准中性的时间尺度(电子静电振荡)和空间尺度(德拜屏蔽)

复习题 $kT=10eV$ $n_e=10cm^{-3}$ $B=10nT$ $P=\frac{B^2}{2\mu_0}$

如果近地轨道附近的太阳风等离子体的温度为 10 eV，其中的电子数密度为 10 cm^{-3}，而磁场为 10nT，则该处太阳风的温度为多少 K？压强为多少 Pa (帕)？电子的平均动能为多少 J？相邻带电粒子间的静电势能和平均动能之比为多少？该等离子体中的电子静电振荡频率与回旋频率之比为多少？(电子)德拜长度为多少 m?

T P $\frac{3}{2}kT$

$\frac{eB}{m}$ $U=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$, $n_e d^3=1$ $\sqrt{\frac{kT_e\varepsilon_0}{n_e q^2}}$

● **单粒子运动**

性的时间尺度(电子静电振荡)和空间尺度(德拜屏蔽)

条件 $kT=10eV$ $n_e=10cm^{-3}$ $B=10nT$

近地轨道附近的太阳风等离子体的温度为 10 eV，其中的电

要求的量为 T

$$P=\frac{B^2}{2\mu_0}$$

平均动能 $\frac{3}{2}kT$

静电势能为 $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 L}$ $n_e L^3=1$

电子静电振荡频率 $\omega_{pe}=\sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}}$

回旋频率 $\frac{eB}{m}$

德拜长度为 $\lambda_{D\alpha}=\sqrt{\frac{kT_\alpha\varepsilon_0}{n_\alpha q_\alpha^2}}=\sqrt{\frac{kT\varepsilon_0}{n_e e^2}}$

复习题

球坐标下的偶极子磁场表达式为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{M}{r^3}(2\cos\theta\ \boldsymbol{e}_r + \sin\theta\ \boldsymbol{e}_\theta)$$

这里 M 是磁矩。将地球磁场视为偶极场，P 是地球赤道上空的一点。

(1)证明：经过 P 点的磁力线的方程为 $r = R\sin^2\theta$，这里 R 是 P 点的 r。

(2)计算 P 点处该磁力线的曲率半径R_c。

(3)若某带电粒子某时刻运动的引导中心在 P 点，且此时它在平行磁场方向和垂直磁场方向的动能相等，求它此时的曲率漂移速度与磁场梯度漂移速度之比。

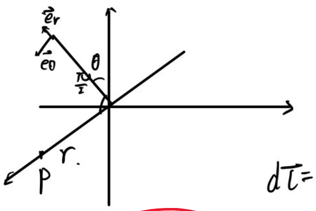
$d\vec{l} = dr\vec{e_r} + rd\theta\vec{e_\theta}$, $\vec{B}\times d\vec{l} = 0$

(1) $\vec{B}\times d\vec{l} = \frac{\alpha}{r^3}(2\cos\theta\vec{e_r}+\sin\theta\vec{e_\theta})\times(dr\vec{e_r}+rd\theta\vec{e_\theta}) = (2\cos\theta rd\theta - \sin\theta dr)\frac{\vec{e_r}\times\vec{e_\theta}}{r^3} = 0 \Rightarrow d(\frac{\sin^2\theta}{r}) = 0$

(2) R $\left|\frac{dl}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left|\frac{dr\vec{e_r}+rd\theta\vec{e_\theta}}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{(\frac{dr}{d\theta})^2+r^2}\,\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = R$.

(3) $v_\parallel^2 = v_\perp^2 \Rightarrow v_{cv} : v_{\nabla B} = 2:1$

(1)

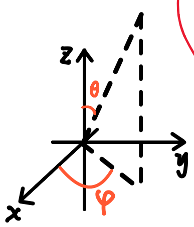


$d\vec{l} = dr\hat{e}_r + rd\theta\hat{e}_\theta$

$\vec{B}\times d\vec{l} = 0$

磁力线

$$\begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\varphi \\ \frac{2\cos\theta}{r^3} & +\frac{\sin\theta}{r^3} & 0 \\ dr & rd\theta & 0 \end{vmatrix}$$



$\frac{2\cos\theta d\theta}{r^2} - \frac{\sin\theta dr}{r^3} = 0$

$\frac{2\sin\theta\cos\theta d\theta}{r} + \frac{\sin^2\theta dr}{r^2} = 0$

$d(\frac{\sin^2\theta}{r}) = 0$

$\therefore \frac{\sin^2\theta}{r} = C$

(2)

$R_c = \left|\frac{dl}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{|dr\vec{e_r} + rd\theta\vec{e_\theta}|}{d\theta} = \sqrt{(\frac{dr}{d\theta})^2 + r^2}$

$= [R\sin\theta\sqrt{(2\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}]_{\theta=\frac{\pi}{2}}$

$= R$

(3)

复习题

忽略碰撞，利用等离子体的动理论方程，推导由电子构成流体的动量方程：

$$nm\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p - ne(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

这里$\boldsymbol{v}$是电子流体的平均速度，p是仅由电子提供的分压强。

等离子体的流体运动模型

- 等离子体的流体运动模型是研究等离子体的宏观观测物理量的变化和满足的方程。
- 而微观的分布函数满足动理论方程：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla f + \frac{q}{m}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}} f = 0$$

- 这里忽略碰撞项，或电场仍包含可导致碰撞的微观粒子静电场。为了求出宏观物理量$\langle\psi\rangle$满足的方程，对动理论方程乘以仅以$\boldsymbol{v}$为自变量的函数$\psi(\boldsymbol{v})$并做速度积分，得：

$$\int \psi(\boldsymbol{v})\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla f + \frac{q}{m}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}} f\right)d\boldsymbol{v} = 0$$

矩方程

- 积分后的方程即为矩方程。其中各项有：

$$\int \psi\frac{\partial f}{\partial t}d\boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial t}\int \psi f d\boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial t}(n\langle\psi\rangle)$$

$$\int \psi\boldsymbol{v}\cdot\nabla f\, d\boldsymbol{v} = \nabla\cdot\left(\int \psi\boldsymbol{v} f d\boldsymbol{v}\right) = \nabla\cdot(n\langle\psi\boldsymbol{v}\rangle)$$

$$\int \psi(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}} f\, d\boldsymbol{v}$$
$$= \int\left(\nabla_{\boldsymbol{v}}\cdot(\psi(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})f) - f\nabla_{\boldsymbol{v}}\cdot\psi(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\right)d\boldsymbol{v}$$
$$= -\int f\left(\nabla_{\boldsymbol{v}}\psi\cdot(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\right)d\boldsymbol{v} = -n\langle\nabla_{\boldsymbol{v}}\psi\cdot(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\rangle$$

- 散度积分项可化为面积分，而面上的速度无限大的地方分布函数$f = 0$，该项积分为0。得矩方程为：

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\langle\psi\rangle) + \nabla\cdot(n\langle\psi\boldsymbol{v}\rangle) - \frac{q}{m}n\langle\nabla_{\boldsymbol{v}}\psi\cdot(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\rangle = 0$$

$q=e$，换一下即可

0阶和1阶矩方程

- 矩方程是由动理论推导流体方程的桥梁。
- 取$\psi = 1$，即得0阶矩方程：$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(n\boldsymbol{u}) = 0$
  这里$\boldsymbol{u} = \langle\boldsymbol{v}\rangle$是微观粒子速度的平均值，即流体的流动速度。而这个方程是流体的连续性方程。这个方程的拉格朗日形式为：$\frac{dn}{dt} + n\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$
- 取$\psi = v_x$，得一阶矩方程：

$$\frac{\partial(nu_x)}{\partial t} + \nabla\cdot(n\langle v_x\boldsymbol{v}\rangle) - \frac{qn}{m}\langle\boldsymbol{e}_x\cdot(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\rangle = 0$$

方程可化为(其中$\boldsymbol{P}_x$是压强张量分量，随后解释其由来)：

$$\frac{\partial(nu_x)}{\partial t} + \nabla\cdot\left(nu_x\boldsymbol{u} + \frac{\boldsymbol{P}_x}{m}\right) - \frac{nq}{m}(E_x + (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})_x) = 0$$

$$n\frac{du_x}{dt} + \nabla\cdot\frac{\vec{P}_x}{m} - \frac{nq}{m}\left[E_x + (\vec{u}\times\vec{B})_x\right] = 0$$

$$n\frac{du_i}{dt} + \nabla\cdot\frac{\vec{P}_i}{m} - \frac{nq}{m}\left[E_i + (\vec{u}\times\vec{B})_i\right] = 0$$

$i = x, y, z$.

则 $mn\frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla\cdot\overleftrightarrow{P} - ne\left[\vec{E} + (\vec{u}\times\vec{B})\right] = 0$

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{P} = \nabla p$$

似有

$$\frac{n_b}{n_p} \geq \frac{T_b}{T_p} \cdot u \left(\frac{m}{\kappa T_p}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} - \frac{mu^2}{2\kappa T_p}}$$

（由习题 7-1 改编）

$\omega_{pe} \neq 0$ $\omega_{pi} = 0$

复习题

(1) 假设冷等离子体中的离子质量无穷大，电子的数密度为n_0，推导以下平行磁场传播的波的频率：左旋波的截止频率ω_L，右旋波的截止频率ω_R，高混杂(共振)频率。

(2) 对于高混杂波(课本习题 4-6 中的上杂化振荡)，证明电子运动的轨道是椭圆，并且在 $\boldsymbol{k}$ 的方向(即波的传播方向)被拉长。这里假设等离子体是冷的，背景磁场$\boldsymbol{B}_0$沿 z 方向，波沿 x 方向传播。

平行传播的左旋圆偏振波

- 左旋圆偏振波。色散关系为：

$$n^2=\varepsilon_1+\varepsilon_2 \Rightarrow \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2=1-\frac{1}{\omega}\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega-\Omega_\alpha}=1-\frac{\omega_{pe}^2+\omega_{pi}^2}{(\omega+|\Omega_e|)(\omega-\Omega_i)}$$

- 偏振关系为左旋圆偏振波：$E_x=iE_y\neq 0,\quad E_z=0$
- 频率较高时，左旋圆偏振波的色散关系又能写为

$$\left(\frac{kc}{\omega}\right)^2=1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega+|\Omega_e|)}$$

- 截止频率为（也是垂直传播的X模的截止频率）

(1) $$\omega_L=-\frac{|\Omega_e|}{2}+\sqrt{\frac{\Omega_e^2}{4}+\omega_{pe}^2}$$

平行传播的左旋圆偏振波讨论

- 频率较低、波长较短时，成为离子回旋波：

$$\omega=\Omega_i\left(1-\frac{\omega_{pi}^2}{k^2c^2}\right)$$

$\omega=\frac{qB}{m_i}$ 共振频率?

- 在离子回旋频率上共振。共振时，离子可持续从左旋

平行传播的右旋圆偏振波

- 右旋圆偏振波。色散关系为：

$$n^2=\varepsilon_1-\varepsilon_2 \Rightarrow \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2=1-\frac{1}{\omega}\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega+\Omega_\alpha}=1-\frac{\omega_{pe}^2+\omega_{pi}^2}{(\omega-|\Omega_e|)(\omega+\Omega_i)}$$

- 偏振关系为右旋圆偏振：$E_x=-iE_y\neq 0,\quad E_z=0$
- 频率较高时，右旋圆偏振波的色散关系又能写为

$$\left(\frac{kc}{\omega}\right)^2=1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega-|\Omega_e|)}$$

- 截止频率为（也是垂直传播的X模的截止频率）

(1) $$\omega_R=\frac{|\Omega_e|}{2}+\sqrt{\frac{\Omega_e^2}{4}+\omega_{pe}^2}$$

平行传播的右旋圆偏振波讨论

- 接近电子回旋频率、波长较短时，是电子回旋波：

$$\omega=|\Omega_e|\left(1-\frac{\omega_{pe}^2}{k^2c^2}\right)$$

- 在电子回旋频率上共振。共振时，电子可持续从右旋圆偏振波中获得或失去能量。

高混杂波

- 高混杂波（ω_{HH}）是高频电磁波模转化为静电波模的共振频率。此时，由异常模的椭圆偏振退化为沿着x方向（即波矢的方向）的线偏振：

$$\varepsilon_1=0,\quad E_y=E_z=0,\quad E_x\neq 0$$

- 带电粒子的振荡除了受到静电回复力，还受到磁场的约束，使得振荡频率是静电振荡频率和回旋频率共同作用的结果。是电子振动运动的共振频率。

(1) $$\omega_{HH}^2=\omega_{pe}^2+\Omega_e^2$$

- 电子的运动速度轨迹为椭圆

(2) 电子的运动速度轨迹为椭圆：

$$\mathbf{v}_{e\perp}=-\frac{E_x}{B_0}\left(\frac{i\omega}{\Omega_e}\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y\right)/\left(1-\frac{\omega^2}{\Omega_e^2}\right)$$

?

复习题

某个等离子体的电子一维的分布函数$f(v)$由两部分组成：

$$f(v)=n_p\left(\frac{m}{2\pi\kappa T_p}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\left(\frac{mv^2}{2\kappa T_p}\right)}+n_b\left(\frac{m}{2\pi\kappa T_b}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\left(\frac{m(v-u)^2}{2\kappa T_b}\right)}$$

其中n_p、T_p是主体的部分(用下标 p)的数密度和温度，n_b、T_b是束流部分(用下标 b)的数密度和温度，u是束流的平均速度。已知$\frac{1}{2}mu^2\gg\kappa T_b$，证明若等离子体中发生了不稳定性，则近似有

$$\frac{n_b}{n_p}\geq\frac{T_b}{T_p}\cdot u\left(\frac{m}{\kappa T_p}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}-\frac{mu^2}{2\kappa T_p}}$$

（由习题 7-1 改编）

?

思考题

- 自然界中，有哪些等离子体物质？它们的温度、密度的参数范围是什么？试举例说明。
- 等离子体有哪些描述方式？其中，哪些是自洽的，哪些不是自洽的？
- 对于流体来说，拉格朗日法和欧拉法是怎样的描述方法？指出其中各自的特点，评论其优缺点。

流体的欧拉描述和拉格朗日描述

- 等离子体描述中，除了非自洽的单粒子运动理论，都将等离子体当作流体或相空间的流体处理。
- 对流体进行描述，考察各个物理量随着时间的变化，常用的是欧拉法，即考察固定的地点上物理量随时间的变化（偏微分$\frac{\partial}{\partial t}$），另外一种方法是拉格朗日法，是考察固定的物质上的物理量随时间的变化（全微分$\frac{d}{dt}$）。因为物质是移动的，因此不但随时间变化，也随空间变化。
- 全微分与偏微分的关系

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdots \frac{\partial}{\partial x}$$

对于等离子体的描述方法

- 1. 单粒子运动
  - 仅考虑带电粒子在电磁场中的运动，不考虑带电粒子运动对电磁场的影响。
  - 方法简单直观，但不自洽，无法求出电磁场的变化
- 2. 磁流体力学
  - 将等离子体视为受磁场作用的流体，同时考虑流体的流动使磁场产生的变化。
  - 结果是自洽的，但等离子体需保持电中性和高导电性，以至于无须考虑电场的影响。仅适合处理低频长波的变化，因而被称为等离子体宏观理论 。

对于等离子体的描述方法

- 3. 多成分流体与电磁场相互作用
  - 对于每种带电粒子视为是一种流体，等离子体由多种流体成分组成，同时与电磁场发生自洽的相互作用。
  - 电子和离子可以分离，允许静电场存在，可以处理高频或短波长的问题，但要求同一种流体的速度分布不是远离平衡态的。
- 4. 动理学理论
  - 通过等离子体中电子和离子各种成分的速度分布函数完整描述等离子体的状态。对带电粒子加速、反射等现象能够很好地描述。
  - 需要解的信息太多，求解复杂。称为等离子体的微观理论。

思考题

1. 若密度为 n 的等离子体中，一半电子温度为 T 而另一半是冷的，其中的电子静电振荡的频率会如何变化？

?

2. 练习题
- 验算有电势 φ 的Boltzmann分布满足动理论的稳态Vlasov方程。

3. 等离子体中的某些电子正在做简谐振动，其振幅为Debye长度，动能由热运动提供，离子的运动可以忽略。问电子的简谐振荡角频率是多少？

1 $\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}$ 与T无关.不会变.

vlasov $\overset{0}{\frac{\partial f}{\partial t}} + \vec{v}\cdot\nabla_x f + \frac{\vec{F}}{m}\cdot\nabla_v f = \overset{0}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c}$

2.

等离子体描述方法:单粒子运动(简单,不自洽,无法求电磁场变化),磁流体力学(自洽,要求电中性高导电性不考虑电场,仅处理低频长波变化,宏观理论),多成分流体与磁场相互作用(每种带电粒子为一种磁流体,自洽,允许静电场,要求不远离平衡态),动理学理论(各种速度分布,复杂,微观理论);**欧拉法**考察固定的地点上物理量随时间的变化$\partial/\partial t$,**拉格朗日法**考察固定物质上的物理量随时间的变化d/dt;**全微分与偏微分关系**$d/dt=\partial/\partial t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla$;**连续性方程**$d\rho/dt+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$,不可压缩条件$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$ 欧拉形式$\partial\rho/\partial t+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0$等价;$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)\,dx=\sqrt{\pi}$;**动理论方程**:空间/速度坐标相空间连续性方程(1),分布$f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$为相空间粒子密度.

(1)$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x f+\frac{F}{m}\cdot\nabla_v f=(\frac{\partial f}{\partial t})_c$ C为碰撞项.

(2)$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1.5} e^{-\frac{1}{kT}(\frac{1}{2}mv^2+q\varphi(\boldsymbol{x}))}$

Maxwell,Boltzmann(2)分布满足动理论方程

等离子体基本性质:良导体,非磁化等离子体几无内部电场;磁化等离子体电场基本垂直磁场,整体电中性(无电场假设),热运动随机涨落破坏电中性导致**准电中性**.**德拜屏蔽推导**:偏离电中性有一定空间/时间尺度;等离子体中放入φ_0无限大平板栅

$\vec{v}\cdot\nabla_x f = \alpha\, e^{-\frac{1}{kT}[\frac{1}{2}mv^2+q\varphi(\vec{x})]}\,\frac{-q}{kT}\vec{v}\nabla_x\varphi(\vec{x})$ ①

$\frac{\vec{F}}{m}\cdot\nabla_v f = \alpha\, e^{-\frac{1}{kT}[\frac{1}{2}mv^2+q\varphi(\vec{x})]}\,\frac{-\vec{F}\cdot\nabla_v(\vec{v}^2)}{2kT}$ ②

①+② =0. 证毕.

3、动能 $\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m_e\omega_e^2\lambda_{De}^2 \Rightarrow \omega_e =$

思考题

- 为什么通常Debye长度远大于近碰撞的瞄准距离？给出证明。 近：$b < b_0 << \lambda_D$
- 库仑碰撞所用的电势的模型是什么?库仑碰撞(远碰撞)和近碰撞一般情况下谁的碰撞频率更高? 远更高.
- 磁场中的引导中心位置如何确定？受力之后引导中心向哪个方向漂移？

练习题

- 在均匀电磁场 $\boldsymbol{E} = E_0\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{e}_z$ 中，电子原先静止在原点，求它其后的运动轨迹，并证明轨迹是摆线。

1 $\lambda_{De} = \sqrt{\frac{kT_e\varepsilon_0}{n_e e^2}}$. $b_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu v^2} << \lambda_D$

近碰 $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{b_0}{b} \in (1,\infty)$ $b < b_0$

$\theta \geq 90°$ $\frac{\theta}{2} \geq 45°$

2. $m\dot{\vec v} = q(\vec E + \vec v\times\vec B) \Rightarrow \dot{\tilde v} = -i\Omega\tilde v + \frac{qE_0}{m} = -i\Omega(\tilde v + \frac{iE_0}{B_0})$

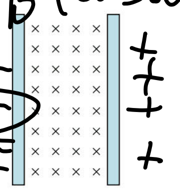
$\tilde v = v_\perp e^{-i\alpha} - iE_0/B$ $v_z = \frac{qE_z}{m}t + v_{z0} = 0$

$\begin{cases} v_x = v_\perp\cos(\Omega t+\alpha) \\ v_y = -v_\perp\sin(\Omega t+\alpha) - E_0/B \end{cases}$ $(\Omega t+\alpha)\big|_{t=0} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v_\perp = -\frac{E_0}{B}$.

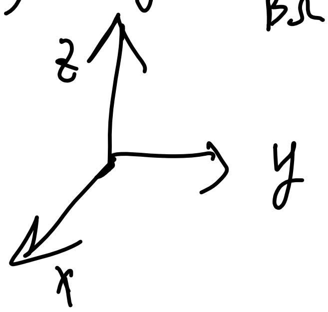
$\Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{E_0}{B}\sin\Omega t \\ v_y = \frac{E_0}{B}(\cos\Omega t - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{E_0}{B\Omega}(-\cos\Omega t + 1) \\ y = \frac{E_0}{B\Omega}(\sin\Omega t - \Omega t) \end{cases}$ 摆线.

练习题

- 设两竖直放置的无限大平板之间存在等离子体，磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 为水平方向且平行于平板，重力将引起漂移并产生电荷分离，进而产生电场。若电荷到达平板处将在平板上积累，等离子体密度一直维持不变。求在此电场作用下的粒子漂移运动情况。



$\rightarrow \vec v_{fi}$ $\leftarrow v_{fe}$



$\vec B_0 = -|B_0|\vec e_x$

$\vec E$ 向右

$\vec v_f = \frac{m\vec g\times\vec b}{qB_0}$ $\vec b = \frac{\vec B_0}{B_0}$ $\vec j = n(m_e+m_i)\frac{\vec g\times\vec B_0}{B_0^2}$

n 不变.

$\vec v_c = \frac{\vec E\times\vec B}{B_0}$ 朝下

$j = \sigma E$?

练习题

- 假设地球赤道处的磁场为0.3G，并且它象理想偶极子一样，以r^3衰减。假设存在1eV质子和$3x10^4$eV的电子，分布各向同性。在赤道平面r=5R(R为地球半径)处，二者密度都为$n=10^5 m^{-3}$。(1)计算离子和电子的磁场梯度漂移速度。(1) (2)电子的漂移方向如何？(3)一个电子绕地球缓转一周所需要的时间。(4)计算环向漂移电流密度。
- 在磁镜比R_m=5的两个运动磁镜间俘获的一个宇宙射线的质子，它的初始能量为$W=10^3$eV，并且在中间平面处有：$v_{垂直}=v_{平行}$，每个磁镜以速度$v_m=10^4$m/s向中间平面运动，$L=10^{10}$m。 (1)用损失椎公式和磁矩不变性，求出质子逃逸前将加速到多高能量。(2)粒子由初始被捕获到逃逸需要多少时间？

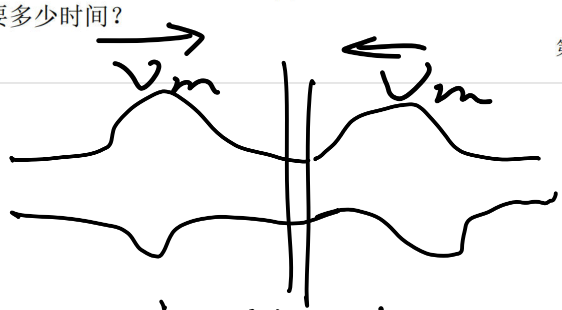
$1G = 10^{-4}T$

$\vec{B} = \frac{B_0 r_e^3}{r^3}\vec{e}_r \quad n = 10^5 m^{-3}$

(3) $\Omega = \frac{qB}{m} \quad T = \frac{2\pi}{\Omega}$

(4) $I = neV = 2ne\Omega r_e$

?



$v_{//}$不变？

初: $\begin{cases} v_{0//} = v_{0\perp} \\ \frac{1}{2}m_p(v_{0\perp}^2 + v_{0//}^2) = W = 10^3 eV \end{cases}$

末: $\begin{cases} v_{1\perp}^2 / v_{1//}^2 = 5 = R_m \\ \frac{1}{2}mv_{1\perp}^2/B_1 = \frac{1}{2}mv_{0\perp}^2/B_0 = \mu \end{cases}$

$v_{1\perp} = \sqrt{5}v_{0//} = \sqrt{5}v_{0\perp}$

$B_1 = 5B_0$

练习题

1 • 从矩方程推导出各成分流体的受力方程。

2 • 从能量方程 $\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{u}+\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u})-nq\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{u}=0$

（这里 $\varepsilon=\frac{1}{2}nmu^2+\frac{3}{2}nkT$ 是单位体积内的能量）

导出其拉格朗日形式：

$$n\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mu^2+\frac{3}{2}kT\right)+\nabla\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u})-nq\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{u}=0$$

1 $\frac{\partial}{\partial t}(n\langle\psi\rangle)+\nabla\cdot(n\langle\psi\vec{u}\rangle)-\frac{q}{m}n\langle\nabla_v\cdot(\psi\vec{E}(t,\vec{x})+\psi\vec{u}\times\vec{B}(t,\vec{x}))\rangle=0$

$$\frac{\partial(n\vec{u})}{\partial t}+\nabla\cdot(n\vec{u}\vec{u})+\nabla\cdot\frac{\vec{P}}{m}-\frac{nq}{m}(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B})=0$$

$$\frac{\partial(n_\alpha m_\alpha\vec{u}_\alpha)}{\partial t}+\nabla\cdot(n_\alpha m_\alpha\vec{u}_\alpha\vec{u}_\alpha+\vec{P}_\alpha)-n_\alpha q_\alpha(\vec{E}+\vec{u}_\alpha\times\vec{B})-\sum_{\alpha\neq\beta}\nu_{\alpha\beta}n_\alpha m_{\alpha\beta}(\vec{u}_\alpha-\vec{u}_\beta)=0$$

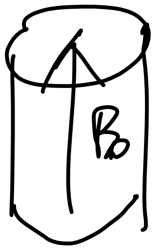
思考题：

• 从广义欧姆定律出发，简述等离子体中哪些原因有可能导致出现平行于磁场的电场分量。

• 设半径为a的柱体等离子体中，若β=1，磁场为B_0沿轴，且等离子体处于平衡状态，那么电流应该是什么样的分布，外磁场的大小方向如何？

在书柱上.

$$\begin{cases} nkT=\frac{B^2}{2\mu_0} \\ p+\frac{B_0^2}{2\mu_0}=\text{Const.}\end{cases}$$



练习题：

• 如果磁流体中没有电阻耗散，证明磁场B、密度ρ和速度u满足关系

$$\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{B}}{\rho}=(\frac{\mathbf{B}}{\rho}\cdot\nabla)\mathbf{u}$$

$\nabla p=\vec{j}\times\vec{B}=0$. $\vec{j}$与$\vec{B}$垂直平面

$\vec{j}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{B}$

磁力线与等离子体一同流动

• 磁场的变化方程为：$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B})$

• 这个方程可以化为：

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{u}-(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{B}-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{u})$$

$$\Rightarrow\frac{d\mathbf{B}}{dt}=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{u}-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{u})=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\frac{\mathbf{B}}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{B}}{\rho}=(\frac{\mathbf{B}}{\rho}\cdot\nabla)\mathbf{u}$$

• 与流动场中的线段所满足的方程形式相同。说明磁力线是冻结在等离子体中一起流动。这也是我们计算双绝热时所用的方程。

思考题：

• 从广义欧姆定律出发，简述等离子体中哪些原因有可能导致出现平行于磁场的电场分量。

• 设半径为a的柱体等离子体中，若β=1，磁场为B_0沿轴，且等离子体处于平衡状态，那么电流应该是什么样的分布，外磁场的大小方向如何？

练习题：

• 如果磁流体中没有电阻耗散，证明磁场B、密度ρ和速度u满足关系

$$\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{B}}{\rho}=(\frac{\mathbf{B}}{\rho}\cdot\nabla)\mathbf{u}$$

133 of 133

第7次课

$n_e m_e\frac{du_e}{dt}=-\nabla\vec{P}_e-n_e e(\vec{E}+\vec{u}_e\times\vec{B}$

练习题

- 计算热等离子体中，电子朗缪尔波的相速度和群速度各是多少？

思考题

- 推导有电子、氢离子、氦离子组成的非磁化热等离子体中的静电波色散关系，各成分的温度均为T，数密度分别为n_e，n_p，n_α。

→ 第2页 Cs.

思考题

非磁化等离子体中，比较静电波和电磁波的频率、群速度的特性，讨论其中的原因。

证明对于快磁声波，总是比Alfven速度快，对于慢磁声波，比同方向的Alfven波传播速度更慢。

$v = \frac{ck}{\lambda}$

- 垂直传播的电磁波什么时候转化为静电波？给出其频率的表达式。

1、ω_{UH} 和 ω_{LH}

- 某处均匀等离子体中有$\Omega_e=\omega_{pe}$，画出波在其中45度斜传播时的 ω-k 曲线（手绘图需要标明重要参数表达式）。

2、

- 证明平行磁场传播的电磁波在极低频段是Alfven波。
- 导出平行磁场传播的哨声波的色散关系。

- 波长仅是德拜长度的2π倍的电子静电波，其阻尼率是等离子体电子振荡频率的多少倍？
- 磁化等离子体中，波与带电粒子共振的条件是什么？试解释该共振条件满足时，产生共振的物理机制。

$\omega_{pe} = \cdots$

$\lambda = 2\pi\lambda_D$

$v = \lambda\omega$

$k = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\lambda_{De}}$ $k\lambda_{De} = \frac{1}{2\pi}$

$\frac{4\pi^2}{2}$

$$\omega_i = -\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega_{pe}}{k^3\lambda_{De}^3}\exp\left(-\frac{1}{2k^2\lambda_{De}^2}-\frac{3}{2}\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\omega_{pe}\,8\pi^3\exp\left(-2\pi^2-\frac{3}{2}\right)$$

$$= -\sqrt{8\pi^7}\,\omega_{pe}\exp\left(-2\pi^2-\frac{3}{2}\right)$$