2012–2013 第二学期概率论期末考试试卷

一. 判断选择题 (每题 3 分,共 30 分,答题请写在试卷上):

1. 设 A,B,C 为三个事件,则事件 $\overline{ABC}$ 表示的是________.

(A) A,B,C 不同时发生　　(B) A,B,C 中至少发生一个

(C) A,B,C 中至多发生一个　　(D) A,B,C 至少发生两个

2. 随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,且关于 y 的一元二次方程 $y^2 + 4y + X = 0$ 无实根的概率为 0.5,则 $\mu =$________.

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

3. 在数字 1,2,3,4,5 中不放回地随机连取两个数,每次一个数. 则在第一次取出偶数的条件下,第二次取出奇数的概率为________.

(A) 1/2　　(B) 3/4　　(C) 1/4　　(D) 1/3

4. 设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 独立同分布于标准正态分布,令 $T = a(2X_1 - X_2)^2 + b(X_3 + X_4)^2$. 则 $(a,b) =$________ 时候 T 服从自由度为 2 的卡方分布.

(A) $(0, \frac{1}{2})$　　(B) $(\frac{1}{5}, \frac{1}{2})$　　(C) $(\frac{1}{5}, 0)$　　(D) $(1, \frac{1}{2})$

5. 设随机变量 X, Y 的方差均为 σ^2,且两者的相关系数为 -0.5,则使得 $Z = \pi X + (1-\pi)Y$ 的方差最小的 π 是________.

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{1}{4}$　　(D) $\frac{1}{5}$

6. 设 $X_1, \ldots, X_n$ 为来自某个存在期望 μ 和方差 σ^2 的总体的一组样本, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 分别为样本均值和样本方差,则下述错误的是________.

(A) $\bar{X}$ 具有渐近正态性　　(B) S_n^2 为 σ^2 的无偏估计

(C) $\bar{X}$ 为 μ 的无偏估计　　(D) $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S_n$ 服从 t_{n-1} 分布

7. 设参数 θ 的 95% 置信区间在某组样本值下为 $[1.2, 2.2]$,则下述正确的是________.

(A) 区间 $[1.2, 2.2]$ 包含 θ 的概率为 95%

(B) 区间 $[1.2, 2.2]$ 包含 θ 的概率为 5%

(C) 区间 $[1.2, 2.2]$ 要么包含 θ 要么不包含 θ

(D) 以上都不对

8. 关于假设检验中检验方法的一类和二类两种错误,下述错误的是________.

(A) 两类错误不可避免

(B) 固定样本量时两类错误不可能同时很小

(C) 有可能同时犯一类和二类错误

(D) 限制第一类错误概率的原则是假设检验理论中的通用做法

9. 假设总体 $X \sim N(\mu, 1)$,其均值 μ 的 95% 置信区间为 $[0.22, 1.10]$,则概率 $P(X \le 0)$ 的 95% 置信区间为________.

(A) $[\Phi(0.22), \Phi(1.10)]$ (B) $[1-\Phi(1.10), 1-\Phi(0.22)]$

(C) $[0.22, 1.10]$ (D) $[0, \Phi(1.10)]$

10. $X_1, \ldots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的样本,假设检验问题 $H_0: \mu = 0 \leftrightarrow H_1: \mu = 1$ 的 0.05 水平检验为 $\sqrt{n}\bar{X} > 1.645$,若要求该检验犯二型错误的概率也不超过 0.05,则样本量 n 至少为________.

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

二.(15 分) 有甲乙两只口袋,甲袋中有 5 只白球和 2 只黑球,乙袋中有 4 只白球 5 只黑球. 先从甲袋中任取两球放入乙袋,然后再从乙袋中任取一球. 试

(1) 求从乙袋中取出的球为白球的概率.

(2) 若已知从乙袋中取出的球为白球,求从甲袋中取的两只球中有白色球的概率。

三.(15 分) 设随机变量 Y 的密度函数为 $f_Y(y) = 4y^3 I(0 < y < 1)$,随机变量 X 在给定 $Y = y$ $(0 < y < 1)$ 时服从均匀分布 $U(0, y)$. 试

(1) 求随机变量 X 的边际密度.

(2) 求 X 和 Y 的相关系数.

四.(20 分) 假设总体 X 的概率分布为 $X_1, \ldots, X_n$ 为从该总体中抽取的一组简单样本,则

X	0	1	2
P	p	$1-2p$	p

(1) 据此给出参数 p 的矩估计量 $\hat{p}_1$ 和极大似然估计量 $\hat{p}_2$.

(2) $\hat{p}_1$ 和 $\hat{p}_2$ 是否为无偏估计？何者更有效？

(3) 若 $n=100$，且一组样本值中统计发现其中等于 0 的有 23 个，等于 1 的有 53 个，等于 2 的有 24 个. 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，利用 $\hat{p}_2$ 和拟合优度检验方法，我们能否认为"该组样本来自于总体 X"？

五.(20 分) 假设某工厂产品的某个指标服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 均未知. 现从该厂某批产品中随机抽取了 50 件产品测得该指标值的平均值为 89.70 和样本标准差为 1.09. 据此

(1) 能否认为该批产品该指标的平均值为 $90(\alpha=0.05)$.

(2) 能否认为该批产品该指标的标准差不超过 $1(\alpha=0.05)$.

(3) 给出该批产品此指标均值的 95% 置信区间，并与 (1) 中假设检验结果比较，能得出什么结论？

一.(30 分, 每题 3 分)

1. A　2. C　3. B　4. B　5. A　6. D　7. C　8. C　9. B　10. C

二.(15 分)(1) $A=$ 从乙袋中取出白球, B_i 分别表示从甲袋中取出两只球中有 i 个白球 $(i=0,1,2)$, 则由全概率公式有

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A|B_0)P(B_0)+P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)\\&=\frac{4}{11}\cdot\frac{2}{42}+\frac{5}{11}\cdot\frac{20}{42}+\frac{6}{11}\cdot\frac{20}{42}\\&=\frac{38}{77}\approx 0.494.\end{aligned}$$

(2) 由 Bayes 公式有

$$P(\bar{B}_0|A)=1-\frac{P(A|B_0)P(B_0)}{P(A)}=1-\frac{4/11\cdot 2/42}{38/77}=55/57\approx 0.965.$$

三.(15 分) (1) 由联合概率密度函数 $f(x,y)=4y^2I(0<x<y<1)$ 易得

$$f_X(x)=\frac{4}{3}(1-x^3)I(0<x<1)$$

(2) 易得 $EX=2/5, Var(X)=14/225$ 以及 $EY=4/5, Var(Y)=2/75$, $EXY=1/3$. 从而 $\rho_{XY}=\frac{1/3-8/25}{\sqrt{14/225\cdot 2/75}}=\sqrt{\frac{3}{28}}\approx 0.327$.

四.(20 分) (1) $\hat{p}_1=\frac{a_2-1}{2}$ 和极大似然估计量 $\hat{p}_2=\frac{n-n_1}{2n}$. 其中 $a_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$, n_1 为样本中等于 1 的个数.

(2) $E\hat{p}_1=p$ 和 $E\hat{p}_2=p$ 均为无偏估计. $Var(\hat{p}_1)=\frac{5p-2p^2}{2n}>Var(\hat{p}_2)=\frac{p(1-2p)}{2n}$, 故似然估计更有效.

(3) 卡方检验值为 $0.0213<\chi_1^2(0.05)=3.841$, 从而不能拒绝该组样本来自总体 X 的原假设.

五. (20 分) 该批产品该指标的平均值为 89.70 和样本标准差为 1.09. 据此

(1) 检验统计量 $|\sqrt{n}(\bar{X}-90)/S|=1.946<t_{49}(0.025)=2.010$, 因此在 0.05 水平下不能拒绝该批产品该指标的平均值为 90 的原假设.

(2) 检验统计量 $(n-1)S^2=58.22<\chi_{49}^2(0.05)=66.339$, 因此在 0.05 水平下不能能否认该批产品该指标的标准差不超过 1 的原假设.

(3) 置信区间为 $[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(0.025), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(0.025)]=[89.39, 90.01]$ 其包含了 90 这一点, 因此在 0.05 水平下不能拒绝该批产品该指标的平均值为 90 的原假设. 该置信区间为检验检验问题 (1) 的接受域.