HW4

3.16 在大气层的上部由于日光的作用使氧分子解离为氧原子，能引起氧解离的最长波长为 175 nm，求氧分子的束缚能.

解：$A = \frac{hc}{\lambda} = 7.09\,eV$

3.20 带电粒子在威尔逊云室中的轨迹是一小串雾滴，雾滴的线度约为 1 μm，当观察能量为 1 000 eV 的电子径迹时，其动量与经典力学量的相对偏差不小于多少？

解：$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} = 5.27\times10^{-29}\ J/s$

$p = \sqrt{2mE} = 1.71\times10^{-23}\ J/6$

$\frac{\Delta p}{p} \geq 3.24\times10^{-6}$

3.22 氢原子的 $2p_{3/2}$ 态的平均寿命是 1.6×10^{-9} s，试求这个状态的能量不确定度（即能级的自然宽度）.

解：$\Delta E = \frac{\hbar}{2\Delta t} = 2.06\times10^{-7}\,eV$

3.23 一激发态原子发射光子的波长为 600.0 nm，而光谱线的相对宽度 $\Delta\lambda/\lambda$ 为 10^{-7}，求该激发态的寿命.

解：$E = h\frac{c}{\lambda}$ $\quad \Delta E = \frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda$

$\Delta t = \frac{\hbar}{2\Delta E} = \frac{\hbar\lambda^2}{2hc\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{4\pi c}\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 1.6\times10^{-9}\,s$

3.24 有些粒子被限制在线度为 L 的一维匣子中，利用海森伯不确定关系估算它们所具有的最小动能：

(1) 电子，$L = 0.1$ nm；

(2) 电子，$L = 10$ fm；

(3) 中子（静止能量为 940 MeV），$L = 10$ fm；

(4) 质量 $m = 10^{-6}$ g 的粒子，$L = 10^{-6}$ m.

解：(1) $\langle E_k\rangle_{min} = \frac{\hbar^2}{8mL^2} = 0.95\,eV$

(2) $\langle E_k\rangle_{min} = \frac{\hbar^2}{8mL^2} = 95.25\,MeV$

(3) $\langle E_k\rangle_{min} = \frac{\hbar^2}{8mL^2} = \frac{1}{8\times16\pi^2}\left(\frac{hc}{L}\right)^2\frac{1}{mc^2} = 51.8\,keV$

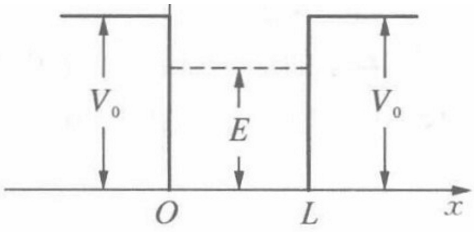
(4) $\langle E_k\rangle_{min} = \frac{\hbar^2}{8mL^2} = 8.67\times10^{-30}\,eV$

3.26 粒子在一维对称势场中运动，势场的形式如右图，即

$$\begin{cases} 0 < x < L, & V = 0 \\ x < 0,\ x > L, & V = V_0 \end{cases}$$

(1) 试推导粒子在 $E < V_0$ 情况下其中能量 E 满足的关系式；

(2) 试利用上述关系式，以图解法证明，粒子的能量只能是一些不连续的值.



题 3.26 图

解：(1) 势能函数不含时间，是定态势能场

定态薛定谔方程 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi - \frac{2m}{\hbar^2}[V(x)-E]\psi = 0$

① $x<0$ 时

方程为 $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\psi = 0$

令 $k_1 = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$

由 $\psi(-\infty)=0$，$\psi(x) = Ae^{k_1 x}$，$\frac{\psi'}{\psi} = k_1$

② $0<x<L$ 时

方程为 $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$

令 $k_2 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

方程的解为 $\psi(x) = B\sin(k_2 x + \delta)$，$\frac{\psi'}{\psi} = \frac{k_2}{\tan(k_2 x+\delta)}$

③ $x>L$ 时

方程为 $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\psi = 0$

由 $\psi(+\infty)=0$，$\psi(x) = Ce^{-k_1 x}$，$\frac{\psi'}{\psi} = -k_1$

采用 $(\ln\psi)' = \frac{\psi'}{\psi}$ 连续的边界条件，有

$$\begin{cases} \frac{k_2}{k_1} = \tan\delta \\ -\frac{k_2}{k_1} = \tan(k_2 L+\delta) = \frac{\tan k_2 L + \tan\delta}{1-\tan k_2 L\tan\delta} \end{cases}$$

消去δ，解得 $\tan k_2L=\dfrac{\frac{2k_2}{k_1}}{\frac{k_2^2}{k_1^2}-1}$

即 $\tan\dfrac{\sqrt{2mE}\,L}{\hbar}=\dfrac{2\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{V_0-E}}}{\frac{E}{V_0-E}-1}=\dfrac{2\sqrt{E(V_0-E)}}{2E-V_0}$

(2) 由 $\tan\delta=-\tan(k_2L+\delta)$，得 $k_2L+\delta=n\pi-\delta\ (n\in Z)$

$\delta=\dfrac{n\pi-k_2L}{2}$

代入 $\dfrac{k_2}{k_1}=\tan\delta$ 得 $\dfrac{k_2}{k_1}=\tan\left(\dfrac{n\pi}{2}-\dfrac{k_2L}{2}\right)=\begin{cases}\cot\dfrac{k_2L}{2}, & n\text{为奇数}\\ -\tan\dfrac{k_2L}{2}, & n\text{为偶数}\end{cases}$

令 $\xi=\dfrac{k_2L}{2}$，$\eta=\dfrac{k_1L}{2}$，

则 $\eta=\begin{cases}\xi\tan\xi, & n\text{为奇数}\\ -\xi\cot\xi, & n\text{为偶数}\end{cases}$

又由于 $k_1=\sqrt{\dfrac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$，$k_2=\sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$

$\therefore\ \xi^2+\eta^2=\dfrac{mV_0L^2}{2\hbar^2}$

作 $\begin{cases}\eta=\xi\tan\xi\\ \xi^2+\eta^2=\dfrac{mV_0L^2}{2\hbar}\end{cases}$ 和 $\begin{cases}\eta=-\xi\cot\xi\\ \xi^2+\eta^2=\dfrac{mV_0L^2}{2\hbar}\end{cases}$ 曲线图，

交点只能是离散的一个个点，故粒子的能量只能是一些不连续的值