《理论力学 A》(2021 年秋季）平时作业五[1]

10 月 15 日（星期五）交，接收电子版。

1. **钱德拉塞卡极限：白矮星的最大质量**。考虑铁白矮星，即白矮星内部由铁原子核加电子组成。白矮星内部的压强主要来自电子的费米简并压。根据统计物理，我们可以得到白矮星的的状态方程如下：

$$\rho = 9.74 \times 10^8 \mu_e x_e^3 \quad \mathrm{kgm^{-3}} \tag{1}$$
$$p = 1.42 \times 10^{24} \phi(x_e) \quad \mathrm{Nm^{-2}} \tag{2}$$

其中 μ_e 为电子的平均分子量，即将原子核平均分给每个电子，每个电子分到的核子数。对于铁白矮星，显然，$\mu_e = 56/26 \simeq 2.15$。公式中 x_e 为无量纲化电子的费米动量，即电子的费米动量 p_{F} 与 $m_e c$ 的比值：

$$x_e = \frac{p_{\mathrm{F}}}{m_e c} \tag{3}$$

在密度低的时候，有 $x_e \ll 1$，即电子是非相对论的。在密度高的时候有 $x_e \gg 1$，即电子是极端相对论的。$\phi(x)$ 的表达式为：

$$\phi(x) = \frac{1}{8\pi^2}\left\{x(1+x^2)^{1/2}(2x^2/3-1) + \ln[x+(1+x^2)^{1/2}]\right\} \tag{4}$$

简单分析可知：

$$\phi(x) \simeq \frac{1}{15\pi^2}x^5, \quad (x \ll 1) \tag{5}$$
$$\phi(x) \simeq \frac{1}{12\pi^2}x^4, \quad (x \gg 1) \tag{6}$$

也就是说，在密度比较低的时候，电子的非相对论的（$x_e \ll 1$），状态方程近似为：

$$p \sim \rho_0^{5/3} \tag{7}$$

在密度比较高的时候，电子变得极端相对论（$x_e \gg 1$），状态方程近似为：

$$p \sim \rho_0^{4/3} \tag{8}$$

请通过数值计算如下的常微分方程组，得到一系列的白矮星的质量和半径关系 (M, R)。其中质量请用太阳质量为单位 $(M_\odot = 1.99 \times 10^{30}\ \mathrm{kg})$。

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho(r) \tag{9}$$
$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \tag{10}$$

注意，为了得到白矮星的最大质量，核心处 $(r=0)$ 的密度 (ρ_c) 应该取高于 $x_e = 1$ 对应的密度。现在有很多现成的小程序可以直接调用，例如 python scipy 中的 odeint，matlab 中的 ode 等等。

数值计算得到的白矮星的最大质量是多少？请根据计算结果作如下两幅图：(1) $\rho_c - M$；(2) $M - R$。数据点取最大质量附近的系列值（参考文献：Chandrasekhar, S., 1931, Astrophysical Journal, vol. 74, p.81 http://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1931ApJ....74...81C）。

[1]© 中国科学技术大学物理学院　袁业飞

2. **奥本海默极限：中子星的最大质量**。奥本海默在最初研究中子星最大质量的时候，假设中子星由纯中子组成。中子星内部的压强由中子的费米简并压提供。根据统计物理，我们可以得到中子气体的状态方程：

$$\begin{aligned} \rho &= 1.80\times 10^{20}\chi(x_n) \quad \mathrm{kgm^{-3}} && (11)\\ p &= 1.62\times 10^{37}\phi(x_n) \quad \mathrm{Nm^{-2}} && (12) \end{aligned}$$

其中 $x_n = p_F/m_n c$ 为中子无量纲化的费米动量。$\chi(x)$ 的表达式为：

$$\chi(x) = \frac{1}{8\pi^2}\left\{x(1+x^2)^{1/2}(2x^2+1) - \ln[x+(1+x^2)^{1/2}]\right\} \tag{13}$$

简单分析可知：

$$\begin{aligned} \chi(x) &\simeq \frac{1}{3\pi^2}x^3, \quad (x \ll 1) && (14)\\ \chi(x) &\simeq \frac{1}{4\pi^2}x^4, \quad (x \gg 1) && (15) \end{aligned}$$

对于纯中子气体的状态方程，我们也可以采用如下形式的状态方程：

$$\begin{aligned} \rho &= 5.71\times 10^{17}(\sinh t - t) \quad \mathrm{kgm^{-3}} && (16)\\ p &= 1.71\times 10^{34}[\sinh t - 8\sinh(t/2) + 3t] \quad \mathrm{Nm^{-2}} && (17) \end{aligned}$$

其中:

$$t = 4\mathrm{arcsh}(p_\mathrm{F}/m_n) = 4\ln\left(x_n + \left[1+x_n^2\right]^{1/2}\right) \tag{18}$$

对于典型的中子星来说，它的半径非常接近同样质量黑洞的 Schwarzschild 半径，因此，我们必须用广义相对论版的流体静力学平衡方程，Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程组处理（注：令光速 $c=\infty$，该方程退化到牛顿版的流体静力学平衡方程）：

$$\begin{aligned} \frac{dp(r)}{dr} &= -\frac{G\left[m(r)+\frac{4\pi r^3 p(r)}{c^2}\right]}{r^2\left[1-\frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right]}\left[\rho(r)+\frac{p(r)}{c^2}\right] && (19)\\ \frac{dm(r)}{dr} &= 4\pi r^2\rho(r) && (20) \end{aligned}$$

请通过数值计算，得到一系列的中子星的质量和半径关系 (M, R)。

数值计算得到的中子星的最大质量是多少？请根据计算结果作如下两幅图：(1) $\rho_c - M$; (2) $M - R$（参考文献：Oppenheimer, J. R.; Volkoff, G. M., 1939, Physical Review, vol. 55, Issue 4, pp. 374-381 https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.55.374）。

3. **选做题，不同提交。相对论性流体静力学平衡方程：Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程**。讨论相对论星体的流体静力学平衡方程。在广义相对论中，星体的引力质量 M 的定义为：

$$M = \int_0^\infty 4\pi r^2\rho(r)dr \tag{21}$$

其中 $\rho(r) = n(r)m_\mathrm{B}c^2 + \epsilon(r)$ 为流体单位体积的质能密度，这里已假设该流体由质量都为 m_B 为的粒子组成，$n(r)$ 为粒子数密度。ρ 包含了粒子的静能和流体的内能。而星体包含的总粒子数为：

$$N = \int_0^\infty 4\pi r^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2Gm(r)}{rc^2}}} n(r)dr \tag{22}$$

上式中 $m(r)$ 的定义为:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr \tag{23}$$

这里用到了广义相对论中的体积微元为: $dV = 4\pi r^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2Gm(r)}{rc^2}}} dr$。在广义相对论中,引力质量就是星体的总能量(该表达式如此简单,它包含流体的质能,引力场的能量以及它们的相互作用能!)。试根据变分 $\delta n(r) \neq 0$,以及如下的变分条件:

$$\delta M - \lambda \delta N = 0 \tag{24}$$

得到 TOV 方程的积分表达式,即方程(19)的积分结果。详细的推导请参见斯蒂芬.温伯格(Steven Weinberg)的《引力论与宇宙论(Gravitation and Cosmology)》第 11 章: Stellar Equilibrium and Collapse,第 2 小节。