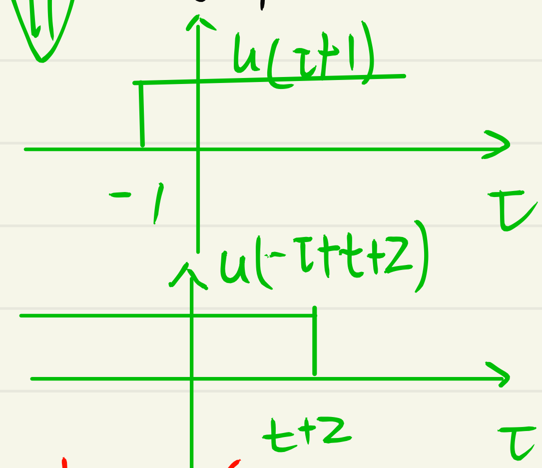


$x(t)=u(t+1)-u(t-1)$　　$h(t)=u(t+2)-u(t-2)$

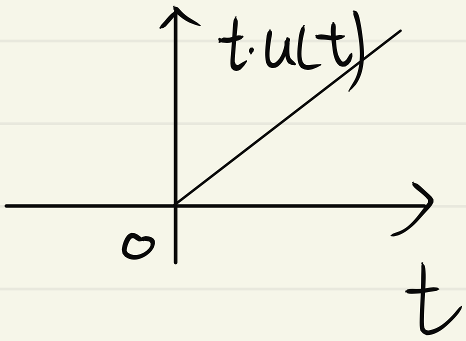
$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[u(\tau+1)-u(\tau-1)][u(t-\tau+2)-u(t-\tau-2)]d\tau$$

$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau+1)u(t-\tau+2)d\tau}_{\tau\text{是自变量}}-\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau+1)u(t-\tau-2)d\tau-\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau-1)u(t-\tau+2)d\tau$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau-1)u(t-\tau-2)d\tau$$

$$=\int_{-1}^{t+2}1\,d\tau\cdot u(t+3)-\int_{-1}^{t-2}1\cdot d\tau\cdot u(t-1)-\int_{1}^{t+2}1\,d\tau\cdot u(t+1)$$
$$+\int_{1}^{t-2}d\tau\cdot u(t-3)$$



$$=(t+3)u(t+3)-(t-1)u(t-1)-(t+1)u(t+1)+(t-3)u(t-3)$$



τ为正，确定下界
τ为负，确定上界

例4. $x[n]=a^n u[n]$，$h[n]=u[n]$，求 $y[n]=x[n]*h[n]$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k\,\underbrace{u[k]\,u[n-k]}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}a^k\cdot\underbrace{u[n]}_{\text{确保 } n\geq 0 \text{ 时有值}}=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u[n]$$

k为正，确定求和下界，为0
k为负，确定求和上界，为n

三. 卷积和的矢量表示法及列表法

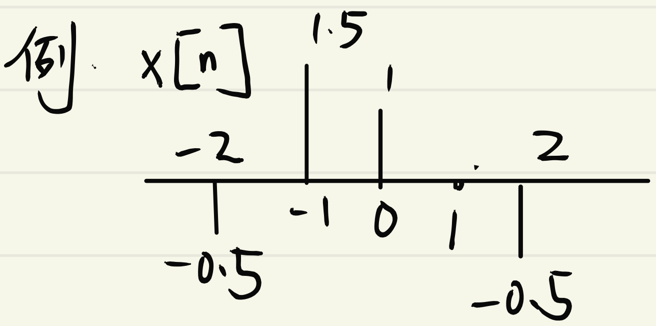
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

定义：$y = \begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \end{bmatrix}$

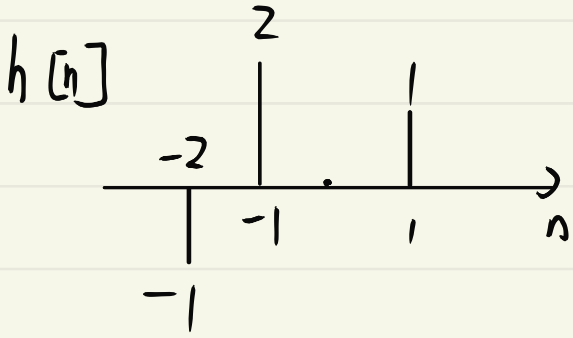
$$X = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 \cdots & 0 \\ h(2) & h(1) & h(0) \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \end{bmatrix}$$

$$y = HX$$

例. $x[n]$



$h[n]$



-2 ($x[n]$ 起始 x_0)

-2 ↓ $h[n]$ 起始 h_0

	-0.5	1.5	1	0	-0.5
-1	0.5	-1.5	-1	0	0.5
2	-1	3	2	0	-1
0	0	0	0	0	0
1	-0.5	1.5	1	0	-0.5

$x_0 + h_0$

n	<-4	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	≥4
$y[n]$	0	0.5	-2.5	2	1.5	2	0	0	-0.5	0

有值的点 $M+N-1$

§3.3.3 卷积的收敛

收敛的条件

① 参与卷积的2个函数/序列是模可积/和，那么卷积是收敛的

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau < \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt$$

② 参与卷积的1个函数/序列是模可积/和，另一个是有界的，那么卷积是收敛的

§3.4卷积的性质及其在LTI系统分析中的作用

① 明白数学性质后面的物理含义

② 加快运算

§3.4.1 卷积的代数性质

一.满足交换律

$x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$　　　$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \xrightarrow[\tau=t-\sigma]{t-\tau=\sigma} -\int_{\infty}^{-\infty}x(t-\sigma)h(\sigma)d\sigma=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\sigma)x(t-\sigma)d\sigma$$

二.结合律

$x(t)*h_1(t)*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]=x(t)*h_2(t)*h_1(t)$

$x[n]*h_1[n]*h_2[n]=x[n]*(h_1[n]*h_2[n])=x[n]*h_2[n]*h_1[n]$

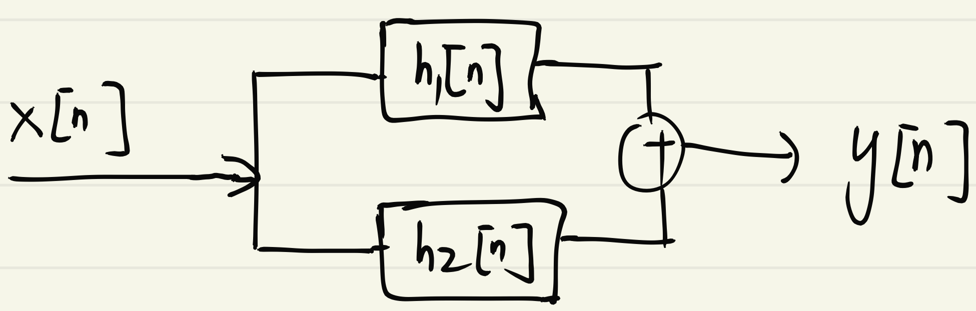
① 两个LTI系统级联仍是LTI系统，其$h(t)=h_1(t)*h_2(t)$

② LTI系统可任意交换顺序

三.分配律

$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$

$x[n]*(h_1[n]+h_2[n])=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$

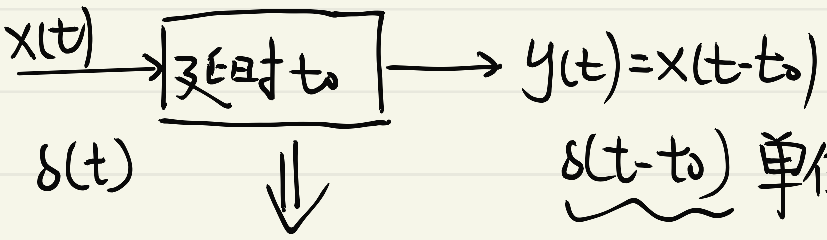


§3.4.2 涉及单位冲激的卷积及卷积的时移性质

一、涉及单位冲激的卷积

$$\boxed{\begin{aligned} &\delta(t)*x(t) = x(t)*\delta(t) = x(t) \qquad && \delta(t)*\delta(t) = \delta(t) \\ &\delta[n]*x[n] = x[n]*\delta[n] = x[n] \qquad && \delta[n]*\delta[n] = \delta[n] \end{aligned}}$$

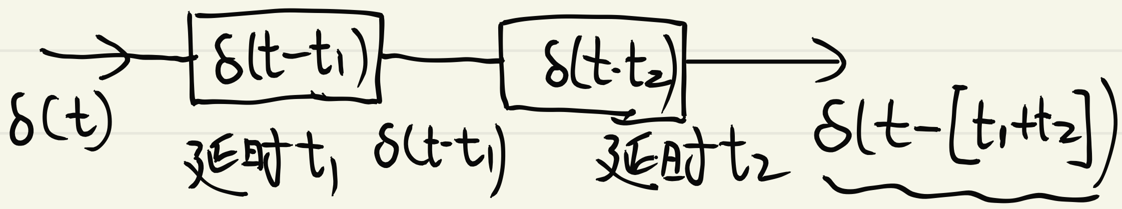
$$\boxed{\begin{aligned} &\delta(t-t_0)*x(t) = x(t)*\delta(t-t_0) = x(t-t_0) \\ &\delta[n-n_0]*x[n] = x[n]*\delta[n-n_0] = x[n-n_0] \end{aligned}}$$



$\delta(t-t_0)$ 单位冲激响应

$$y(t) = x(t)*\delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

$$\boxed{\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2) = \delta[t-(t_1+t_2)] \qquad \delta[n-n_1]*\delta[n-n_2] = \delta[n-(n_1+n_2)]}$$



整个级联的单位冲激响应

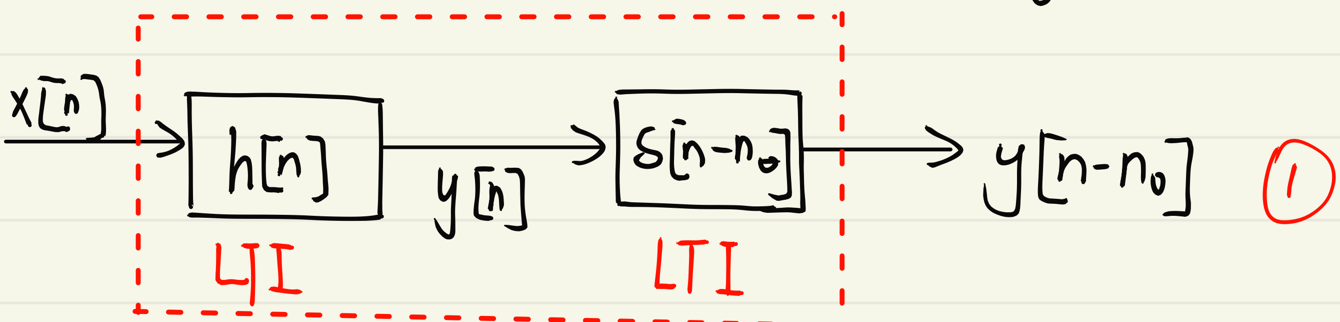
二、卷积的时移性质

如果： $x(t)*h(t) = y(t)$

则： $x(t-t_0)*h(t) = x(t)*h(t-t_0) = y(t-t_0)$

如果： $x[n]*h[n] = y[n]$

则： $x[n-n_0]*h[n] = x[n]*h[n-n_0] = y[n-n_0]$



级联仍为 LTI

$\delta[n] \longrightarrow h[n] \longrightarrow h[n-n_0] \quad \Rightarrow x[n]*h[n-n_0] = y[n-n_0]$

$$x[n] \rightarrow \boxed{\delta[n-n_0]} \xrightarrow{x[n-n_0]} \boxed{h[n]} \rightarrow y[n-n_0] \Rightarrow x[n-n_0] * h[n] = y[n-n_0]$$

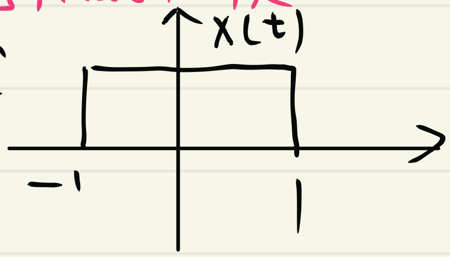
交换级联顺序与 ① 结果仍保持不变

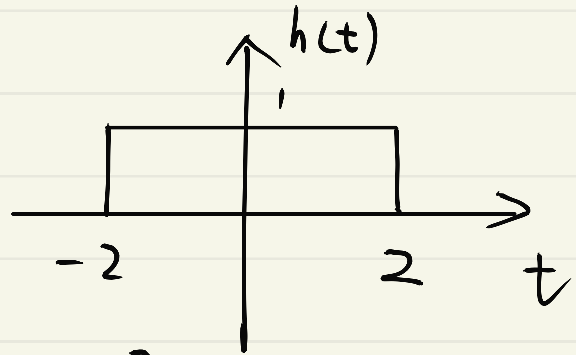
§3.4 卷积的性质

$u(t) * u(t) = t\,u(t)$

$u[n] * u[n] = (n+1)\,u[n]$

例：求





$$y(t) = x(t) * h(t) = [u(t+1) - u(t-1)] * [u(t+2) - u(t-2)]$$

$$= u(t) * [\delta(t+1) - \delta(t-1)] * u(t)[\delta(t+2) - \delta(t-2)]$$

$$= u(t) * u(t) * [\delta(t+1) - \delta(t-1)] * [\delta(t+2) - \delta(t-2)]$$

$$= t\,u(t) * [\delta(t+3) - \delta(t-1) - \delta(t+1) + \delta(t-3)]$$

$$= (t+3)u(t+3) - (t-1)u(t-1) - (t+1)u(t+1) + (t-3)u(t-3)$$

§3.4.3 卷积的微分/差分，积分/累加性质

一. 卷积的微分/差分性质

如果：$x(t) * h(t) = y(t)$

则：$\frac{d}{dt}[x(t) * h(t)] = \left[\frac{d}{dt}x(t)\right] * h(t) = x(t) * \left[\frac{d}{dt}h(t)\right] = \frac{d}{dt}y(t)$

如果：$x[n] * h[n] = y[n]$

则：$\Delta\{x[n] * h[n]\} = (\Delta x[n]) * h[n] = x[n] * (\Delta h[n]) = \Delta y[n]$

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{\delta'(t)} \rightarrow y'(t)$$

二、卷积的积分/累加性质

如果 $x(t)*h(t)=y(t)$

则 $\int_{-\infty}^{t}[x(\tau)*h(\tau)]\,d\tau=\left(\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\right)*h(t)=x(t)*\left(\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau\right)=\int_{-\infty}^{t}y(\tau)\,d\tau$

如果：$x[n]*h[n]=y[n]$

则：$\sum_{k=-\infty}^{n}\{x[k]*h[k]\}=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]*h[n]=x[n]*\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]=\sum_{k=-\infty}^{n}y[k]$

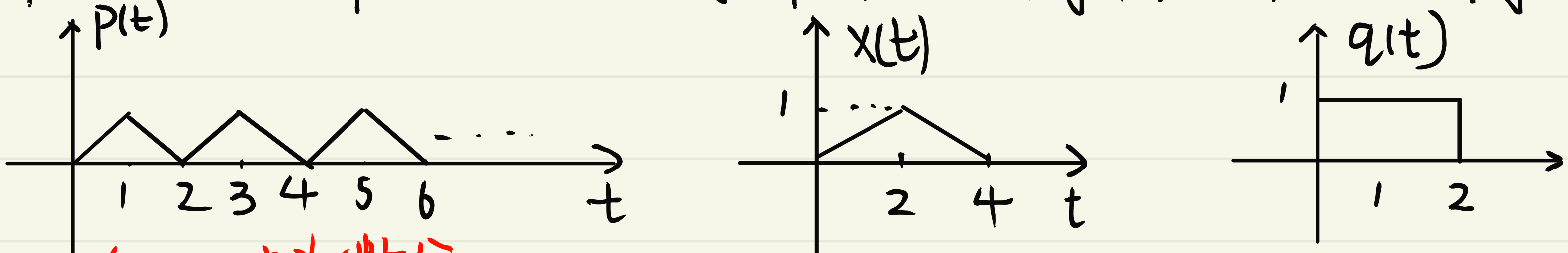
$\delta(t)\longrightarrow\boxed{\int}\longrightarrow$

$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}=u(t)$ （单位冲激响应） $\Rightarrow$ $\longrightarrow\boxed{u(t)}\longrightarrow$ 滑变积分系统

$\delta[n]\longrightarrow\boxed{\Sigma}\longrightarrow$ $\Longrightarrow$ $\longrightarrow\boxed{u[n]}$ 滑变累加系统

例题：

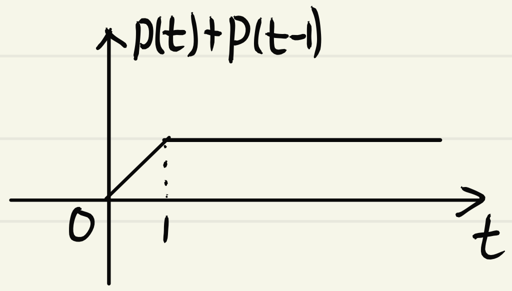
某连续时间因果 LTI系统当输入 $p(t)$ 时的输出 $q(t)$，求对 $x(t)$ 输入时的响应 $y(t)$

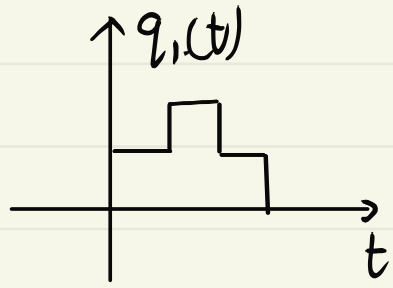


三角形的变为微分

① $\underbrace{p(t)+p(t-1)}$ ← $p_1(t)$

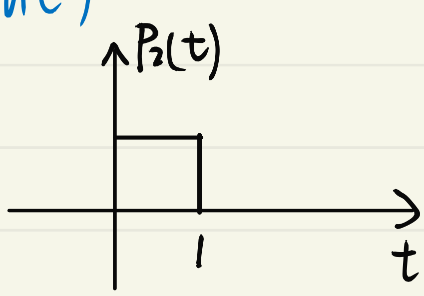
⇒ 输出为 $\underbrace{q(t)+q(t-1)}$ ↖ $q_1(t)$

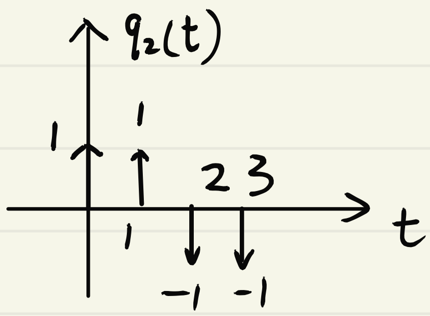




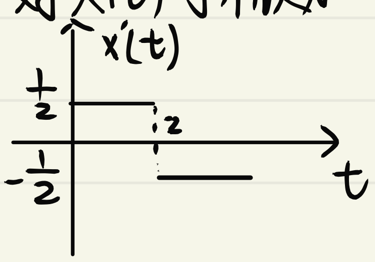
② $p_2(t)=p_1'(t)$

$q_2(t)=q_1'(t)$





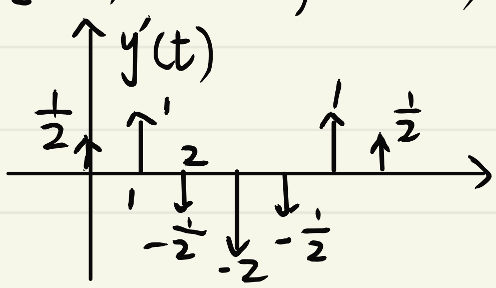
对 $x(t)$ 求微分



$x'(t)=\frac{1}{2}[p_2(t)+p_2(t-1)-p_2(t-2)-p_2(t-3)]$

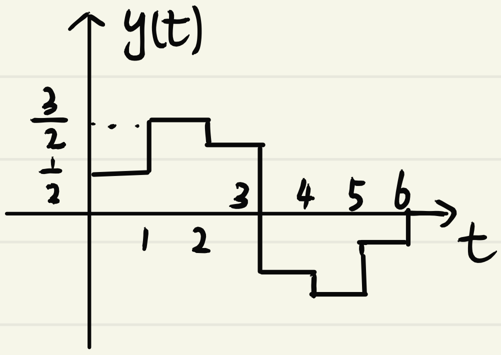
$y'(t)=\frac{1}{2}[q_2(t)+q_2(t-1)-q_2(t-2)-q_2(t-3)]$

⇓



0	1	2	3	4	5	6
1	1	-1	-1			
	1	1	-1	-1		
		-1	-1	1	1	
			-1	-1	1	1
1	2	-1	-4	-1	2	1

$\Rightarrow y(t)$



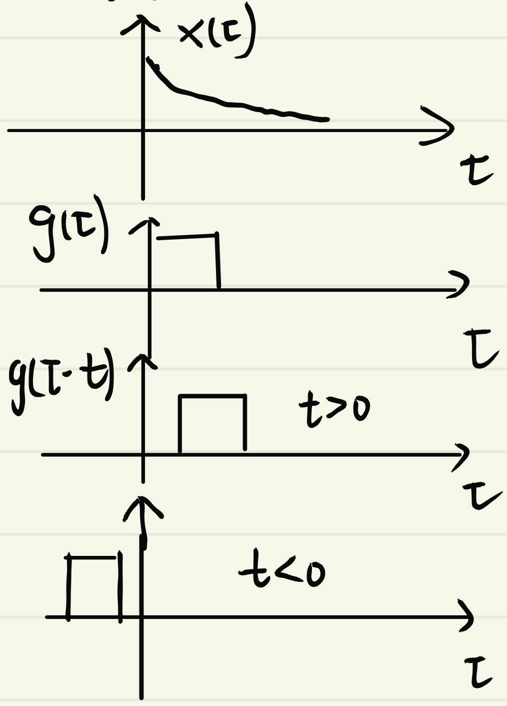
$$\begin{array}{ccccccc} & & & -1 & -1 & 1 & 1 \\ & & & & -1 & -1 & 1 \quad 1 \\ 1 & 2 & -1 & -4 & -1 & 2 & 1 \end{array}$$

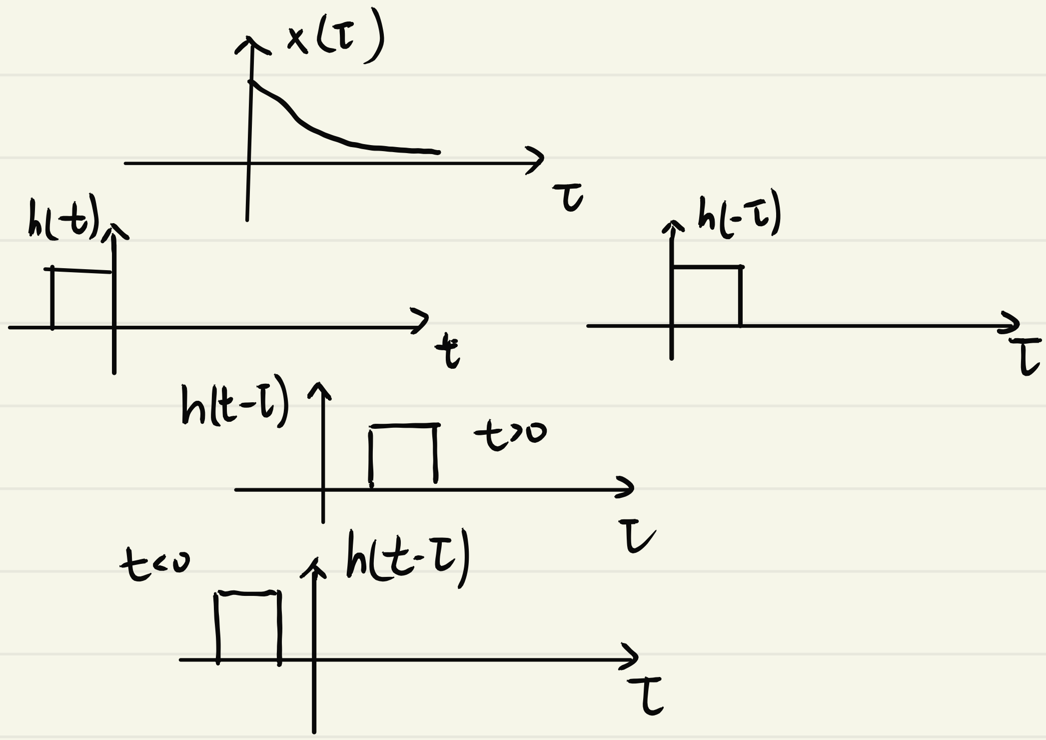
§3.4.4 相关运算与卷积的关系

$$R_{xg}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, g^*(\tau - t)\, d\tau \qquad x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$\Downarrow$ 对实信号

$$R_{xg}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, g(\tau - t)\, d\tau$$





实：$R_{xg}(t) = x(t) * g(-t)$

一般：$R_{xg}(t) = x(t) * g^*(-t)$

$R_{xg}[n] = x[n] * g^*[-n]$

§3.5 周期卷积

对于周期为 T/N 的 $\tilde{x}_1(t)$、$\tilde{x}_2(t)$ / $\tilde{x}_1[N]$、$\tilde{x}_2[N]$

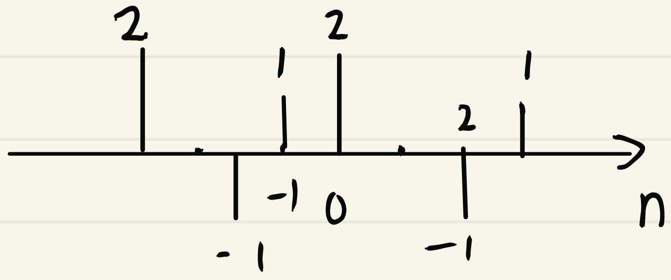
其周期卷积的结果 $\tilde{y}(t)$ / $\tilde{y}[n]$ 仍是 T/N

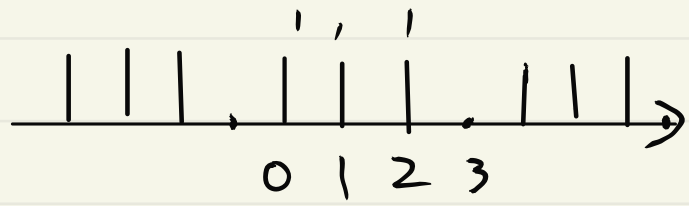
$$\tilde{y}(t)=\int_{\langle T\rangle}\tilde{x}_1(\tau)\tilde{x}_2(t-\tau)\,d\tau \qquad \tilde{y}[n]=\sum_{k\in\langle N\rangle}\tilde{x}_1[k]\tilde{x}_2[n-k]$$

$$=\tilde{x}_1(t)\circledast\tilde{x}_2(t) \qquad =\tilde{x}_1[n]\circledast\tilde{x}_2[n]$$

T为 $\tilde{x}_1$ 与 $\tilde{x}_2$ 最小周期 T_1、T_2 的最小公倍数

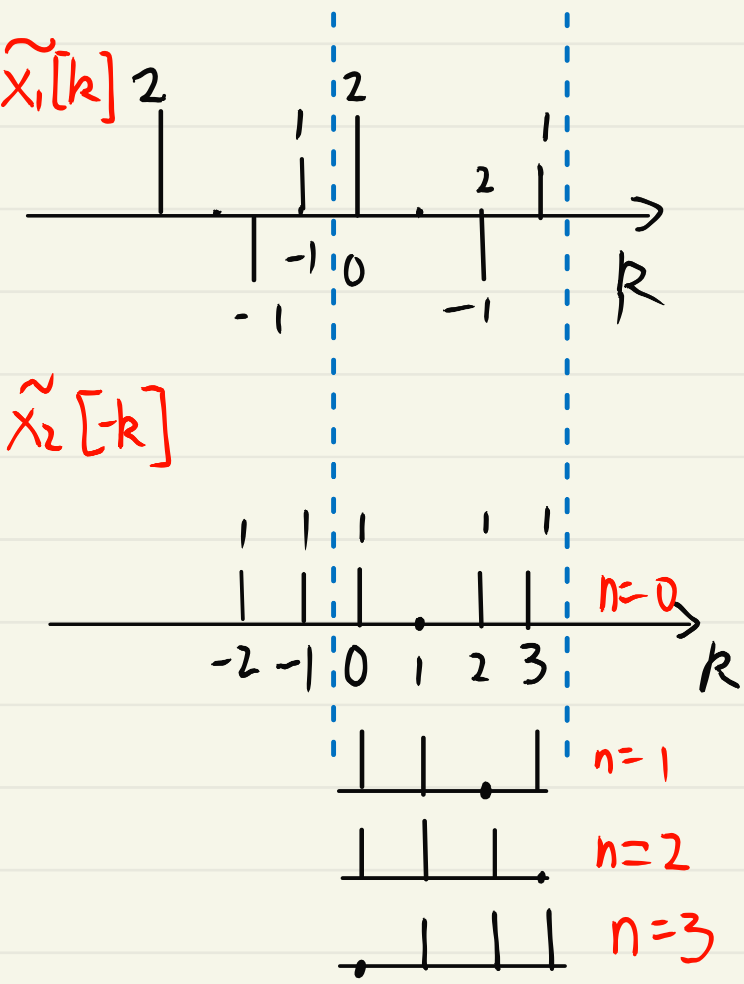
例：求





$N_1=4$ $\qquad$ $N_2=4$

若 $N_1\neq N_2$，找 N_1 与 N_2 最小公倍数 N



$\tilde{y}_1[0]=2$ $\qquad$ $\tilde{y}_1[4]=2$

$\tilde{y}_1[1]=3$ $\qquad$ $\tilde{y}_1[5]=3$

$\tilde{y}_1[2]=1$ $\qquad$ $\tilde{y}_1[6]=1$

$\tilde{y}_1[3]=0$ $\qquad$ $\tilde{y}_1[7]=0$

§3.7 LTI系统的特性与单位冲激响应之间的关系

§3.7.1 LTI系统的单位冲激响应

一、典型 LTI系统的 $h(t)$ / $h[n]$

	连续 $h(t)$	离散 $h[n]$
恒等	$\delta(t)$	$\delta[n]$
时移	$\delta(t-t_0)$	$\delta[n-n_0]$
微分/差分	$\delta'(t)$	$\delta[n]-\delta[n-1]$
积分/累加	$u(t)$	$u[n]$
数乘	$c\delta(t)$	$c\delta[n]$

要记牢

单位冲激响应是 LTI系统 的完全充分的表征

LTI系统的所有特性都由 $h(t)$ / $h[n]$ 表征，与 $x(t)$ / $x[n]$ 在运算时看起来一样 $y(t)=x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$

§3.7.2 直接由 $h(t)$ / $h[n]$ 看系统的性质

如果一个输入/输出关系能写成卷积的形式，则这个系统一定是LTI

例: $y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}$

$$=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\cdot u[n-k]$$

$$=x[n]*\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

∴是LTI系统

$$\delta(t)\rightarrow\boxed{\quad}\rightarrow h(t)$$

系统

①记忆性，非记忆性

无记忆性: $h(t)=c\delta(t)$　　$h[n]=c\delta[n]$，否则都是有记忆的

②因果性，非因果性

若 $h(t_0)\neq 0\ (t_0<0)$ 时，又∵ $\delta(t)$ 在 $t=0$ 处开始有值

∵因为因果，则输出 $h(t_0)$ 由 $\delta(t_0)$ 之间决定，则 $h(t_0)=0$

矛盾

因果: $h(t)=0,\ t<0$　　$h[n]=0,\ n<0$　　否则是非因果的

推广一下: 一个信号或函数，如果 $t<0$ $x(t)=0$，$n<0$ $x[n]=0$ ⇒ 叫因果函数/序列

③ 稳定性.

如果: $\left.\begin{array}{l}\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty\end{array}\right\}$ 系统是稳定的

④ 可逆性, 逆系统

一个LTI系统不一定可逆

如果 $h(t)$ / $h[n]$ 存在 $h_I(t)$ / $h_I[n]$

$$h(t) * h_I(t) = \delta(t)$$

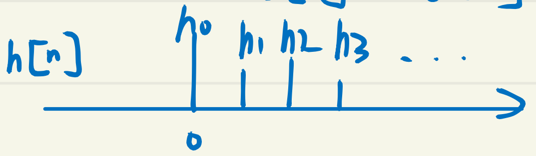
$$h[n] * h_I[n] = \delta[n]$$

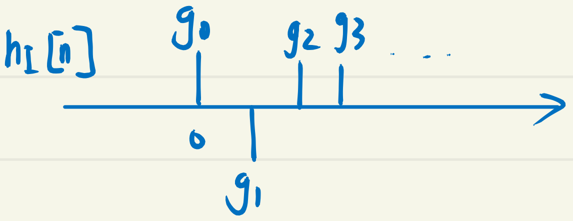
例 3.31 习题

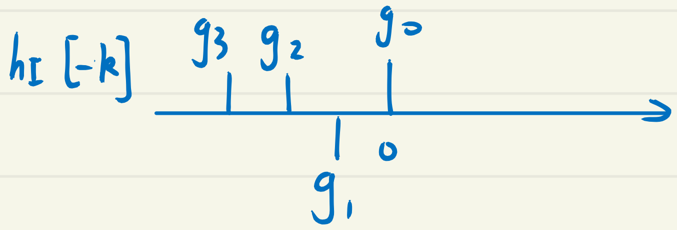
$$h[n] * h_I[n] = \delta[n]$$

∵ 为因果稳定的 LTI

$\Rightarrow h[n] = 0, \quad n < 0$







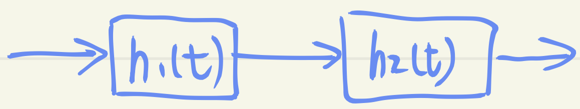
$n=0 \quad h_0 g_0 = \delta[0] = 1$

$h_1 g_0 + h_0 g_1 = \delta[1] = 0 \qquad \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} h_{n-k} g_k = 0$

$\vdots \qquad \Rightarrow g_n = -\frac{1}{h_0} \sum_{k=0}^{n-1} g_k h_{n-k}$

§3.7.3 系统互联的 $h(t)$/ $h[n]$

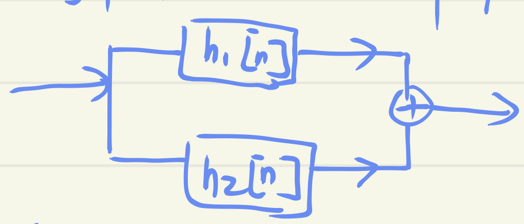
一、两个LTI系统级联



$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

二、两个LTI系统的并联



$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

三、反馈互联

§3.8 LTI系统的单位阶跃响应

$$u(t) \rightarrow \boxed{系统} \rightarrow s(t)$$

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow h(t)$$

$$s(t) = h(t) * u(t) \qquad s[n] = h[n] * u[n]$$

$$\frac{du(t)}{dt} \rightarrow \boxed{} \rightarrow h(t)$$

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} \qquad h[n] = \Delta s[n]$$

$$\therefore h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

积分器　微分器

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow \boxed{u(t)} - \boxed{\delta'(t)} \rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{\delta'(t)} \xrightarrow{x'(t)} \underbrace{\boxed{h(t)} \rightarrow \boxed{u(t)}}_{s(t)} \rightarrow y(t) = x'(t) * s(t)$$

对偶离散时间： $y[n] = \Delta x[n] * s[n]$

LTI系统的单位阶跃响应

	连续 $s(t)$	离散 $s[n]$
恒等	$u(t)$	$u[n]$
数乘	$cu(t)$	$cu[n]$
微分/差分	$\delta(t)$	$\delta[n]$
积分/累加	$t\,u(t)$	$(n+1)u[n]$
时移	$u(t-t_0)$	$u[n-n_0]$

$u(t) * u(t)$　　$u[n] * u[n]$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt$$

$$s(t) = h(t) * u(t)$$

§3.9 奇异函数

分配函数的定义：对于0点连续的 $x(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t)\,dt = x(0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta'(t)\,dt = -x'(0)$$

一、冲激函数 $\delta(t)$

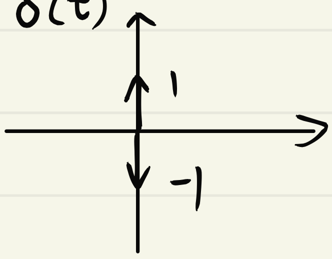
性质：① 具有单位面积　$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$

② 是偶函数　$\delta(t) = \delta(-t)$

③ $x(t)\,\delta(t) = x(0)\,\delta(t)$

二、冲激函数的微分 $\delta'(t)$

单位冲激偶函数



定义：$u_1(t)=\delta'(t)$

$$u_k(t)=\underbrace{u_1(t)*u_1(t)*\cdots*u_1(t)}_{k\text{个微分器级联}}\qquad u_0(t)=\delta(t)$$

$$u_k(t)*x(t)=\frac{d^k}{dt^k}x(t)$$

性质：

① $k\geq 1$ 时，对于在0点 k阶导数连续的 $x(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_k(t)\,x(t)\,dt=(-1)^k x^{(k)}(0)$$

② 具有0面积，$k\geq 1$ 时 $\int_{-\infty}^{\infty}u_k(t)\,dt=0$

③ $u_k(t)=(-1)^k u_k(-t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,u_k(-t)\,dt\overset{-t=\tau}{=\!=}\int_{-\infty}^{\infty}x(-\tau)\,u_k(\tau)\,d\tau$$

$$=(-1)^k\cdot\frac{d^k}{d\tau^k}x(-\tau)\Big|_{\tau=0}$$

$$=(-1)^k\cdot(-1)^k x^{(k)}(-0)=x^{(k)}(0)$$

$$=(-1)^k\int_{-\infty}^{\infty}u_k(t)x(t)\,dt$$

④ 对于0点、k阶微分连续的 $x(t)$

$$x(t)\,u_k(t)=\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\frac{k!}{m!(k-m)!}x^{(m)}(0)\,u_{k-m}(t)$$

三、$\delta(t)$ 的各阶积分

定义 $u_{-1}(t)=u(t)$

$$u_{-k}(t)=\underbrace{u_{-1}(t)*u_{-1}(t)\cdots*u_{-1}(t)}_{k\text{个}}\qquad k\geq 1$$

常规函数　　积分

四、离散时间对偶

定义：$u_0[n]=\delta[n]$　　$u_1[n]=\Delta\delta[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$

$u_{-1}[n]=u[n]$

$$u_k[n] = \underbrace{u_1[n] * u_1[n] * \cdots * u_1[n]}_{k个}$$

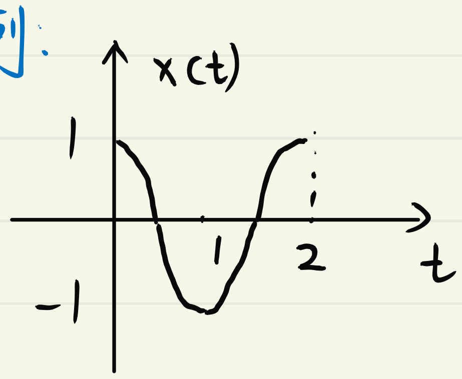
$$u_{-k}[n] = \underbrace{u_{-1}[n] * u_{-1}[n] * \cdots * u_{-1}[n]}_{k个}$$

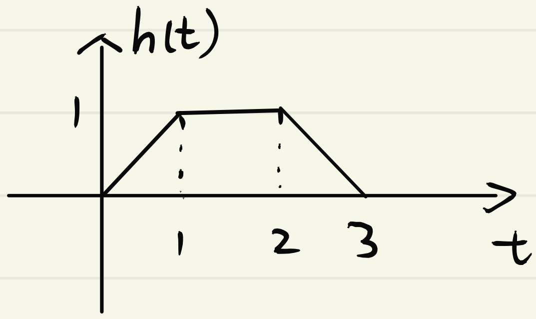
§3.9.3 卷积运算的一般化

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t_1}\cdots\int_{-\infty}^{t_{m-1}} x(t_m)\,dt_m\,dt_{m-1}\cdots dt_1 * \frac{d^m}{dt^m}h(t)$$

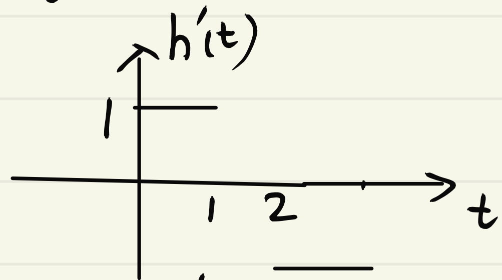
$$x[n]*h[n] = \sum_{m_1=-\infty}^{n}\sum_{m_2=-\infty}^{m_1}\cdots\sum_{m_k=-\infty}^{m_{k-1}} x[m_k] * \Delta^k h[n]$$

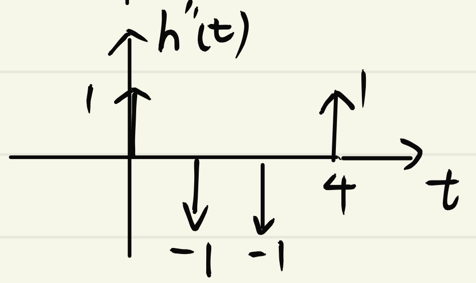
例:





求 $x(t) * h(t)$



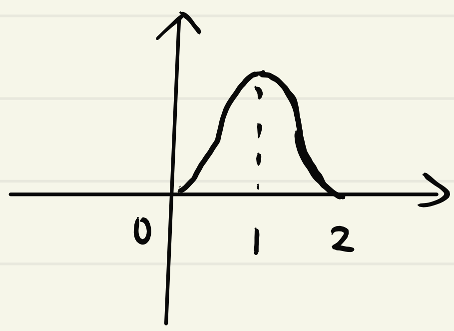


$$x(t) = \cos\pi t\,[u(t)-u(t-2)]$$

$$x_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\pi}\sin\pi t\,[u(t)-u(t-2)]$$

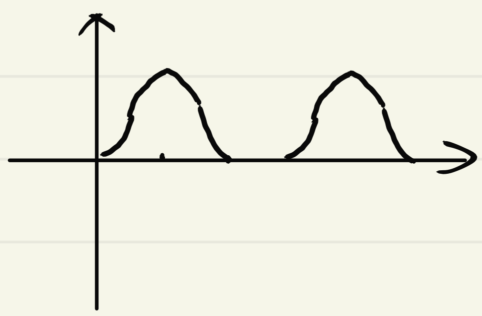
$$x_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\pi}\sin\pi\tau\,[u(\tau)-u(\tau-2)]\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi^2}(1-\cos\pi t)[u(t)-u(t-2)]$$



$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= x_2(t) * h''(t)$$



第四章 用微分方程和差分方程描述的系统

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t) \\ y^{(k)}(t_0) = C_k , \quad k=0,1,\cdots N-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \\ y[n_0+k] = C_k , \quad k=0,1,\cdots N-1 \end{cases}$$

§4.2 递归和非递归系统的级联

$$v(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t) \Leftarrow \text{LTI系统} \qquad h_1(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta^{(k)}(t)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = v(t) \\ y^{(k)}(t_0) = C_k \quad k=0,1,\cdots N-1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \boxed{h_1(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta^{k}(t)} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} \sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = v(t) \\ y^{(k)}(t_0) = C_k \quad k=0,1,\cdots N-1 \end{matrix}}$$

非递归　　　　递归系统

§4.3 经典解法

§4.3.1 微分方程

一、齐次解和特解

$$y(t) = y_H(t) + y_p(t)$$

齐次方程：$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k = 0$

$$\Rightarrow y_H(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} A_i e^{\lambda_i t} & \text{根不同} \\ \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{\sigma_i} A_{ik} t^{k-1} e^{\lambda_i t} & r\text{个 } \sigma_i \text{ 阶重根} \end{cases}$$

特解：

$x(t)$	$y_p(t)$
E	B
$\sum_{k=0}^{L} E_k t^k$	$\sum_{m=0}^{L} P_m t^m$
e^{at} $a\neq\lambda_i$	$P e^{at}$
e^{at} a为σ_i阶重根	$P t^{\sigma_i} e^{at}$
$\sum_{k=0}^{L} E_k t^k e^{at}$, $a\neq\lambda_i$	$\sum_{m=0}^{L} P_m t^m e^{at}$
$\sum_{k=0}^{L} E_k t^k e^{at}$, a为σ_i阶重根	$\sum_{m=\sigma_i}^{L+\sigma_i} P_m t^m e^{at}$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{\lambda_i t} + y_p(t)$$

二、待定系数 A_i

假设 $y^{(k)}(0) = C_k$

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_N + y_p(0) = C_0$$

$$A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + \cdots + A_N\lambda_N + y_p'(0) = C_1$$

$$\vdots$$

$$A_1\lambda_1^{N-1} + A_2\lambda_2^{N-1} + \cdots + A_N\lambda_N^{N-1} + y_p^{(N-1)}(0) = C_{N-1}$$

$$a = [A_1\ A_2\ \cdots\cdots\ A_n]^T$$

$$y_p = [y_p(0)\ y_p'(0)\ \cdots\cdots\ y_p^{(N-1)}(0)]^T$$

$$C = [C_0\ C_1\ \cdots\cdots\ C_{N-1}]^T$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_N \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_N^2 \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \cdots & \lambda_N^{N-1} \end{bmatrix}$$

$$a = V^{-1}(C - y_p)$$

例：
$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t) + 2x(t) \quad ① \\ x(t) = e^{-t}, \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 3 \end{cases}$$

$x'(t)+2x(t)=e^{-t}$

$\lambda^2+3\lambda+2=0$ $\quad \lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$

$\Rightarrow y_H(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$ 再看特解 e^{-t} -1为1阶重根

$\Rightarrow y_p(t)=Bte^{-t}$

$y_p'(t)=Be^{-t}-Bte^{-t}$

$y_p''(t)=-2Be^{-t}+Bte^{-t}$

代入①中 $\Rightarrow B=1$

$\therefore y(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}+te^{-t}$

$$\begin{cases} A_1+A_2=0 \\ -A_1-2A_2+1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2=-2 \\ A_1=2 \end{cases}$$

$\therefore y(t)=2e^{-t}-2e^{-2t}+te^{-t}$

§4.3.2 差分方程的经典解法

一、齐次解和特解

$y[n]=y_H[n]+y_p[n]$

齐次方程: $\sum_{k=0}^{N} a_k\lambda^{N-k}=0$ ※ e.g. $y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=0$

$\lambda^2+3\lambda+2=0$

$$y_H[n]=\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} A_i\lambda_i^n & N个不同的根 \\ \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{\sigma_i} A_{ik}n^{k-1}\lambda_i^n & r个\sigma_i阶重根 \end{cases}$$

特解:

$x[n]$	$y_p[n]$
E	B
$\sum_{k=0}^{L}E_kn^k$	$\sum_{m=0}^{L}P_mn^m$
a^n, $a\neq\lambda_i$	Pa^n
a^n, a是σ_i阶重根	$Pn^{\sigma_i}a^n$
$\sum_{k=0}^{L}E_kn^ka^n$, $a\neq\lambda_i$	$\sum_{m=0}^{k}P_mn^ma^n$
$\sum_{k=0}^{L}E_kn^ka^n$, a是σ_i阶重根	$\sum_{m=\sigma_i}^{\sigma_i+L}P_mn^ma^n$

二、待定系数

若特殊来看：$y[n]=\sum_{i=1}^{N} A_i\lambda_i^n + y_p[n]$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \cdots + A_N + y_p[0] = C_0 \\ A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + \cdots + A_N\lambda_N + y_p[1] = C_1 \\ \vdots \\ A_1\lambda_1^{N-1} + A_2\lambda_2^{N-2} + \cdots + A_N\lambda_N^{N-1} + y_p[N-1] = C_{N-1} \end{cases}$$

例：$\begin{cases} y[n]+2y[n-1] = x[n]-x[n-1] \\ x[n]=n^2 \quad y[-1]=-1 \end{cases}$

$y[n]+2y[n-1] = n^2-(n-1)^2 = 2n-1$

$\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=-2$

$y_H[n] = A(-2)^n$

特解：$y_p[n] = B_0+B_1 n$

$y_p[n-1] = B_0+B_1(n-1)$

代入原方程 $\Rightarrow$

$B_0+B_1 n + 2B_0+2B_1(n-1) = 2n-1$

$\Rightarrow B_1=\frac{2}{3} \quad B_0=\frac{1}{9}$

$y[n] = A(-2)^n+\frac{1}{9}+\frac{2}{3}n \quad y[-1]=-1 \Rightarrow A=\frac{4}{9}$

§4.3.3 差分方程的递推解法

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

① $a_0 y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\} \quad \text{后推方程}$$

② $a_N y[n-N] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y[n-k]$

$$y[n-N] = \frac{1}{a_N}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y[n-k]\right\} \quad \text{前推方程}$$

还是上例：

右推 $y[n] = 2n-1-2y[n-1]$

$\Rightarrow y[0] = -1-2y[-1] = -1+2 = 1$

$y[1] = 1-2y[0] = -1$

$y[2] = 3-2y[1] = 5$

$\vdots$

$y[n] = \cdots$

适合于计算机

前推：$y[n-1] = \frac{1}{2}(2n-1-y[n])$

$y[-2] = \frac{1}{2}(-3-y[-1]) = -1$

$y[-3] = \frac{1}{2}(-5-y[-2]) = -2$

$\vdots$

补充：方程描述系统的线性和时不变分析

①线性考虑

用连续时间举例：

$$y(t) = y_H(t) + y_p(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{\lambda_i t} + y_p(t)$$

$a = V^{-1}\{c - y_p\}$

由附加条件和特解决定

即使 $x(t)=0$ 使特解 $y_p=0$

但只要 c中有不为0的，则 $a\neq 0$，则有输出

附加条件不全为0时，系统不满足0输入 $\Rightarrow$ 0输出，不是线性的

附加条件全为0时，则是线性的

②时不变性

$a = V^{-1}(c-y_p) = \underbrace{V^{-1}c}_{\text{附加条件}} - \underbrace{V^{-1}y_p}_{\text{特解}}$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{\lambda_i t} + y_p(t)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} A_{ic} e^{\lambda_i t}}_{①} + \underline{\sum_{i=1}^{N} A_{ip} e^{\lambda_i t} + y_p(t)}$$

如果不是零附加条件，肯定是时变的，$\because$ ①与输入无关

例：$y'(t)+2y(t)=x(t)$，$y(0)=0$

求在 $x_1(t)=u(t)$，$x_2(t+1)=u(t+1)$ 时分别的输出为 $y_1(t)$，$y_2(t)$

$y(t)=y_H(t)+y_p(t)$ $\quad y_H(t)=Ae^{-2t}$

(1) $y_p(t)=C$

$$\begin{cases}2c=1 & t>0\\ 2c=0 & t<0\end{cases} \Rightarrow y_1(t)=\begin{cases}Ae^{-2t}+\frac{1}{2}, & t>0\\ Be^{-2t}, & t<0\end{cases}$$

又 ∵ $y(0)=0$

$A=-\frac{1}{2}$ $\quad B=0$

$$\Rightarrow y_1(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

(2)

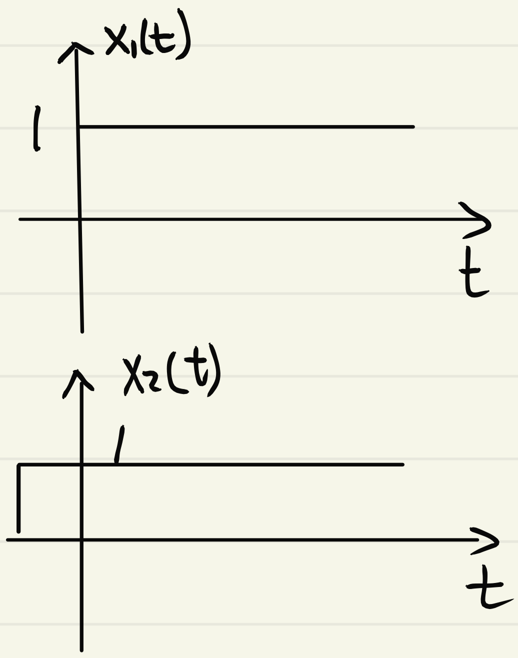
$$y_2(t)=\begin{cases}Ae^{-2t}+\frac{1}{2}, & t>-1\\ Be^{-2t}, & t<-1\end{cases}$$

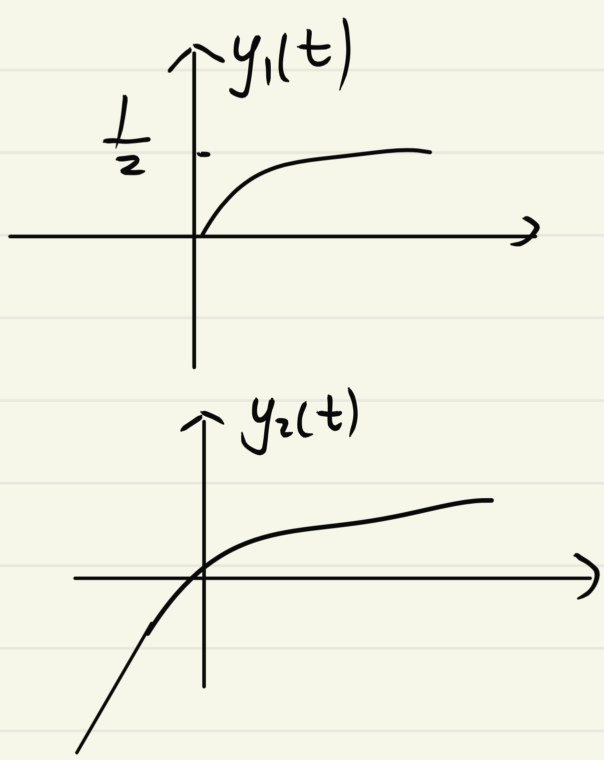
$y_2(0)=A+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow A=-\frac{1}{2}$

$y_2(-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2}$

$y_2(-1)=Be^{2} \Rightarrow B=\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{2}$

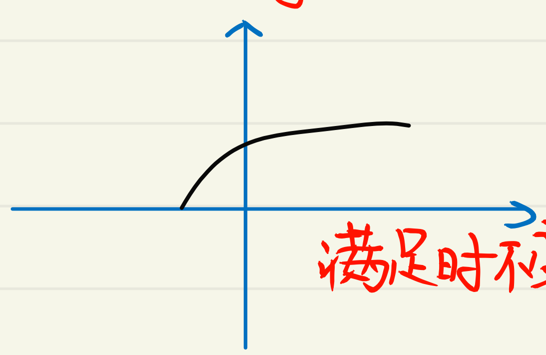
$$\Rightarrow y_2(t)=\begin{cases}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}, & t>-1\\ \frac{1}{2}(e^{-2}-1)e^{-2t}, & t<-1\end{cases}$$





附加条件

若 x_2 时改为 $y(-1)=0$



满足时不变

只有在信号加入的时刻给一个零附加条件，系统才是时不变的

③因果性：

系统只有在信号加入的时刻，给出附加条件，系统才是因果的

可0可非0

§4.4 用方程描述的因果系统

零输入响应和零状态响应

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{k}(t) \\ y^{k}(0_-) = C_k, \quad k=0,1,\cdots N-1 \end{cases}$$

只关注 $y(t)$, $t>0$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \\ y[-k] = C_k, \quad k=1,2,\cdots N \end{cases}$$

$y[n]$, $n \geq 0$

由附加条件导致的输出：零输入响应

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y_{zi}^{(k)}(t) = 0 \\ y_{zi}^{(k)}(0^+) = y_{zi}^{(k)}(0^-) = C_k, \quad k=0,1,\cdots N-1 \end{cases} \Rightarrow y_{zi}(t) \quad t>0$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y_{zi}[n-k] = 0 \\ y_{zi}[-k] = C_k, \quad k=1,2,\cdots N \end{cases} \Rightarrow y_{zi}[n], \quad n \geq 0$$

$y_{zi}[n] = \sum_{i=1}^{N} A_i \lambda_i^n$ 先不加 $u[n]$

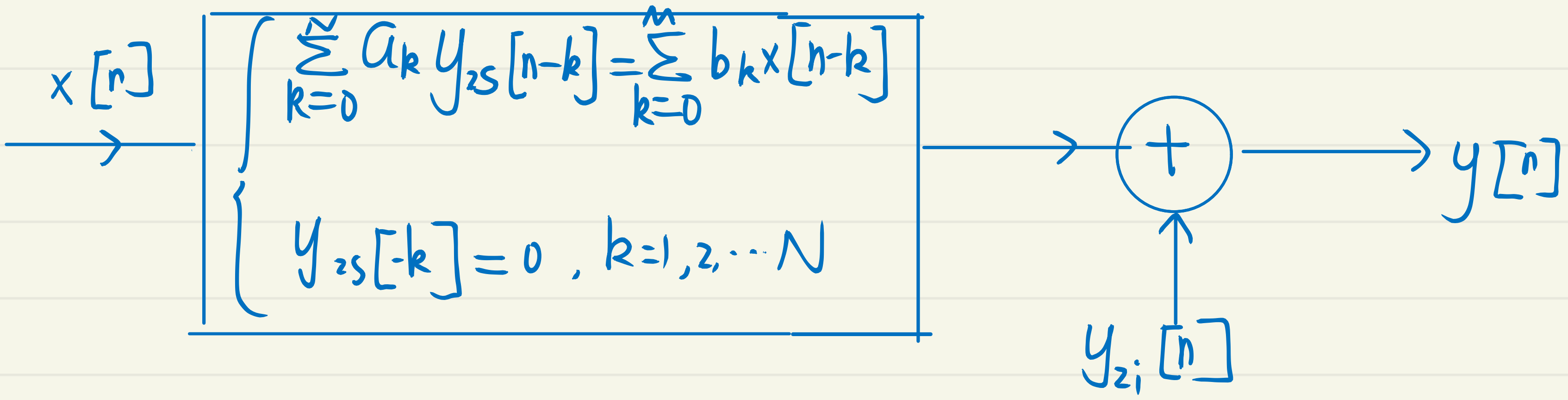
再代入 $y_{zi}[-k] = C_k$, 求出 A_i $\Rightarrow y_{zi}[n] = \sum_{i=1}^{N} A_i \lambda_i^n u[n]$

② 零状态响应

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y_{zs}^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t) \\ y_{zs}^{(k)}(0_-) = 0, \quad k=0,1,\cdots N-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y_{zs}[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \\ y_{zs}[-k] = 0, \quad k=1,2,\cdots N \end{cases}$$

均为LTI系统



对零状态响应，求出 h[n].　$y_{zs}[n]=x[n]*h[n]$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{zs}^{(k)}(t) = \boxed{\sum_{k=0}^{M} b_k \delta^{(k)}(t)} * x(t)$$

即为 $h_1(t)$

§4.5 用方程描述的因果LTI系统的单位冲激响应

一. 两个系统级联的方法

$$\sum_{k=0}^{N} a_k h^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta^{(k)}(t) \qquad \sum_{k=0}^{N} a_k h[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]$$

$$h_1(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta^{(k)}(t) \qquad h_1[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]$$

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{N} a_k h_2^{(k)}(t) = \delta(t)\\ h_2^{(k)}(0_-)=0,\ k=0,1,\cdots N-1\end{cases} \qquad \begin{cases}\sum_{k=0}^{N} a_k h_2[n-k] = \delta[n]\\ h_2[-k]=0,\ k=1,2,\cdots N\end{cases}$$

$$h(t)=h_1(t)*h_2(t) \qquad h[n] = h_1[n]*h_2[n]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k h_2^{(k)}(t) * h_1(t) = \delta(t)*h_1(t) = h_1(t)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k h^{(k)}(t) = h_1(t)$$

$h_2^{(N)}(t) \sim \delta(t)$　　只看 t=0 时刻

只有最高阶微分含有 δ(t)

$h_2^{(N-1)}(t) \sim u(t)$　　其它阶都是常规函数

假设 $h_2^{(N-1)}(t) \sim \delta(t)$

则 $h_2^{(N)}(t) \sim \delta'(t)$

不符合

$$\int_{0-}^{0+} \sum_{k=0}^{N} a_k h_2^{(k)}(t)\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt = 1$$

$$a_N\left[h_2^{(N-1)}(0^+) - h_2^{(N-1)}(0^-)\right] = 1 \Rightarrow h_2^{(N-1)}(0^+) = \frac{1}{a_N},\quad h_2^{(k)}(0^+)=0 \quad k=0,1,\cdots N-2$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k h_2^{(k)}(t) = 0 & (t>0) \\ h_2^{(k)}(0^+) = 0,\ k=0,1,\dots N-2,\ h_2^{(N-1)}(0^+) = \frac{1}{a_N} \end{cases}$$

$h_2(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{-\lambda_i t}$ 代入 $h_2^{(k)}(0^+) = \dots$

求出 A_i

从而求出: $h_2(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{-\lambda_i t}$

离散时间 附加条件 $y[k]$ 可用递推得到

$$a_0 h_2[n] = \delta[n] - \sum_{k=1}^{N} a_k h_2[n-k]$$

$$h_2[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\delta[n] - \sum_{k=1}^{N} a_k h_2[n-k]\right\}$$

$h_2[0] = \frac{1}{a_0}$, 在实际计算中到此为止

再 ① $n>0$ 时 $\delta[n]=0$, $h_2[n] = \sum_{i=1}^{N} A_i \lambda_i^n$

② 再用 $h_2[0]$, $h_2[-1] = h_2[-2] \dots = 0$ 求出 A_i

③ $h_2[n] = \sum_{i=1}^{N} A_i \lambda_i^n u[n]$

例:

4.12(e) $y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] + \frac{1}{2}y[n-2] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

$$= x[n] + x[n] * u[n]$$

$$= x[n] * \{\delta[n] + u[n]\}$$

$$h_1[n] = \delta[n] + u[n]$$

$$\begin{cases} h_2[n] - \frac{3}{2}h_2[n-1] + \frac{1}{2}h_2[n-2] = \delta[n], & n \ge 0 \\ h_2[-1] = h_2[-2] = 0 \end{cases} \Rightarrow h_2[n] - \frac{3}{2}h_2[n-1] + \frac{1}{2}h_2[n-2] = 0,\ n>0$$

$2\lambda \quad -1$

$h_2[n]=\delta[n]+\frac{3}{2}h_2[n-1]-\frac{1}{2}h_2[n-2] \Rightarrow h_2[0]=1$ $\quad\lambda \quad -1$

$$\begin{cases} h_2[n]-\frac{3}{2}h_2[n-1]+\frac{1}{2}h_2[n-2]=0 & n>0 \\ h_2[0]=1,\ h_2[-1]=0 \end{cases}$$

$\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow$

$2\lambda^2-3\lambda+1=0 \quad (2\lambda-1)(\lambda-1)=0$

$\lambda=\frac{1}{2}$ 或 1

$$\Rightarrow h_2[n]=A+B\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \qquad \begin{cases} A+B=1 \\ A+2B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=2 \end{cases}$$

$h_2[n]=\left[2-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right]u[n] \qquad h_1[n]=\delta[n]+u[n]$

$$h[n]=h_2[n]*h_1[n]=2u[n]-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]+2(n+1)u[n]-\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}u[n]$$

$$=2(n+1)u[n]$$

$a^n u[n]*b^n u[n]=\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}u[n]$

课本P78

二. 两边系数匹配的方法

$$\sum_{k=0}^{N}a_k h^{(k)}(t)=\sum_{k=0}^{M}b_k \delta^{(k)}(t),\quad t\geq 0 \qquad ①$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N}a_k h^{(k)}(t)=0,\quad t>0$$

$$h(t)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{\lambda_i t}u(t)$$

$$h(t)=\begin{cases} \sum_{i=1}^{N}A_i e^{\lambda_i t}u(t), & N>M \\ \sum_{i=1}^{N}A_i e^{\lambda_i t}u(t)+\sum_{l=0}^{M-N}C_l\,\delta^{(l)}(t), & M\geq N \end{cases}$$

把 $h(t)$, $h'(t)\cdots h^{(N)}(t)$ 代入到方程①, 根据左右两边系数匹配确定 A_i、C_l

离散:

$$\sum_{k=0}^{N}a_k h[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_k\delta[n-k],\quad n\geq 0$$

$\Rightarrow n>M$ 时 $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{N}a_k h[n-k]=0$

$$h[n]=\sum_{i=1}^{N}A_i\lambda_i^n u[n]$$

$$\boxed{h[n] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} A_i \lambda_i^n u[n] & , N > M \text{ 时} \\ \sum_{i=1}^{N} A_i \lambda_i^n u[n] + \sum_{l=0}^{M-N} C_l \delta[n-l] & , M \geq N \text{ 时} \end{cases}}$$

例题：

4.11 (f) $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = \int_{-\infty}^{t} 2e^{-2(t-\tau)} x(\tau)\, d\tau$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-2(t-\tau)} u(t-\tau) x(\tau)\, d\tau$$

$$= x(t) * 2e^{-2t} u(t) \quad ①$$

两边求微分

$$y^{(3)}(t) + 4y^{(2)}(t) + 3y'(t) = x(t) * [\underbrace{2\delta(t)}_{= 2e^{-2t}\delta(t)} - 4e^{-2t} u(t)] \quad ②$$

① × 2 + ② ⇒

$$\boxed{y^{(3)}(t) + 6y''(t) + 11y'(t) + 6y(t) = 2x(t)} \Rightarrow$$

$$h^{(3)}(t) + 6h''(t) + 11h'(t) + 6h(t) = 2\delta(t)$$

$3 > 0$ $\quad \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

$$\therefore h(t) = Ae^{-t}u(t) + Be^{-2t}u(t) + Ce^{-3t}u(t)$$

$$h'(t) = (A+B+C)\delta(t) - Ae^{-t}u(t) - 2Be^{-2t}u(t) - 3Ce^{-3t}u(t)$$

$$h''(t) = (A+B+C)\delta'(t) - (A+2B+3C)\delta(t) + Ae^{-t}u(t) + 4Be^{-2t}u(t) + 9Ce^{-3t}u(t)$$

$$h'''(t) = \underline{(A+B+C)}\delta''(t) - \underline{(A+2B+3C)}\delta'(t) + (A+4B+9C)\delta(t) - Ae^{-t}u(t) - 8Be^{-2t}u(t) - 27Ce^{-3t}u(t)$$

代入 $h^{(3)}(t) + 6h''(t) + 11h'(t) + 6h(t) = 2\delta(t)$

$$\begin{cases} A+B+C = 0 \\ A+2B+3C = 0 \\ A+4B+9C = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C = 1 \\ B = -2 \\ A = 1 \end{matrix}$$

4.16 (2)

先求零输入响应

$$\begin{cases} y_{zi}[n] + \frac{3}{2}y_{zi}[n-1] + \frac{1}{2}y_{zi}[n-2] = 0 \\ y_{zi}[-1] = 2, \quad y_{zi}[-2] = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow y_{zi}[n] = A(-1)^n + B(-\frac{1}{2})^n, \ n \geq 0$

$-A-2B = 2$
$A+4B = 2$
$\Rightarrow$ $A = -6$, $B = 2$

$y_{zi}[n] = -6(-1)^n u[n] + 2(-\frac{1}{2})^n u[n]$ 最后再带上 u[n]

求 h[n]:

$h[n] + \frac{3}{2}h[n-1] + \frac{1}{2}h[n-2] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$ ② $n \geq 0$

$h[n] + \frac{3}{2}h[n-1] + \frac{1}{2}h[n-2] = 0$ ①, $n \geq 2$

$h[n] = \underbrace{\{C(-1)^n + D(-\frac{1}{2})^n\}}\, u[n], \ \underbrace{n \geq 2}$ ($M>N$, 不用再加 $\sum_{l=0}^{M-N} C_l\delta[n-l]$)

C.D 取 ∀ 值，对于 ∀ n≥0 都符合①，最后再取特殊的 C.D 满足②

$= C\delta[n] - C\delta[n-1] + C\delta[n-2] - \cdots\cdots + D\delta[n] - \frac{1}{2}D\delta[n-1] + D\frac{1}{4}\delta[n-2] \cdots$ ①

$h[n-1] = (C+D)\delta[n-1] + \_\_\ \delta[n-2] + \cdots$ ②

$h[n-2] = (C+D)\delta[n-2] + \cdots\cdots$ ③

①②③代入原方程 匹配两边

$(C+D) = 1$

$(-C-\frac{1}{2}D) + \frac{3}{2}(C+D) = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} C = 3 \\ D = -2 \end{cases}$

① $h[n] = 3(-1)^n u[n] - 2(-\frac{1}{2})^n u[n]$

$y_{zs}[n] = x[n] * h[n] = \{3(-1)^n u[n] - 2(-\frac{1}{2})^n u[n]\} * u[n]$

$= 3\frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)}u[n] - 2\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n+1}}{1+\frac{1}{2}}u[n]$

$= \frac{1}{6}u[n] - \frac{3}{2}(-1)^{n+1}u[n] + \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^{n+1}u[n]$

另一种方法求 $h[n]$

$$h_1[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

$$\begin{cases} h_2[n] + \frac{3}{2}h_2[n-1] + \frac{1}{2}h_2[n-2] = \delta[n] \\ h_2[-1] = h_2[-2] = 0 \end{cases} \Rightarrow h_2[0] = 1$$

$n>0$ 时

$$\begin{cases} h_2[n] + \frac{3}{2}h_2[n-1] + \frac{1}{2}h_2[n-2] = 0 \\ h_2[0] = 1, \quad h_2[-1] = 0 \end{cases}$$

$$h_2[n] = A(-1)^n + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$h_2[0] = 1, \quad h_2[-1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$h_2[n] = \left[2(-1)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] \cdot u[n]$$

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

$$= \left(\delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]\right) * \left[2(-1)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$$

$$= \left[2(-1)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n] - \left[-(-1)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n-1]$$

§ 4.5.2 FIR 和 IIR（离散时间）

对于离散时间系统，如果其单位冲激响应是有限点，则为FIR，否则为IIR

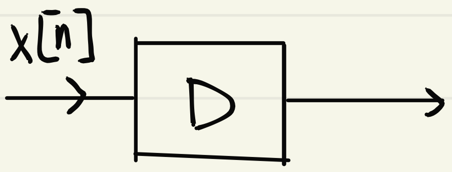
一般而言，FIR系统无递归项

即 $\underbrace{y[n]}_{\text{不是 } y[n]+\frac{1}{3}y[n-1]\cdots} = \sum_{i=1}^{n} A_i x[n-i]$

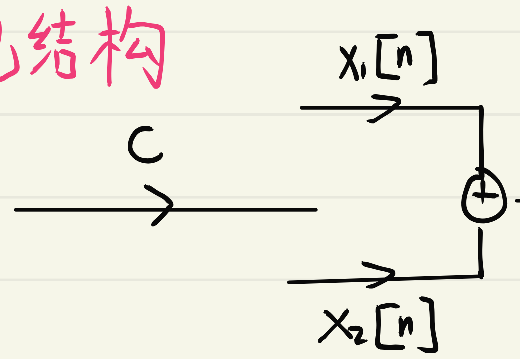
4.6 系统仿真及用方程描述系统的直接实现结构

只能针对因果LTI系统

§ 4.6.1 离散时间差分方程的实现结构

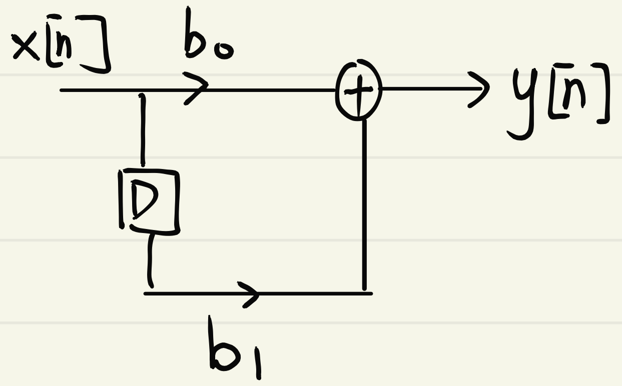


$y[n] = x[n-1]$



$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$

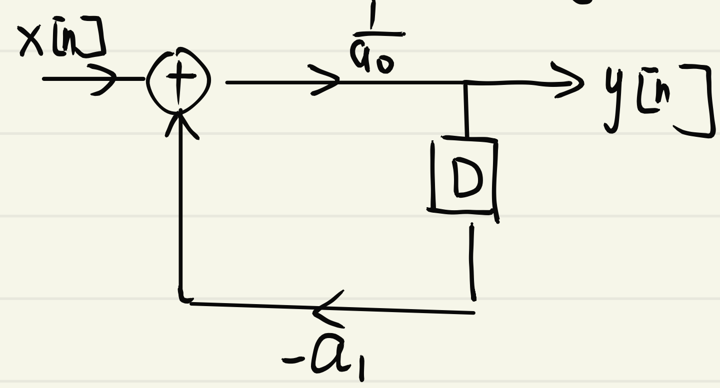
$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$



$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = x[n]$

$\Downarrow$

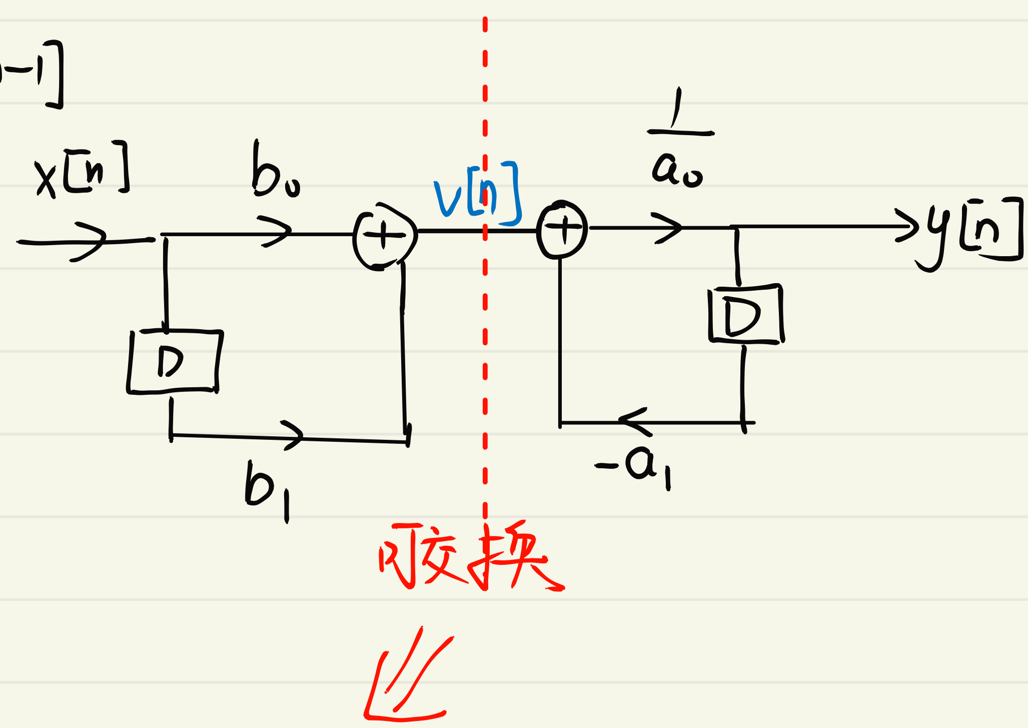
$y[n] = \frac{1}{a_0}\{x[n] - a_1 y[n-1]\}$

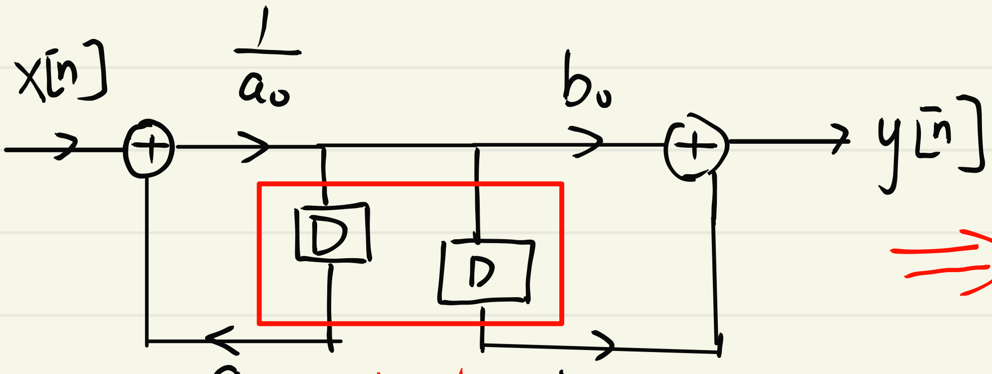


$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$

$v[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$

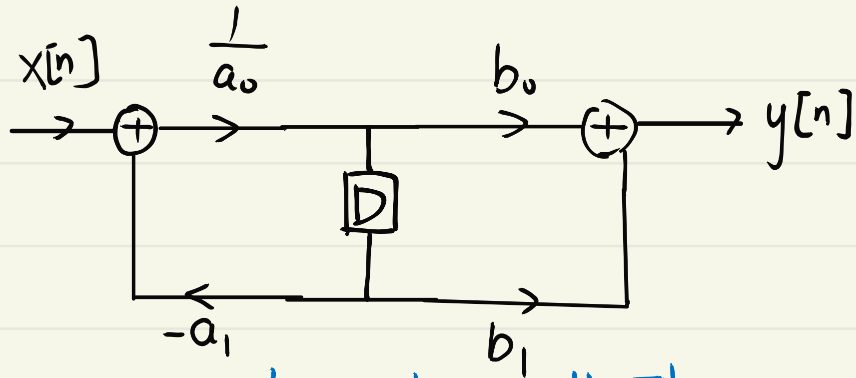
$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = v[n]$





可合并为1个

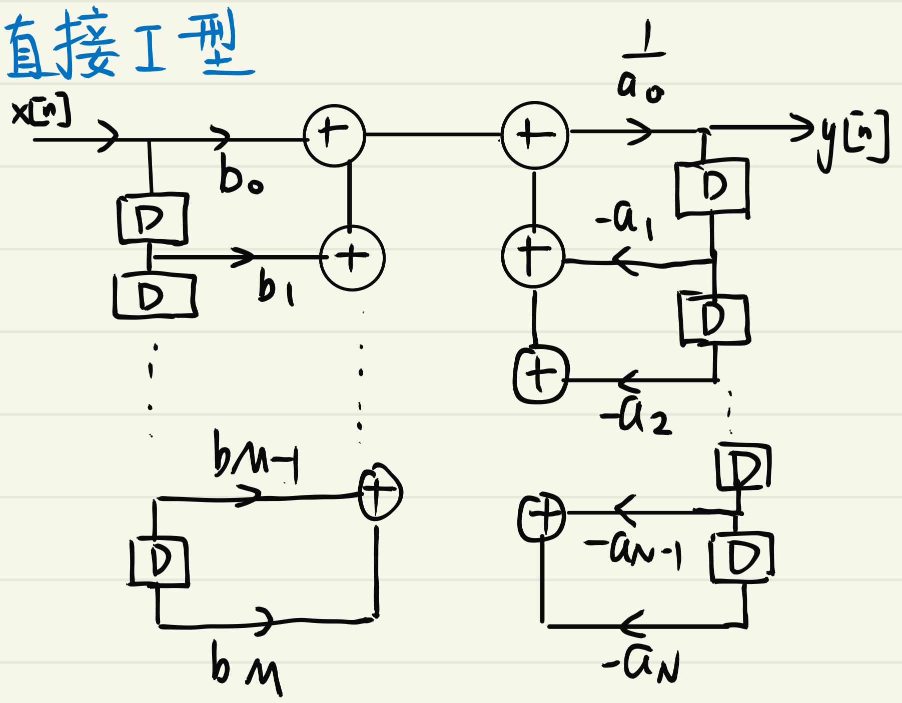
直接I型

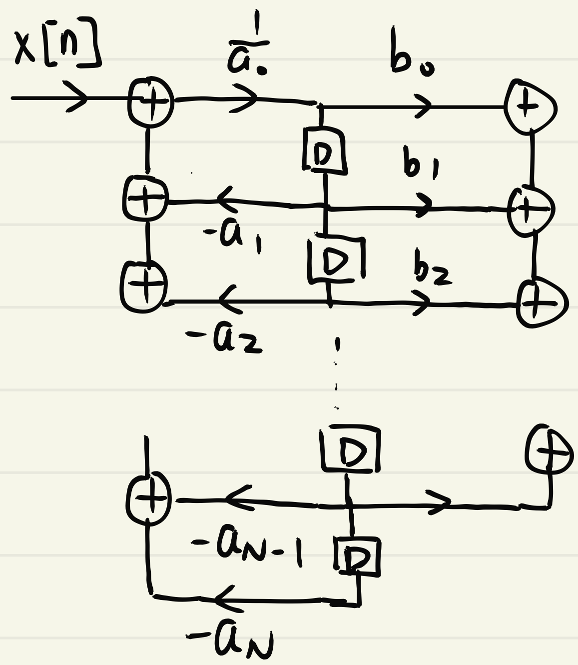


直接II型、规范型

推广到高阶：因果LTI：$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$

直接I型





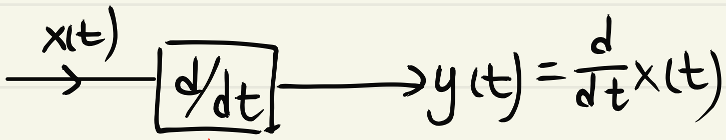
$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$$

§4.6.2 连续时间的因果LTI系统的实现

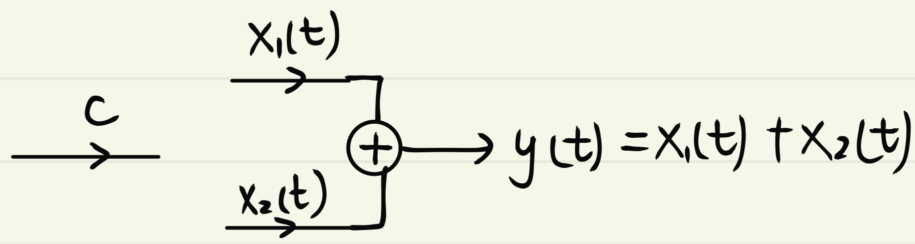
$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t)$. 如果N<M时，h(t)中会含有 $\delta(t)$ 或 $\delta^{(k)}(t)$ 不稳定

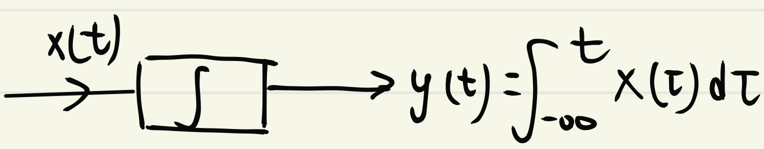
只能 $N \geq M$

$$h(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{\lambda_i t} u(t) + C_L \delta(t)$$



不稳定





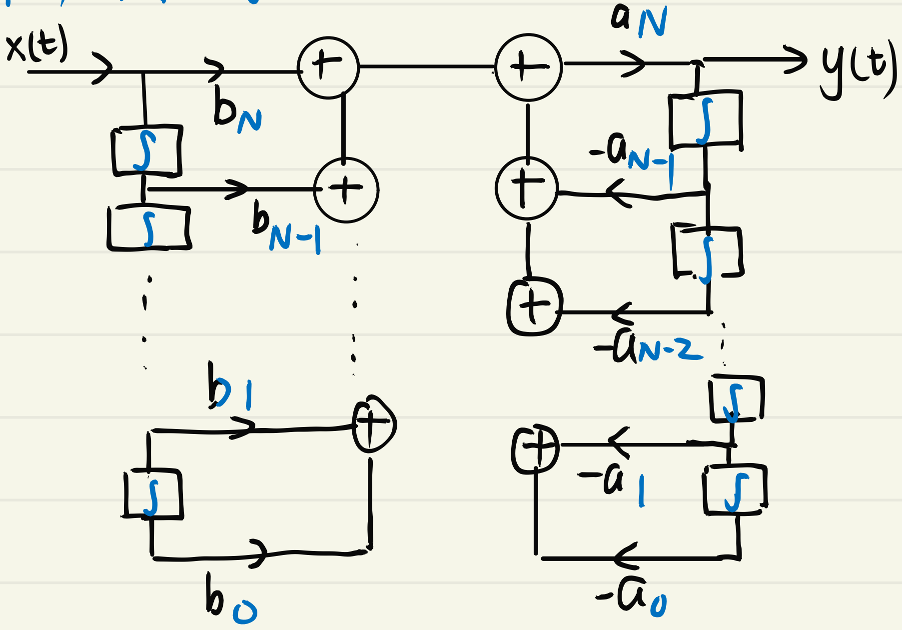
限制输入不含直流分量，工程上∫是稳定的

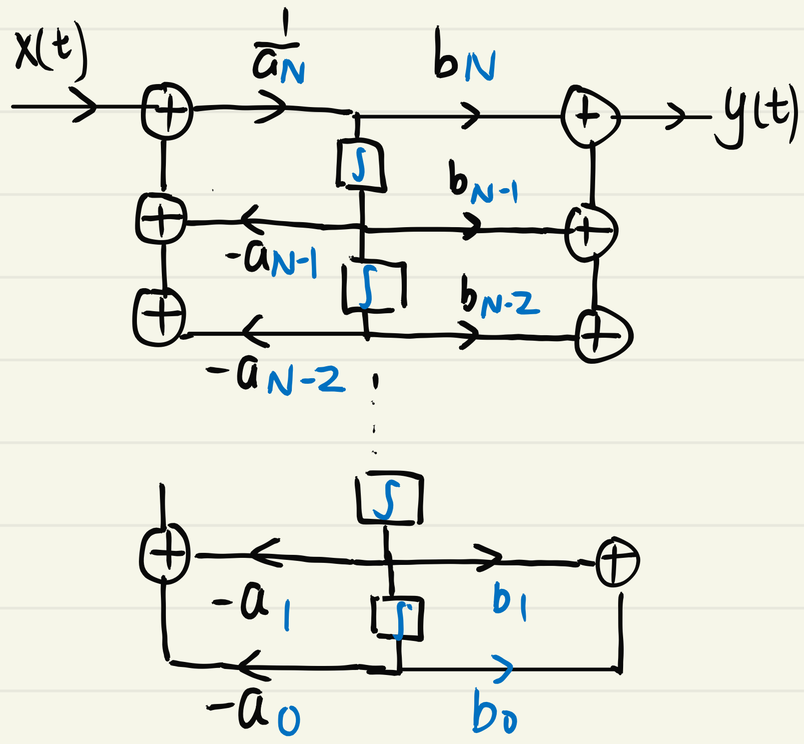
方程两边积N次分

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k-N)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k-N)}(t)$$

$$a_N y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k-N)}(t) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y^{(k-N)}(t)$$

不妨 $M=N$





例：用方程描述的因果系统 $\begin{cases} y''(t)+4y'(t)+3y(t)=x'(t)+3x(t) \\ y(0_-)=1,\ y'(0_-)=3 \end{cases}$

① 求其在 $x(t)=e^{-3t}u(t)$ 时 $y_{zi}(t)$. $y_{zs}(t)$

② 对用方程描述的因果LTI系统，试用最少单元实现

① $\begin{cases} y_{zi}''(t)+4y_{zi}'(t)+3y_{zi}(t)=0 \\ y_{zi}(0_-)=1 \quad y_{zi}'(0_-)=3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $y_{zi}(t)=Ae^{-t}+Be^{-3t} \quad (t>0)$

$\begin{cases} A+B=1 \\ -A-3B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-2 \end{cases} \Rightarrow y_{zi}(t)=[3e^{-t}-2e^{-3t}]u(t)$

$h''(t)+4h'(t)+3h(t)=\delta'(t)+3\delta(t)$

$h(t)=(ce^{-t}+De^{-3t})u(t)$

$h'(t)=(c+D)\delta(t)-(ce^{-t}+3De^{-3t})u(t)$

$h''(t)=(C+D)\delta'(t)-(ce^{-t}+3De^{-3t})\delta(t)+(ce^{-t}+9De^{-3t})u(t)$

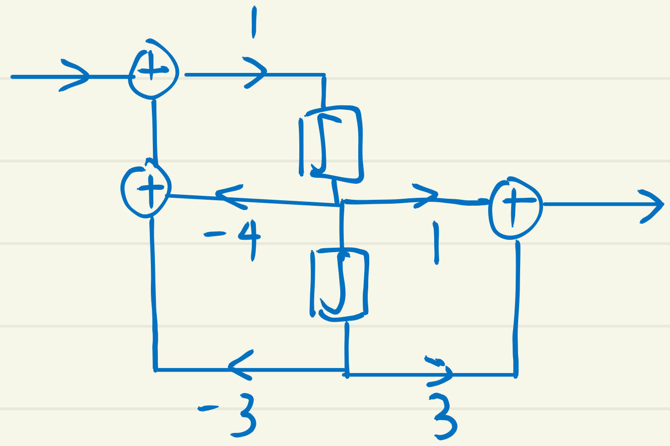
$\Rightarrow \begin{cases} C+D=1 \\ 4(C+D)-(C+3D)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=0 \\ C=1 \end{cases} \Rightarrow h(t)=e^{-t}u(t)$

$$y_{zs}(t)=e^{-t}u(t)*e^{-3t}u(t)$$

$$=\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{3-1}u(t)=\frac{1}{2}[e^{-t}-e^{-3t}]u(t)$$

② $y(t) = x^{-1}(t) + 3x^{-2}(t) - 4y^{-1}(t) - 3y^{-2}(t)$

$\Rightarrow$



例2 用方程描述的因果系统

卷积运算补充

$$\left[e^{-at}u(t)\right] * \left[e^{-at}u(t)\right] = te^{-at}u(t)$$

$$\left[a^{n}u[n]\right] * \left[a^{n}u[n]\right] = (n+1)\,a^{n}u[n]$$

$$\left[e^{-at}u(t)\right] * \left[e^{-bt}u(t)\right] = \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}u(t)$$

$$\left[a^{n}u[n]\right] * \left[b^{n}u[n]\right] = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}u[n]$$

第五章 信号与系统的变换域分析

傅里叶级数 ⟶ 傅里叶变换　L氏变换　Z变换

总体分析的思想：
①找到一类正交基，任何的信号都能展开到这组基信号上。
②系统对基信号的响应足够简单

§5.2 LTI系统对复指数信号的响应

一、对复指数信号的响应

$$e^{st} \xrightarrow{h(t)} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}\, d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = H(s)\cdot e^{st}$$

定义 $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$ ⟵ $h(t)$的L氏变换

$$z^{n} \xrightarrow{h[n]} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, z^{n-k} = z^{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\cdot z^{-k} = H(z)\cdot z^{n}$$

定义 $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, z^{-k}$ ⟵ $h[n]$的Z变换

$H(s)$、$H(z)$ 又叫系统函数

对于纯虚的复指数函数 $e^{j\omega t}$、$e^{j\Omega n}$

$$e^{j\omega t} \xrightarrow{h(t)} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{j\omega(t-\tau)}\, d\tau = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = H(\omega)\cdot e^{j\omega t}$$

定义：$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$ ⟵ 连续时间傅里叶变换

$$e^{j\Omega n} \xrightarrow{h[n]} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\cdot e^{j\Omega(n-k)} = e^{j\Omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\Omega k} = H(\Omega)\cdot e^{j\Omega n}$$

定义 $H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\Omega k}$ ⟵ 离散时间傅里叶变换

$Av=\lambda v$ 线性代数

A → 满秩矩阵　λ → 特征值　v → 特征矢量

A: LTI系统　v: 特征函数　λ: 放大倍数

① $h(t)=\delta(t)$

$$\psi(t)\xrightarrow{\delta(t)}\psi(t)$$

$\therefore \forall$ 函数都是特征函数

特征值为1

② $h(t)=\delta(t-T)$

$$\psi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\xrightarrow{\delta(t-T)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-(k+1)T)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\psi(t)$$

$\psi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\delta(t-kT)$ 时 $\xrightarrow{\delta(t-T)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\delta(t-(k+1)T)$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\delta(t-mT)=2\psi(t)$$

③ $h(t)=h(-t)$

$$\cos\omega t\xrightarrow{h(t)}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\cos(\omega(t-\tau))\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\cos\omega t\cdot\cos\omega\tau\,d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\sin\omega t\cdot\sin\omega\tau\,d\tau$$

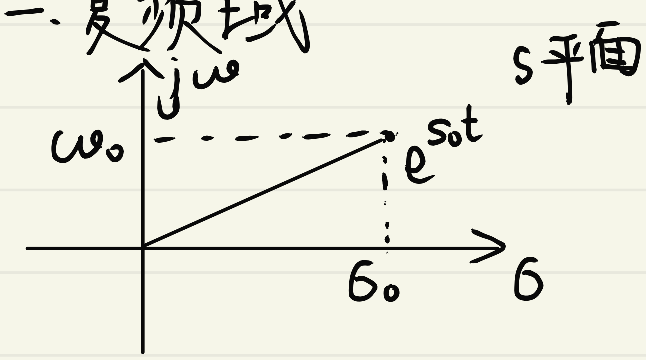
$$=\cos\omega t\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau+\sin\omega t\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau}_{0}$$

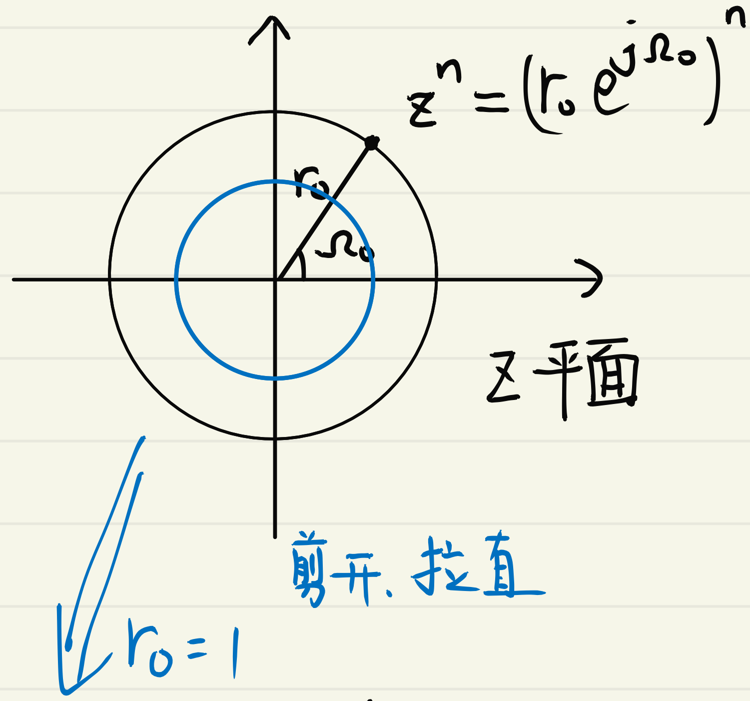
奇函数

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau\cdot\cos\omega t$$

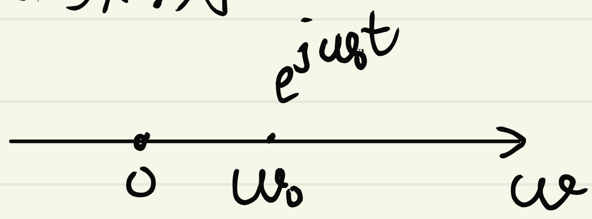
§5.2.2 频域和复频域

一、复频域

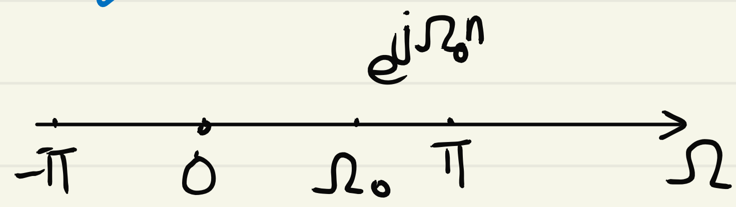




二、频域



连续时间的频域



$e^{j\pi n}=e^{j3\pi n}=(-1)^n$

离散时间频域 $[-\pi,\pi]$ 是一个主区间

其它都是以 2π 周期重复的

§5.3 周期信号的频域表示法、连续和离散傅里叶级数

§5.3.1 定义

CFS：对于周期为T，$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ 的 $\tilde{x}(t)$

$e^{jk\omega_0 t}$，$k=0,\pm1,\cdots$

构成了T的一组完备正交基

分析公式（正变换）$F_k=\frac{1}{T}\int_{<T>}\tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$

合成公式（反变换）$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k e^{jk\omega_0 t}$

$$F_k=\frac{\langle\tilde{x}(t),e^{jk\omega_0 t}\rangle}{\langle e^{jk\omega_0 t},e^{jk\omega_0 t}\rangle}$$

→ 内积

$\langle e^{jk\omega_0 t},e^{jk\omega_0 t}\rangle \rightarrow =\int_{<T>}e^{jk\omega_0 t}\,e^{-jk\omega_0 t}dt=T$

$$=\frac{1}{T}\int_{<T>}\tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

DFS：对于周期是 N，$\Omega_0=\frac{2\pi}{N}$ 的 $\tilde{x}[n]$

正变换（分析公式）
$$\tilde{F}_k=\frac{1}{N}\sum_{n\in\langle N\rangle}\tilde{x}[n]e^{-jk\Omega_0 n}$$

反变换（合成公式）
$$\tilde{x}[n]=\sum_{k\in\langle N\rangle}\tilde{F}_k\cdot e^{jk\Omega_0 n}$$

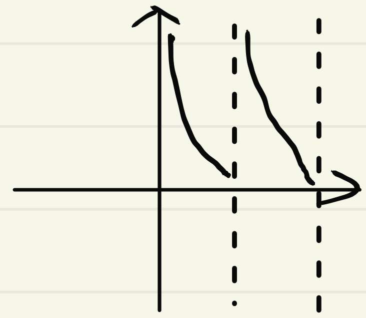
只有N个基矢量 $e^{jk\Omega_0 n}$ 是独立的

$k=0,1,\cdots N-1$

§ 5.3.2 傅里叶级数收敛：

三个狄利赫里条件

① 在一个周期里，满足模可积和模可和



反例

② 在一个周期里，只有有限个极大/极小值

③ 在一个周期里，只有有限个不连续阶跃点

§5.3.3 周期信号的频谱

例1：求 $\tilde{x}(t)=\cos\frac{\pi}{7}t+\sin\frac{3\pi}{7}t$ 的CFS系数

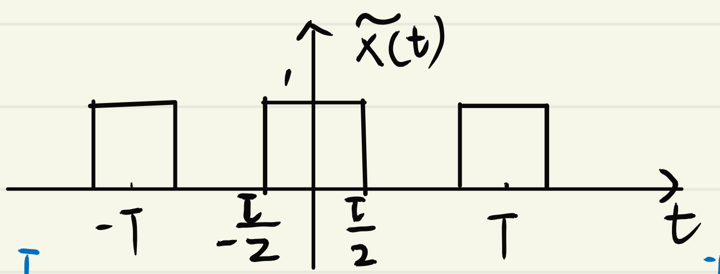
$\omega_0=\frac{\pi}{7}$

$$\tilde{x}(t)=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{7}t}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{7}t}+\frac{1}{2j}e^{j\frac{3\pi}{7}t}-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{3\pi}{7}t}$$

直接两边系数匹配

$T=14\quad \omega_0=\frac{\pi}{7}\quad F_1=\frac{1}{2},\ F_{-1}=\frac{1}{2},\ F_3=\frac{1}{2j},\ F_{-3}=-\frac{1}{2j}$

例2：求



求 $\tilde{x}(t)$ 的CFS系数

$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

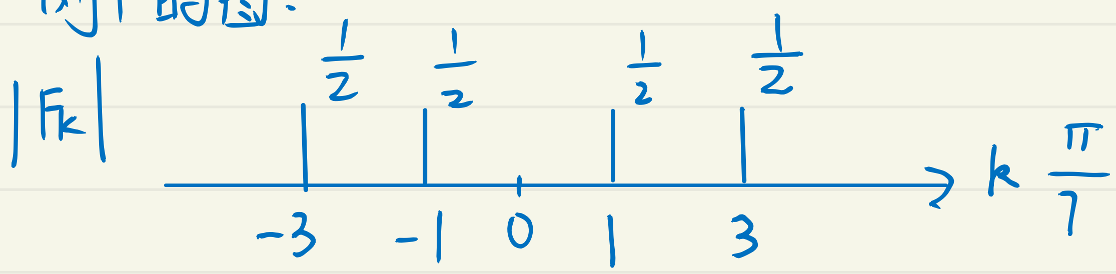
$$F_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}1\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\cdot\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{1}{T}\frac{e^{-jk\omega_0\frac{\tau}{2}}-e^{jk\omega_0\frac{\tau}{2}}}{-jk\omega_0}$$

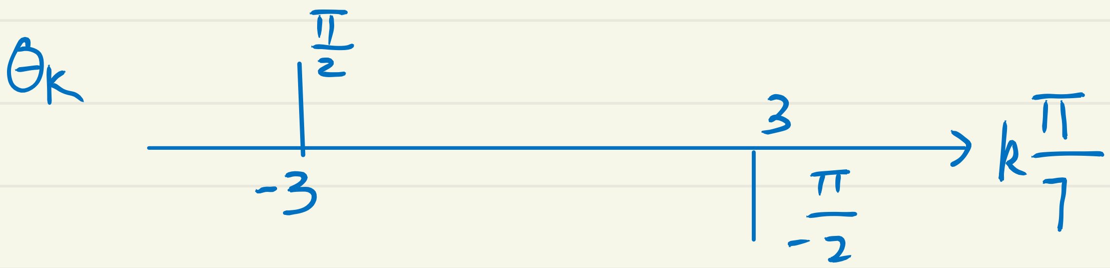
$$=\frac{\tau}{T}\cdot\frac{\sin k\omega_0\frac{\tau}{2}}{k\omega_0\cdot\frac{\tau}{2}}$$

定义 $Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$ (抽样函数) $= \frac{\tau}{T} Sa \frac{k\omega_0\tau}{2}$

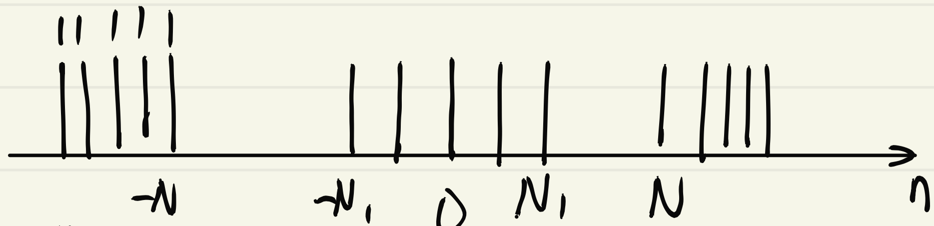
$$F_k = \underset{\text{幅度谱}}{|F_k|}\, e^{\overset{\text{相位谱}}{j\theta_k}}$$

e.g 例1 的图:





例3. 求



$$\tilde{F}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} \tilde{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} e^{jN_1\Omega_0 k} \sum_{n=0}^{2N_1} e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$= \frac{1}{N} e^{jN_1\Omega_0 k} \frac{1-e^{-jk\Omega_0(2N_1+1)}}{1-e^{-jk\Omega_0}}$$

$$= \frac{1}{N} \cancel{e^{jN_1\Omega_0 k}} \cdot \frac{\cancel{e^{-j\frac{2N_1+1}{2}k\Omega_0}}\left[e^{j\frac{2N_1+1}{2}k\Omega_0} - e^{-\frac{2N_1+1}{2}k\Omega_0}\right]}{\cancel{e^{-j\frac{k\Omega_0}{2}}}\left[e^{j\frac{k\Omega_0}{2}} - e^{-j\frac{k\Omega_0}{2}}\right]}$$

$$= \frac{1}{N}\, \frac{\sin\frac{2N_1+1}{2}k\Omega_0}{\sin\frac{k\Omega_0}{2}}$$

定义 $sad(m, x) = \frac{\sin mx}{\sin x}$

总结：

① CFS和DFS都是离散的谱线，只在ω_0、Ω_0的整数倍上有值

② CFS一般有无穷根谱线，DFS有无穷根谱线，但是只有N根是独立的，是以N为周期的

③ 一般信号都是实函数，其求出的幅度谱是偶函数，相位谱是奇函数

§5.3.4 LTI系统对周期信号的响应

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k e^{jk\omega_0 t}$$

① 把周期函数展开成基信号的线性组合

② $e^{jk\omega_0 t}\xrightarrow{h(t)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{jk\omega_0(t-\tau)}\cdot h(\tau)\,d\tau=e^{jk\omega_0 t}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\cdot e^{-jk\omega_0\tau}\cdot d\tau$

$$=H(k\omega_0)\cdot e^{jk\omega_0 t}$$

③ $\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k e^{jk\omega_0 t}\xrightarrow{h(t)}\tilde{y}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k H(k\omega_0)\,e^{jk\omega_0 t}$

对偶到 $\tilde{x}[n]=\sum_{k\in\langle N\rangle}\tilde{F}_k\cdot e^{jk\Omega_0 n}$

$$e^{jk\Omega_0 n}\xrightarrow{h[n]}\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[m]\,e^{jk\Omega_0(n-m)}=e^{jk\Omega_0 n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[m]\,e^{-jk\Omega_0 m}$$

$$=H(k\Omega_0)\cdot e^{jk\Omega_0 n}$$

$$\tilde{x}[n]=\sum_{k\in\langle N\rangle}\tilde{F}_k e^{jk\Omega_0 n}\xrightarrow{h[n]}y[n]=\sum_{k\in\langle N\rangle}\tilde{F}_k H(k\Omega_0)\,e^{jk\Omega_0 n}$$

课后 P213 5.12

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{|k|} e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}, \quad 0<a<1$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt$$

周期函数 $P=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}|x(t)|^2\,dt$

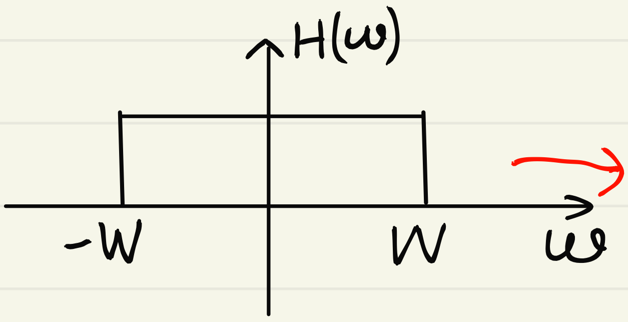
$$P=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}\tilde{x}(t)\,\tilde{x}(t)^*\cdot dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{|k|} e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{|k|}\cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{T})t}\cdot dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} a^{|2m|}+\underbrace{\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0}}\beta_m e^{jm(\frac{2\pi}{T})t}}_{\text{积分出来为0}}\right\}dt=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a^{|2m|}$$

$$\frac{1}{jm(\frac{2\pi}{T})}\beta_m e^{jm(\frac{2\pi}{T})t}\Big|_{\langle T\rangle}=0$$

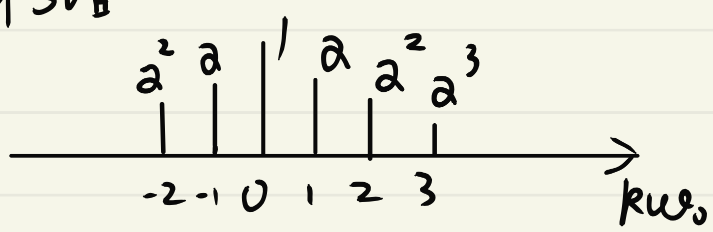
$$P_x=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a^{|2m|}=\sum_{m=0}^{\infty}a^{2m}+\sum_{m=1}^{\infty}a^{2m}=\frac{1}{1-a^2}+\frac{a^2}{1-a^2}=\frac{1+a^2}{1-a^2}$$



→ 理想低通滤波器

此处不是W，∵ H(ω)中横坐标不是$k\omega_0$

CFS谱



$$\Rightarrow \tilde{y}(t)=\sum_{k=-M}^{M}a^{|k|}\cdot 1\cdot e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$

$$P_y=\sum_{m=-M}^{M}a^{|2m|}$$

$$=\sum_{m=0}^{M}a^{2m}+\sum_{m=1}^{M}a^{2m}=\frac{1-a^{2(M+1)}+a^2(1-a^{2M})}{1-a^2}$$

$$\frac{1-a^{2(M+1)}+a^2-a^{2(M+1)}}{1-a^2}\geq 0.9\,\frac{1+a^2}{1-a^2}$$

$$a^{2(M+1)}\leq 0.05(a^2+1)\quad\Rightarrow M\geq\frac{1}{2}\log_a[0.05(1+a^2)]-1$$

再M取整

$W\geq M\frac{2\pi}{T}$ 从而求出 W

§5.4 非周期函数和序列的频域表示法

连续和离散时间的傅里叶变换

§5.4.1 CFT & DTFT

CFT: $$\begin{cases} F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt & \leftarrow \text{正变换、分析公式} \\ f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega & \leftarrow \text{反变换、合成公式} \end{cases}$$

DTFT: $$\begin{cases} \tilde{F}(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\, e^{-j\Omega n} \\ f[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \tilde{F}(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega \end{cases}$$

§5.4.2 收敛

① 在整个时域上，满足模可积/和

② 在有限区间里只有有限个极大/极小值

③ 在有限时间里只有有限个不连续间断点

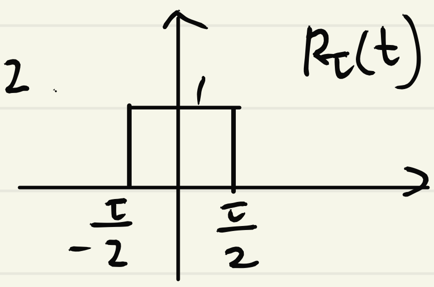
§5.4.3

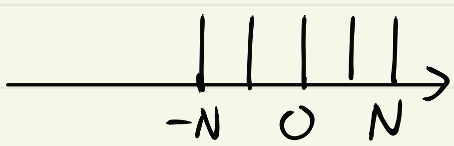
例1. 求 $\delta(t)$、$\delta[n]$ 的 CFT/DTFT

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt=1$$

$$\mathcal{F}\{\delta[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]\, e^{-j\Omega n}=1$$

例2. $R_\tau(t)$ 的 CFT



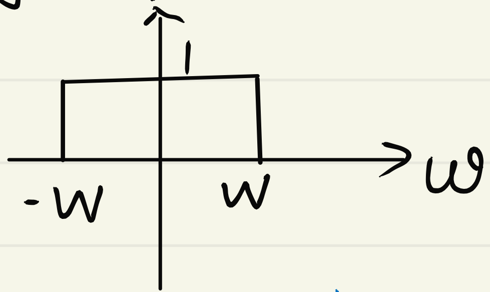


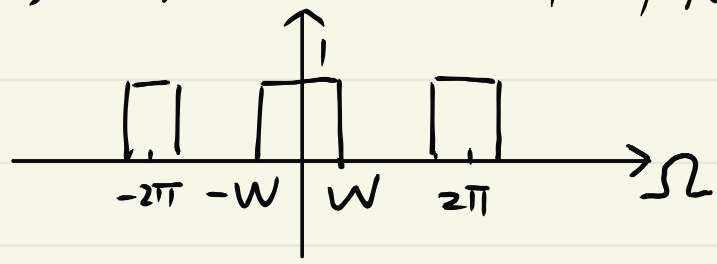
$R_{2N+1}[n]$ 的 DTFT

$$R_\tau(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} R_\tau(t)\, e^{-j\omega t}\, dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t}\, dt=\frac{e^{-j\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}}{-j\omega}=\tau\cdot Sa\frac{\omega\tau}{2}$$

$$R_{2N+1}[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{2N+1}[n]\, e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-N}^{N} e^{-j\Omega n}=\frac{\sin\frac{(2N+1)}{2}\Omega}{\sin\frac{\Omega}{2}}$$

例4. 求 $R_{2W}(\omega)$ 和 $\tilde{R}_{2W}(\Omega)$ 对应的时域函数/序列





$$R_{2W}(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{2W}(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega t}}{jt}\Big|_{-W}^{W}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{2j\sin Wt}{jt}$$

$$= \frac{W}{\pi}Sa(Wt)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}^{-1}\{\tilde{R}_{2W}(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} \tilde{R}_{2W}(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{W}{\pi}Sa(Wn)$$

§5.4.4 非周期信号的频谱及LTI系统的频率响应

一. 信号的频谱

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{X(\omega)d\omega}{2\pi}\cdot e^{j\omega t}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>}\tilde{X}(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega = \int_{<2\pi>}\frac{\tilde{X}(\Omega)d\Omega}{2\pi}e^{j\Omega n}$$

$X(\omega)$、$\tilde{X}(\Omega)$：信号的频谱密度函数，简称频谱

$$X(\omega) = |X(\omega)|\cdot e^{j\theta(\omega)}$$

$$\tilde{X}(\Omega) = |\tilde{X}(\Omega)|e^{j\tilde{\theta}(\Omega)}$$

相位谱

幅度谱

① 非周期信号的频谱是一个连续谱

② 对于DTFT而言，它永远是 2π 为周期的周期函数，CFT一般是非周期的

时域上：CFS、DFS是周期的，DFS是以N ($N\Omega_0$) 为周期的

在时域上，如果是离散的，则频域上是周期的

在时域上，如果是周期的，则频域上是离散的

二、LTI系统的频率响应

$$h(t) \xrightarrow{CFT} H(\omega)$$
$$h[n] \xrightarrow{DTFT} \tilde{H}(\Omega)$$
LTI系统的频率响应

$$e^{j\omega t} \xrightarrow{h(t)} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{j\omega(t-\tau)}\, d\tau = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{j\omega\tau}\, d\tau$$
$$= H(\omega)\cdot e^{j\omega t}$$

$$e^{j\Omega n} \xrightarrow{h[n]} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{j\Omega(n-k)} = e^{j\Omega n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\Omega k}$$
$$= \tilde{H}(\Omega)\, e^{j\Omega n}$$

$$H(\omega) = |H(\omega)|\, e^{j\varphi(\omega)}$$
$$\tilde{H}(\Omega) = |\tilde{H}(\Omega)|\, e^{j\tilde{\varphi}(\Omega)}$$
相频响应

幅频响应

三、信号输入LTI系统

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(\omega)\, d\omega}{2\pi}\cdot e^{j\omega t} \xrightarrow{LTI}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\omega)\, d\omega}{2\pi} H(\omega)\, e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega)\cdot e^{j\omega t}\cdot d\omega$$
$$= y(t)$$

定义 $Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \tilde{X}(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega = \int_{\langle 2\pi\rangle} \frac{\tilde{X}(\Omega)\, d\Omega}{2\pi}\, e^{j\Omega n} \xrightarrow{LTI}$$
$$= \int_{\langle 2\pi\rangle} \frac{\tilde{X}(\Omega)\, d\Omega}{2\pi}\, \tilde{H}(\Omega)\, e^{j\Omega n} = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \tilde{X}(\Omega)\tilde{H}(\Omega)\, e^{j\Omega n}\cdot d\Omega$$
$$= y[n]$$

定义 $\tilde{Y}(\Omega) = \tilde{X}(\Omega)\, \tilde{H}(\Omega)$