概率论复习

$$E[X]=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx & ,\text{连续}\\ \sum_x x\,P\{X=x\} & ,\text{离散}\end{cases} \quad (1) \qquad P(E)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} P(E\mid Y=y)f(y)dy & ,Y\text{ 连续}\\ \sum_y P(E\mid Y=y)P\{Y=y\} & ,Y\text{ 离散}\end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)&=E[(x-E[X])^2]\\&=E[X^2]-(E[X])^2\end{aligned}$$

取条件求期望和方差:$E[X]=E\big[E[X\mid Y]\big]; Var(X)=E[Var(X\mid Y)]+Var(E[X\mid Y])$

Poisson 过程:

定义一:N(0)=0 ; 是独立增量过程 ; 在t时间内发生的次数服从泊松分布;$N(t+s)-N(s)\sim\pi(\lambda t)$; $e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$

定义二:N(0)=0;不但是独立增量过程,而且是马氏过程;$P\{N(t+h)-N(t)=1\}=\lambda(h)+o(h); P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=o(h)$

Poisson 过程的性质: 1.事件 A 是强度为λ的泊松过程$N(t)$,如果每次时间 A 都以p的概率被记录下来,为过程$M(t)$;则$M(t)\sim Poisson(p\lambda t)$

2.$N_1(t)\sim Poisson(\lambda_1 t), N_2(t)\sim Poisson(\lambda_2 t)$,若$N_1(t),N_2(t)$独立,则$N_1(t)+N_2(t)\sim Poisson(\lambda_1+\lambda_2)$

3.两次时间发生的时间间隔$X_n\sim Exp(\lambda)$(指数分布)$f_T(t)=\lambda e^{-\lambda t}; P(T\geq t)=e^{-\lambda t}$

4.第n个事件发生的时刻$W_n\sim\Gamma(n,\lambda)$ (Gamma 分布) $\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$

指数分布的几个性质: n 个指数分布的和为伽马分布(n,λ);$P(X_1<X_2)=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$

多个指数分布的最小值$min(X_1,X_2,\ldots,X_n)$是参数为$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$的指数分布。

Poisson 过程的数字特征:$\mu_X(t)=EX(t)=\lambda t$; $DX(t)=Var[X(t)]=E[X(t)-\mu_X(t)]^2=\lambda t$

$$E[X(t)-X(s)]=\lambda(t-s)\ ;\ R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=\lambda s(\lambda t+1)$$

$B_X(t)=Cov(s,t)=R_X(s,t)-\mu_X(s)\mu_X(t)=\lambda s(\lambda min\{s,t\})$; $g_X(\mu)=E\big[e^{i\mu X(t)}\big]=e^{\lambda t(e^{i\mu}-1)}$(这里的$i$是常数,不是虚数单位)

$$E[N(s)N(t)]=E\big[N(s)\big(N(t)-N(s)+N(s)\big)\big]=EN(s)E\big(N(t)-N(s)\big)+E[N(s)^2]$$

$P(N(s)=k\mid N(t)=n)=\frac{P(N(s)=k,N(t)-N(s)=n-k)}{N(t=n)}=\frac{s^k(t-s)^{n-k}}{t^n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\ (s<t)$

复合泊松过程:$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$; $EX(t)=EN(t)EY; VarX(t)=EN(t)VarY+VarN(t)(EY)^2$

$$g_{X(t)(s)}=e^{\lambda t(g_Y(s)-1)}$$

矩母函数:$g_{N(t)}=Ee^{\mu N(t)}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{\mu}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{\mu}\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}\sum *=e^{\lambda t(e^{\mu}-1)}$

常见分布:

分布	$P(X=x)$	矩母函数	EX	Var(X)
$Poisson(\lambda t)$	$e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$	$e^{\lambda t(e^{\mu}-1)}$	λt	λt
均匀$U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{e^{\mu a}-e^{\mu b}}{\mu(a-b)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数$Exp(\lambda)$	$\lambda e^{\lambda x}$	$\frac{\lambda}{\lambda-\mu}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
伽马$\Gamma(n,\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-\mu}\right)^n$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$
正态$N(\mu,\sigma)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$	μ	σ^2

常考判断

1.Poisson 过程是平稳独立增量过程,Poisson 过程是 Markov 过程,Poisson 过程是非平稳过程。

2.宽平稳过程不一定是严平稳过程;严平稳过程不一定是宽平稳过程;**严平稳且二阶矩存在的过程是宽平稳过程**;

3.独立增量过程是马氏过程;齐次马氏链 一步转移概率与时刻无关;对于齐次马氏链,初始分布和一步转移概率可以确定任意时刻马氏链的状态分布;

4.有限状态马氏链至少存在一个常返态(至少存在一个正常返态);状态有限的不可约马氏链,所有状态都是(正)常返态(吸收态一定是常返态)

5.若马氏链的初始分布是平稳分布,则任意时刻的分布是平稳分布,此时,马氏链是严平稳的。状态有限的马氏链必有平稳分布

6.如果i是常返态,状态i与状态j互达,则j也是常返态。从常返态出发只能到达常返态。

Markov 过程

1.状态分布:画出状态转移图,可以互达的为一类,分类(是否可约,常返态、瞬过态,周期)

2.是否存在平稳分布:只要是有限状态,平稳分布存在,列线性方程组求解;

3.求极限分布,对于不可约的非周期正常返态的 Markov 过程,极限分布就是平稳分布。如果含有多个类,可以把矩阵分块求极限

4.状态的常返性:求$f_{ii}^1,f_{ii}^2,\cdots,f_{ii}^n$; $f_{ii}=\sum f_{ii}^k$;若$f_{ii}=1$为常返态,$f_{ii}<1$是瞬过态。或者若$\sum_{n=1}^{\infty}P_{ii}^{(n)}<\infty$,则状态$i$常返;

$\mu_i=\sum nf_{ii}^n$,$\mu_i=\infty$是零常返的,$\mu_i<\infty$是正常返的。

5.状态的周期性:$P_{ii}^{(n)}>0(f_{ii}^n>0)$,$n$的最大公约数$d$为周期,$d=1$称为非周期的。

6.Markov 过程平稳分布个数的决定因素：
(a).不存在平稳分布：正常返状态集为空集；(b).存在唯一平稳分布：只有一个正常返的不可约闭集；(c).无穷多个平稳分布：至少存在两个以上的正常返不可约闭集。
对于不可约马氏链，正常返 ⇔ 有平稳分布。非周期的不可约马氏链是正常返的⇔ 存在平稳分布，且平稳分布就是极限分布
Markov 链的基本极限定理：
1.状态i是瞬过的或零常就返的，则$\lim_{n\to\infty}P_{ii}^n=0$; 2.状态i为周期为d的常返状态，$\lim P_{ii}^n=\frac{d}{\mu_i}$; 3.状态$i$是非周期的正常返态，则$\lim P_{ii}^n=\frac{1}{\mu_i}$
注意下面这个题与求平稳分布的区别
X_n为区间[0,3]上的随机游动，转移概率矩阵为式(4)：求粒子由 k 出发而被 0 吸收的概率p_k及它被吸收的平均步数v_k, $(k=1,2,3)$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ \frac13&\frac13&\frac13&0\\ 0&\frac13&\frac13&\frac13\\ 0&0&1&0\end{pmatrix}\quad(4)\quad \begin{cases}p_0=1\\ p_1=\frac13p_0+\frac13p_1+\frac13p_2\\ p_2=\frac13p_1+\frac13p_2+\frac13p_3\\ p_3=p_2\end{cases} 及 \begin{cases}v_0=0\\ v_1=\frac13(v_0+1)+\frac13(v_1+1)+\frac13(v_2+1)\\ v_2=\frac13(v_1+1)+\frac13(v_2+1)+\frac13(v_3+1)\\ v_3=v_2+1\end{cases}\quad(5)$$

解：$p_k=P\{X_T=0\mid X_0=k\}, v_k=E(T\mid X_0=k), (k=0,1,2,3)$ 列方程如式(5)所示。

平稳过程

(宽)平稳过程：$EX(t)=c, R_X(\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$,二阶矩存在。
W-K 公式：$S(w)=\int R(\tau)e^{-iw\tau}d\tau=2\int_0^\infty R(\tau)cos(w\tau)d\tau; S(w)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}e^{-i}\quad R(\tau); R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int S(w)e^{iw\tau}dw$
$\cos\omega t=\frac12\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right); \delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int e^{i\omega t}dt$, δ函数为偶函数。$\int\delta(t)e^{-iwt}dt=1$
则$\int\cos(\omega_0t)e^{-i\omega t}dt=2\pi[\delta(w_0-w)+\delta(w_0+w)]$
谱密度函数：非负实值偶函数，分母不得有实根。
均值遍历性: $1.\lim_{N\to\infty}\sum_{\tau=0}^{N-1}R(\tau)=0; \lim_{T\to\infty}\frac1T\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)R(\tau)d\tau=0$
2.推论：$\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)|\,d\tau<\infty$；对平稳序列而言，$R(\tau)\to0$,均值遍历性成立
例:$\int|R(t)|dt\le\int\frac{1}{2\sqrt3}e^{-\sqrt3|t|}+\frac12e^{-2|t|}dt=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt3}e^{-\sqrt3t}+\frac12e^{-2t}=\frac13+\frac14<\infty$

补充

1.$\int_0^\infty t^k e^{-t}dt=\Gamma(k+1)=k!; \sum_{k=0}^\infty\frac{m^k}{k!}=e^m$
2.$X_i\sim Exp(\lambda); \sum X_i\sim\Gamma(n,\lambda)$
3.若$\{X(t)\}$为 Gauss 平稳过程，则$X(t)\sim N\big(0,R(0)\big)$令$t=0$, $R(0)$即为$X(t)$的方差。
4.$Ee^{\alpha U_i}=\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha t-1}$(均匀分布$U(0,t)$的矩母函数)
5.$\frac12+\cos x+\cos2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac12\right)x}{2\sin\frac x2}$
6.蓝车首先到达的概率:

$$\begin{aligned}P(T_1\le T_2,T_1\le T_3)&=\int_0^\infty P(T_2\ge t,T_3\ge t)f_{T_1}(t)dt\\&=\int_0^\infty P(N_2(t)=0,N_3(t)=0)f_{T_1}(t)dt=\int_0^\infty\lambda_1e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}dt=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\end{aligned}\quad(6)$$

7.白车先于黄车到达，落后于蓝车的概率：

$$\begin{aligned}P(T_1\le T_2\le T_3)&=\int_0^\infty P(T_1\le t,T_3\ge t)f_{T_2}(t)dt=\int_0^\infty P(N_1(t)\ge1)P(N_3(t)=0)f_{T_2}(t)dt\\&=\int_0^\infty\left(1-e^{-\lambda_1t}\right)e^{-\lambda_3t}\lambda_2e^{-\lambda_2t}dt=\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}-\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\end{aligned}\quad(7)$$

8.更新过程$N(t)\ge k\leftrightarrow W_k\le t$

$$C(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}C_ie^{-\alpha W_i}$$

9. $$E[C(t)|N(t)=n]=nEC_iEe^{-\alpha W_i}=nEC_iEe^{-\alpha U_i}=n\mu\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha t}; EC(t)=EN(t)\mu\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha t}=\lambda\mu\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}$$