7.3.4 幂级数的性质

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $I=(-R,R)$ 中收敛于 $S(x)$.

定理 1 幂级数在 $I=(-R,R)$ 内任何闭子区间上一致收敛, 因而, 和函数 $S(x)$ 在 I 内连续.

证明 任给 $0<r<R$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n r^n|$收敛, 而当 $|x|\leqslant r$时

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n r^n|,$$

所以根据 Weierestrass 判别法 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r,r]$ 上一致收敛. 对于 I 中任意闭区间 J, 一定存在 r, 使 $J\subset[-r,r]\subset(-R,R)$, 所以在 J 上一致收敛. 由于幂级数的通项连续, 故, 和函数连续.

定理 2 幂级数的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $I=(-R,R)$ 中可微, 并有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1},$$

且求导后的幂级数的收敛半径仍为 R.

证明 只需证明 $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ 的收敛半径为 R. 任取 $x_0\in(-R,R)$, 存在 r 满足 $|x_0|<r<R$, $\sum|a_nr^n|<\infty$, 因此 $|a_nr^n|<M$ 有界, 所以

$$|na_nx_0^{n-1}|=|a_nr^n|\cdot\frac{n}{r}\cdot\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}\leqslant M\frac{n}{r}\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}.$$

因为 $\sum\frac{n}{r}\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}$ 当 $|x_0|<r$ 时收敛, 所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ 在 x_0 绝对收敛. 也就是说 $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ 的收敛半径 $R'\geqslant R$.

如果 $R'>R$, 则存在 x_0: $R'>x_0>R$, $\sum|na_nx_0^{n-1}|<\infty$. 因为

$$|a_nx_0^n|\leqslant|na_nx_0^n|=|x_0|\cdot|na_nx_0^{n-1}|$$

所以 $\sum|a_nx_0^n|$ 收敛, 这是不可能的, 所以 $R'=R$.

定理 3 幂级数的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $I=(-R,R)$ 内可积，且对 $x\in(-R,R)$ 有

$$\int_0^x S(t)\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

并且积分后得到的幂级数的收敛半径仍为 R.

例 1 已知幂级数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 在整个数轴上收敛，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=S(x)\qquad(-\infty<x<+\infty),$$

解此微分方程得

$$S(x)=Ae^x.$$

由于 $S(0)=1$，故 $S(x)=e^x$，即

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad(-\infty<x<+\infty).$$

例 2 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ 的和.

解 容易知道这个幂级数的收敛半径为 1, 但在 $x = \pm 1$ 都发散, 故收敛区间为 $(-1, 1)$. 令 $S(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 再令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 在区间 $[0, x]$ 上逐项积分, 得

$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},$$

再将等式两端对 x 求微商就得到 $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, 所以原级数的和函数是

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$$

由此又可求出一些数项级数的和. 例如分别令 $x = \frac{1}{2}$ 和 $x = \frac{1}{3}$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

例 3 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 的和函数.

解 因为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2},\ x\in(-1,1),$$

在区间 $[0,x]$ 上逐项积分可得

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ x\in(-1,1).$$

定理 4 (Abel **第二定理**) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$. 如果在 $x = R$ 处级数收敛, 那么其和函数 $S(x)$ 在 $x = R$ 处左连续; 如果级数在 $x = -R$ 处收敛, 那么 $S(x)$ 在 $x = -R$ 处右连续.

证明 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R$ 处收敛, 即, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛. 因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n (\frac{x}{R})^n,$$

$\{(\frac{x}{R})^n\}$ 在 $[0, R]$ 上单调递减且一致有界, 由 Abel 定理知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0, R]$ 上一致收敛, 因而 $S(x)$ 在 $[0, R]$ 上连续. 同理可证级数在 $x = -R$ 处收敛时, $S(x)$ 在 $x = -R$ 处右连续.

例 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

定理 5 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 都收敛. 若它们的 Cauchy 乘积 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 也收敛, 则有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

证明 在所给条件下, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 以及 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的收敛半径都 $\geqslant 1$, 且它们都在 $x=1$ 收敛, 因此根据 Abel 第二定理, 这三个幂级数都在 $x=1$ 连续. 在等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

中令 $x \to 1$ 即得所证.

7.3.5 幂级数的一般形式

幂级数更一般的形式是在 x_0 展开的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

相当于前面讨论的幂级数在所定义的数轴上做了一个平移. 收敛区间也就平移到以 x_0 为中心的一个区间上：(x_0-R, x_0+R) 以及可能的端点 x_0-R (或 x_0+R) .

7.3.6 函数的 Taylor 展开式

到此为止, 我们确定了幂级数的收敛区域, 并研究了它的和函数的各种性质. 但在实际应用中, 所遇到的经常是相反的问题, 即函数 $f(x)$ 在给定的区间上是否可以展开成一个幂级数?

由 Taylor 定理知, 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内具有任意阶微商, 则

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

而 ξ 是 x_0 与 x 之间的一点. 由此可得:

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

定理 6 设函数 $f(x)$ 在区间 (x_0-R, x_0+R) 上有任意阶微商, 则 $f(x)$ 在 (x_0-R, x_0+R) 上可以展成 Taylor 级数的充分必要条件是对这区间内的任意点 x, 都有

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0,$$

特别, 当 $f(x)$ 的各阶微商在区间 (x_0-R, x_0+R) 内任何闭区间上一致有界, 则 $f(x)$ 在这区间上可以展成 Taylor 级数

几个重要函数的幂级数展开: 首先是:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots, \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \cdots, \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(x+1)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots,$$

$$(-1 < x < 1),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad (-1 < x < 1].$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$