重点：

第一章： 有限维分布、数值积分-些定义、独立增量过程、
条件期望性质、随机和、矩母函数概念、
推广的全概率公式 $P(A)=E(I_A)=E[E(I_A|X)]=$
- X离散 $\sum_i P\{A|X=x_i\}p_i$
- X连续 $\int_{-\infty}^{+\infty} P\{A|X=x_i\} f_X(x)dx$

第二章：(2.1, 2.2, 2.3节) 2.1： $N(s+t)-N(s)\sim P(\lambda t)$
强度 λ、 参数 λt
命题：另一种定义（仅作一般了解）

2.2： 命题2.2： 间隔序列、 W_n
定理2.1：

2.3： Poisson推广 (1) 非齐次 (2) 复合Poisson过程-义

第三章： 离散时间 M.C. 全部 (3.1~3.3)

模型 → 状态分类
- 1. 等价类
- 2. 周期性
- 3. 常返（正？零？）或瞬过

4. 吸收概率问题

平均常返时（不一定是等价类共享的!!）
1. $\mu_i=\sum_{i=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$
2. 极限分布（定理……）

平稳分布 → 初始分布是平稳分布⇒？
极限分布 ← 线性方程组
→ 意义？

第四章 平稳过程 宽平稳 协方差函数计算 所讲全部例子（含Gauss过程）

均值遍历性 <
- 定义
- 定理
- 推论

定理4.3

※ 复平稳过程： 协方差函数
谱密度函数
Weiner-Khintchine 公式

随机过程习题课

（2018年12月26日，周三）

一、设$\{N(t), t\geq 0\}$是一强度为λ的泊松过程，$s, t>0$，试求：

(1) $P\{N(s)=k \mid N(s+t)=n\}=?$　　$(k=0,1,2,\cdots,n)$

(2) $E\{N(s)N(s+t)\}=?$

(3) $E\{N(s+t)\mid N(s)\}$的分布律与期望、方差。

二、(习题2.9)

三、(习题2.10)

四　设$N_1(t)$与$N_2(t)$为两个独立的泊松过程，强度分别为λ_1与λ_2。

(1) 证明$N_1(t)+N_2(t)$为强度$\lambda_1+\lambda_2$的Poisson过程；

(2) $N_1(t)-N_2(t)$是Poisson过程吗？

(3) 试求在$N_1(t)$的任一间隔内，$N_2(t)$恰好发生k个事件的概率P_k，$(k\geq 0)$。

五、一部仪器受到的冲击数$N(t)$，$(t\geq 0)$是强度为λ的泊松过程，设第i次冲击造成的损伤为D_i，$(i\geq 1)$，其中$D_1, D_2, \cdots, D_i, \cdots\cdots$为i.i.d.，且与$N(t)$独立。若损伤随时间而（指数地）衰减，即经过$t$时间后，$D_i$变为$D_i e^{-\alpha t}$，$(\alpha>0)$，则时刻$t$仪器所受的总损伤为：

$$D(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-\alpha(t-W_i)}$$

（其中W_i为第i次冲击到来的时刻）试求$E(D(t))=?$（假定$ED_i=D$）。

六、一个国家在稳定经济条件下其商品出口情况可用一三状态的马氏链来描述，其中"1"表示今年比去年增长$\geq 5\%$，"-1"表示今年比去年减少$\geq 5\%$，而"0"则表示波动低于5%。由以往的统计数据可确定转移概率矩阵为：

$$
P=\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{pmatrix} 0.60, & 0.40, & 0 \\ 0.35, & 0.30, & 0.35 \\ 0, & 0.20, & 0.80 \end{pmatrix}
$$

试求每个状态的平均返回时间 μ_i，并比较在稳定经济条件下增长趋势与减少趋势的期望长度。

七. 设马氏链 $\{X_n, n\geq 0\}$ 的转移概率矩阵如下所示：

(1) 试对该马氏链作状态分类；

(2) 该马氏链是否存在平稳分布？若有则求之；

(3) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)}$ 是否存在？

$$
P=\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{pmatrix} 0, & 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, & 0 \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & 0 \end{pmatrix}
$$

八 (习题3.16) 自己看

九. 设 $\{X_n, n\geq 0\}$ 为区间 $[0,3]$ 上的随机游动，其转移概率矩阵如下： 自己做.

$$
P=\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{4}, & 0 \\ 0, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{4} \\ 0, & 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}
$$

试求质点由 k 出发而被 0 吸收的概率及吸收的平均步数 V_k $(k=1,2,3)$。

十. 设有随机过程：$X(t)=\cos(t\xi+\eta)$，$(t\in\mathbb{R})$，其中 ξ 与 η 独立，$\eta\sim U(0,2\pi)$，

$\xi\sim f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，$(x\in\mathbb{R}$，Cauchy分布)，数学期望不存在

(1) 证明 $\{X(t), t\in\mathbb{R}\}$ 为平稳过程；

(2) 试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$；

(3) $\{X(t), t\in\mathbb{R}\}$ 的均值是否具有遍历性？为什么？

一、

(1) $P\{N(s)=k \mid N(s+t)=n\}$

$$= \frac{P\{N(s)=k,\ N(s+t)=n\}}{P\{N(s+t)=n\}}$$

$$= \frac{P\{N(s)=k\}\, P\{N(s+t)-N(s)=n-k\}}{P\{N(s+t)=n\}}$$

$$= \frac{\frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda t}}{\frac{[\lambda(s+t)]^n}{n!} e^{-\lambda(s+t)}}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{s}{s+t}\right)^k \left(\frac{t}{s+t}\right)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{s+t}\right)^k \left(1-\frac{s}{s+t}\right)^{n-k}$$

(2) $E[N(s)\, N(s+t)]$

$= E[N(s)\, N(s+t) - N^2(s) + N^2(s)]$

$= E[\, N(s)[N(s+t)-N(s)] + N^2(s)]$

$= EN(s)\ E[N(s+t)-N(s)] + EN^2(s)$

$= EN(s)\ E[N(s+t)-N(s)] + [EN(s)]^2 + Var(N(s))$

$= \lambda s \cdot \lambda t + (\lambda s)^2 + \lambda s$

$= \lambda s(\lambda s + \lambda t + 1)$

(3) $E[N(s+t) \mid N(s)]$

期望 $E[E(N(s+t) \mid N(s))] = EN(s+t) = \lambda(s+t)$

分布律 $E[N(s+t) - N(s) + N(s) \mid N(s)]$

$= E(N(s+t)-N(s)) + E(N(s) \mid N(s))$

$= E(N(s+t)-N(s)) + N(s)$

$= \lambda t + N(s) \triangleq Z$

$P\{Z = k + \lambda t\} = P\{N(s)=k\} = \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s}$

$EZ = \lambda(s+t) \qquad Var Z = \lambda s$

二、 $N_1(t)$ 可表为一个随机和 $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ 其中 $X_1, \cdots, X_i$ 为独立同分布 $X_i \sim B(1,p)$，

若记 $Y_i = 1 - X_i$， $Y_i \overset{iid}{\sim} B(1,q)$ $(q=1-p)$

$N(t) - N_1(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \qquad (N_1(t) + N_2(t) = N(t))$

利用矩母函数可证 $N_1(t) \sim P(\lambda p t)$， $N_2(t) \sim P(\lambda q t)$，且 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 独立

事实上对于非负整数 k_1，k_2 $(k_1 + k_2 = k)$，则有 $P\{N_1(t)=k_1,\ N_2(t)=k_2\}$

$= P\{N_1(t)=k_1,\ N(t)=k\}$

$= P\{N_1(t)=k_1 \mid N(t)=k\}\, P\{N(t)=k\}$

$= \binom{k}{k_1} p^{k_1} q^{k_2} \frac{(\lambda t)^{k_1+k_2}}{k!} e^{-\lambda(p+q)t}$

$= \frac{(\lambda p t)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda p t} \cdot \frac{(\lambda q t)^{k_2}}{k_2!} e^{-\lambda q t}$

$= P\{N_1(t)=k_1\}\, P\{N_2(t)=k_2\}$

这个结论可以推广： $N(t)$ 强度 λ，每个事件分别以 p_i（具有第 i 种特征，$i=1,2,\cdots,n$）发生， $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

$N_i(t)$：具有特征 i 事件发生次数

那么每个 $N_i(t)$ 都是复合 Poisson 过程，强度 λp_i，且相互独立

三. $N(t)$ 强度 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 过程，又设 X_1 — 卡车首达时间，Y_1 — 小车首达时间，则 $X_1 \sim Exp(\lambda_1)$，$Y_1 \sim Exp(\lambda_2)$

所求概率 $P\{X_1 < Y_1,\ X_1 > 0\}$

$$= \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}\, dy\, dx$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

※ 亦可推广到 n种车：$\frac{\lambda_i}{\sum\lambda_i}$

四. (1) $N(t)$ 为强度为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 过程

(2) 不是. $N_1(t)-N_2(t)$ 可能取负.

(3) 设 $N_1(t)$ 间隔序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，且 $W_n = \sum_{i=1}^n X_i$

则 $P\{N_2(W_n)-N_2(W_{n-1})=k\}$

$= P\{N_2(X_n)=k\}$

$= P\{N_2(X_1)=k\}$ （由平稳性）

$= \int_0^{+\infty} P\{N_2(x_1)=k \mid X_1=x\}\, f_X(x)\, dx$

$= \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} \cdot \lambda_1 e^{-\lambda x}\, dx$

$= \frac{\lambda_1\lambda^k}{k!}\int_0^{+\infty} x^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} dx$

$\underline{\underline{t=(\lambda_1+\lambda_2)x}}\ \frac{\lambda_1\lambda_2^k}{k!}\int_0^{+\infty} \frac{t^k}{(\lambda_1+\lambda_2)^k} e^{-t} \frac{dt}{\lambda_1+\lambda_2}$

$= \frac{\lambda_2^k\lambda_1}{(\lambda_1+\lambda_2)^{k+1}k!}\boxed{\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt}$ Gamma[k+1]

$= \frac{\lambda_2^k\lambda_1}{(\lambda_1+\lambda_2)^{k+1}} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$

五. $D(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-\alpha(t-W_i)}$

$ED(t) = E[E(D(t) \mid N(t))]$ (*)

$E(D(t) \mid N(t)=n) = E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-\alpha(t-W_i)} \,\middle|\, N(t)=n\right)$

$= E\left(\sum_{i=1}^{n} D_i e^{-\alpha(t-W_i)} \,\middle|\, N(t)=n\right)$

$= De^{-\alpha t} E\left(\sum_{i=1}^{n} e^{\alpha W_i} \,\middle|\, N(t)=n\right)$ （定理2.1 注）

$= De^{-\alpha t} E\left[\sum_{i=1}^{n} e^{\alpha U_{(i)}}\right]$ （$U_{(i)} \sim U(0,t)$）

$= De^{-\alpha t} E\sum_{i=1}^{n} e^{\alpha U_i}$ （顺序统计量）

$= nDe^{-\alpha t} Ee^{\alpha U_i}$ (**)

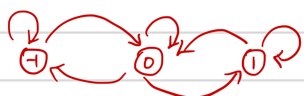
$\left(Ee^{\alpha U_i} = \frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha t}\right) = \frac{nD}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t})$ 代入(*)得

$E(D(t)) = \cdots = \frac{\lambda D}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$

cf. 例2.2

六、

$$P = \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{pmatrix} 0.60, & 0.40, & 0 \\ 0.35, & 0.30, & 0.35 \\ 0, & 0.20, & 0.80 \end{pmatrix}$$

∵ 

∴ 不可约 M.C.，且正常返，非周期 ⇒ 遍历 ⇒ 极限分布 ⇒ 线性方程组

$$\begin{cases} 0.6\pi_{-1} + 0.35\pi_0 = \pi_{-1} \\ 0.4\pi_{-1} + 0.30\pi_0 + 0.2\pi_1 = \pi_0 \\ 0.35\pi_0 + 0.8\pi_1 = \pi_1 \\ \pi_{-1}+\pi_0+\pi_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ccc} \pi_{-1}, & \pi_0, & \pi_1 \\ \frac{7}{29}, & \frac{8}{29}, & \frac{14}{29} \end{array}$$

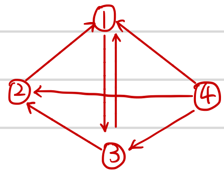
$\Rightarrow \mu_{-1} = \frac{29}{7}$ $\quad \mu_0 = \frac{29}{8}$ $\quad \mu_1 = \frac{29}{14}$

增长长度期望长度 $\frac{14}{29}$，减小期望长度 $\frac{7}{29}$

七、

$$P=\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{pmatrix} 0, & 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, & 0 \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & 0 \end{pmatrix}$$

(1)



其中 ④ 显然瞬过，1.2.3 构成等价类，且正常返

(2) 有限状态 $\Rightarrow$ 平稳分布存在

线性方程组 $\Rightarrow$ $\pi=(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0)$

(3) 极限存在. P 可以写成分块形式

$$P=\begin{pmatrix} A & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad P^n=\begin{pmatrix} A^n & 0 \\ \alpha A^{n-1} & 0 \end{pmatrix} \qquad A^n \to \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

八、(一定要看一下)

九、求线性方程组. 要会做

十、(1) $X(t) = \cos(t\xi+\eta) = \cos t\xi \cos\eta - \sin t\xi \sin\eta$

$EX(t) = 0$?

$r_X(t+\tau, t) = E X(t+\tau) X(t)$

$= E \cos((t+\tau)\xi+\eta) \cos(t\xi+\eta)$

$= \frac{1}{2} E \cos((2t+\tau)\xi+2\eta) + \cos\tau\xi]$

$= \frac{1}{2} E \cos\tau\xi$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\tau x \cdot \frac{1}{x^2+1} dx$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} e^{ix\tau} dx$

$= \frac{1}{2} e^{-|\tau|}$

(2) $S(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}$

(3) 绝对可积.

十一、设平稳过程的功率谱密度函数为 $S(\omega)=\frac{3\omega^2+4}{(\omega^2+1)(\omega^2+9)}$

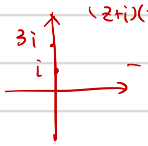
(1) 试求协方差函数

(2) 问过程均值是否有遍历性

解：(1) (留数) 令 $f(z)=\frac{3z^2+4}{(z^2+1)(z^2+9)}$

$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{iz|\tau|} dz$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3z^2+4}{(z^2+1)(z^2+9)} e^{iz|\tau|} dz$



$(z+i)(z^2+9)$

$-\frac{8}{168}i$

$= 2\left\{\mathrm{Res}[f(z)e^{iz|\tau|}, i] + \mathrm{Res}[f(z)e^{iz|\tau|}, 3i]\right\}$

$= \frac{1}{48}(3e^{-|\tau|} + 23e^{-3|\tau|})$

(待定系数法) $\frac{3\omega^2+4}{(\omega^2+1)(\omega^2+9)} \underset{=\!=}{\overset{待定系数}{=}} \frac{1}{8}\times\frac{1}{\omega^2+1} + \frac{23}{8}\times\frac{1}{\omega^2+9}$

(2) 绝对可积 $\Rightarrow$ 均值遍历性