7.1.5 无穷乘积*

设 $p_1, p_2, \cdots$ 是一个非零实数列. 称

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 p_2 \cdots p_n \cdots$$

为一个无穷乘积. 称

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k = p_1 p_2 \cdots p_n$$

为这个无穷成绩的前 n 项部分乘积. 若数列 $\{P_n\}$ 收敛于数 P, 而且 $P \neq 0$, 则称这个无穷乘积是收敛的, 记为

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P.$$

若数列 $\{P_n\}$ 发散或者收敛于 0, 则称这个无穷乘积是发散的.

例 1 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ 收敛于 $\frac{1}{2}$.

证明 因为

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \\ &= \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdots\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)} \\ &= \frac{n+2}{2(n+1)}\to\frac{1}{2}\ (n\to\infty), \end{aligned}$$

所以

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

注 Euler 曾得到

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

例 2 当 $|x| < 1$ 时, $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + x^{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{1-x}$.

证明 因为

$$\begin{aligned} P_n &= (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\left(1+x^{2^{n-1}}\right) \\ &= \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\left(1+x^{2^{n-1}}\right)}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{2^n}}{1-x} \\ &\to \frac{1}{1-x}\ (n \to \infty), \end{aligned}$$

所以 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + x^{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{1-x}$.

例 3 无穷乘积 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$ 收敛.

证明 因为 $\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} > 1$, 所以 $P_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$ 是严格递增数列. 另外,

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{2k-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}$$
$$= \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{2k-1}\prod_{k=2}^{n+1}\frac{1}{2k-1}$$
$$= \frac{1}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2.$$

因此

$$\ln P_n = 2\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1} - \ln(2n+1).$$

由于

$$
\begin{aligned}
\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} \\
&= \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{2k-1}\,dx+1 \\
&< \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{2x-1}\,dx+1 \\
&= \int_{1}^{n}\frac{1}{2x-1}\,dx+1 \\
&= \frac{1}{2}\ln(2n-1)+1.
\end{aligned}
$$

因此 $\ln P_n < \ln\frac{2n-1}{2n+1}+2<2$. 这说明 P_n 有界. 故 $\{P_n\}$ 收敛.

以后我们会证明该无穷乘积收敛到 $\frac{\pi}{2}$.

定理 1 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty} p_n = 1.$

证明 设 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛于 $P \neq 0$. 则对于 $P_n = p_1 p_2 \cdots p_n$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P.$$

因此 $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = 1.$

例 4 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散.

证明 因为

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n} = n+1 \to +\infty,$$

所以该无穷乘积发散.

定理 2 设 $a_n > -1$. 则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充分必要条件是级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 收敛. 在收敛时, 如果该级数的和为 S, 则

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = e^S.$$

证明 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛于 $p>0$ 等价于 $P_n=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ 收敛于 p, 等价于 $\ln P_n$ 收敛于 $\ln p$. 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$$

收敛于 $\ln p$. 收敛时, 有 $\ln p = S$, 即, $p=e^S$.

以后不妨设无穷乘积的通项 $p_n = 1+a_n$ 满足 $a_n > -1$.

定理 3 若从某项起都有 $a_n > 0$ (或者 $a_n < 0$), 那么无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有相同的敛散性.

证明 无论 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 哪个收敛, 都有 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 因此不妨设 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 此时有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1.$$

不妨设从某项开始有 $a_n > 0$. 由正项级数的比较判别法的极限形式知, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有相同的敛散性. 再根据定理 2, 可知 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有相同的敛散性.

定理 4 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 那么无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有相同的敛散性.

证明 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 所以 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 因此,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}.$$

由正项级数的比较判别法的极限形式知, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(a_n - \ln(1+a_n))$ 收敛. 因而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有相同的敛散性. 再根据定理 2, 可知 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有相同的敛散性.

注 上面的定理中, 条件 "$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛" 不可去掉.

例 5 设 $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

$$\because \quad \ln(1+a_n) = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{3}a_n^3 - \frac{1}{4}a_n^4 + o(a_n^4),$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{3}a_n^3 - \ln(1+a_n)}{a_n^4} = \frac{1}{4}.$$

由正项级数的比较判别法的极限形式知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{3}a_n^3 - \ln(1+a_n) \right)$$

收敛, 因而级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$$

与级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{1}{2}a_n^2+\frac{1}{3}a_n^3\right)$$

同敛散. 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$ 收敛, 但是 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散, 因此,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{1}{2}a_n^2+\frac{1}{3}a_n^3\right)$$

发散. 故, $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 发散. 最后根据定理 2, 可知 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散.

若 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛, 则称 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ **绝对收敛**.

定理 5 若 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛, 那么它一定收敛.

证明 设 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛, 即,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$$

收敛, 则有 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$. 根据比较判别法可知 $\sum_{k=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|$ 收敛. 这可推出 $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$. 根据定理 2, 可知 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛.