

正弦交流电路

◎ 教学内容

- 正弦电流电路的基本概念和相量分析法
- 基尔霍夫电路定律KCL,KVL的相量表达形式
- 正弦电流电路的相量分析方法
- 相量、阻抗和导纳概念
- 功率相关概念

正弦电流

◎ 正弦电流

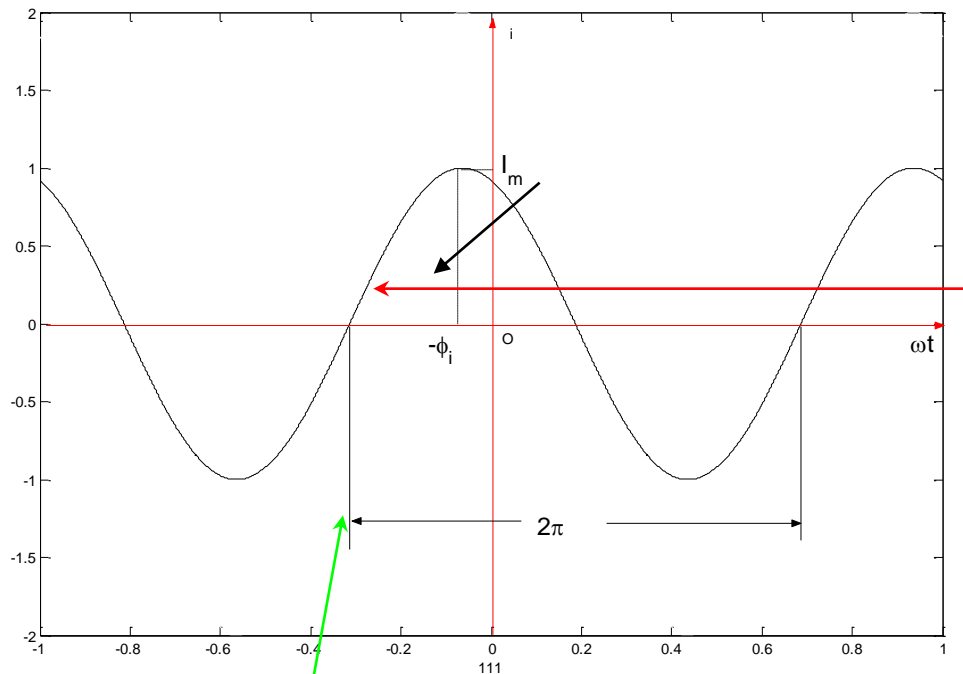
- 电流量值随时间按正弦规律变化成为正弦电流，简称交流(Alternate Current)

◎ 交流电压

- 电压量值随时间按正弦规律变化成为正弦电压(Sinusoidal Voltage)

正弦电流

初始相位
Initial Phase



幅度
Amplitude

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

角频率 (rad/s)

正弦电流电路 正弦电流

◎ 一些术语

- 频率 单位时间内的电流重复次数 单位赫兹(Hz)
- 有效值 当交流有效值和直流一样时，二者做工的平均功率一致

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

- 周期电流的有效值是瞬时值的平方在一个周期内的平均值的平方根
 - 即与该周期电压（电流）作用于给定电阻在一个周期内做的功的直流的幅度等效
- 正弦电流的有效值 $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

正弦电流有效值

◎ 几点注意事项

- 正弦电流电路中变量大写字母 不带下标 m 均指有效值

$$I, U$$

- 正弦电流电路中大写字母变量带 m 的下标均指振幅

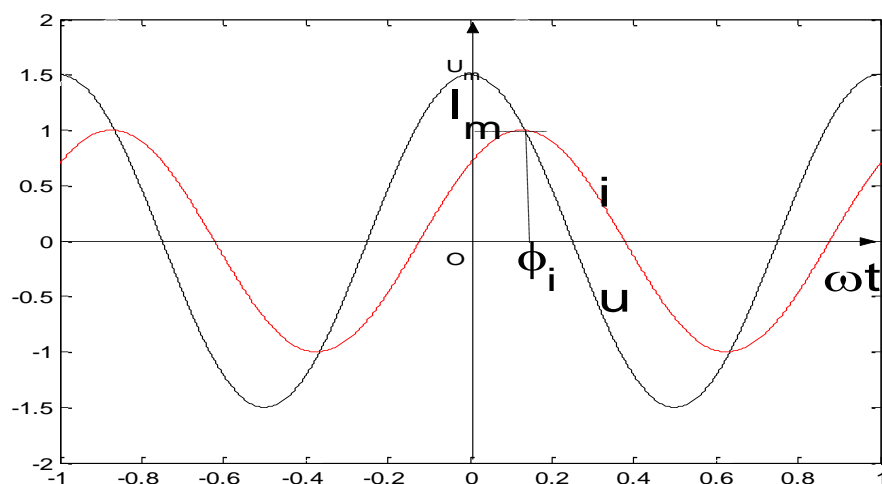
$$I_m, U_m$$

- 正弦电流电路中小写字母变量一般指瞬时值

$$i, u$$

正弦电流电路 正弦电流

$$\begin{aligned} u &= U_m \cos(\omega t + \psi_u) \\ i &= I_m \cos(\omega t + \psi_i) \end{aligned} \longrightarrow \psi = \psi_u - \psi_i$$



正弦量的相位均为时间的函数，由于角频率为一常数，相位差由初始相位差确定

$\psi_u - \psi_i > 0$ 电压超前电流

$\psi_u - \psi_i = 0$ 电压电流同相

$\psi_u - \psi_i < 0$ 电压滞后电流

电容电感器件

电压电流关系

$$i = C \frac{du}{dt}$$

$$u = L \frac{di}{dt}$$

⊙ 正弦电路特点

- 储能元件，充放电
- 必须使用微分/积分才能表达电路行为
- 不能利用经典的直流电路分析方法

正弦电流电路

◎ 驱动信号

- 激励不再是恒定的电压或者电流信号

◎ 器件

- 在正弦电路中，电容、电感均有吸收能量、释放能量的周期过程，相对于直流电路复杂

◎ 电路方程

- 电路方程不再是简单的线性方程组，由于电容、电感的存在，电路方程表现为积分、微分方程组

复数的基本概念

- 复数的直角坐标表示法

$$A = a + jb, a, b \in R, j = \sqrt{-1}$$

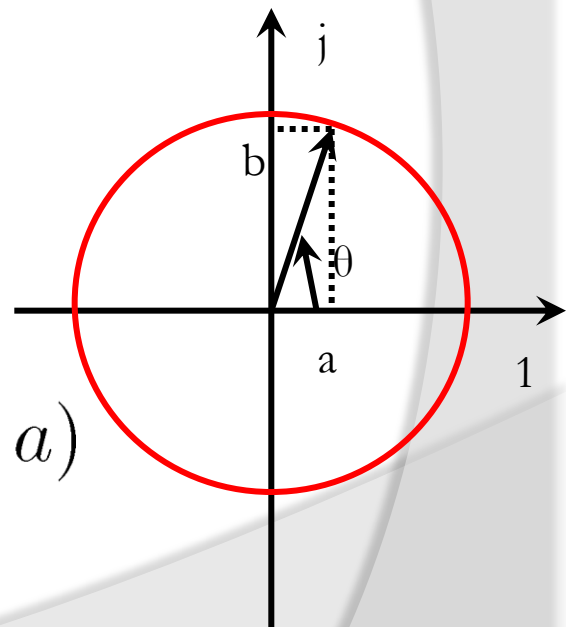
- 复数的极坐标表示法

$$A = |A| e^{j\theta} = |A| \angle \theta$$

- 直角坐标和极坐标的关系

$$|A| = \sqrt{a^2 + b^2}, \theta = \arctan 2(b, a)$$

$$a = |A| \cos \theta, b = |A| \sin \theta$$



复数的基本运算

◎ 复数加减法 实部与虚部分别加减

◎ 共轭复数 $X = a + jb$, $X^* = a - jb$; $X = |X| e^{j\theta_x}$, $X^* = |X| e^{-j\theta_x}$

◎ 复数乘法

$$X = |X| e^{j\theta_x}, Y = |Y| e^{j\theta_y}, XY = |X| |Y| e^{j(\theta_x + \theta_y)}$$

$$X_1 = a_1 + jb_1, X_2 = a_2 + jb_2$$

$$\Rightarrow X_1 X_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

◎ 复数除法

$$X_1 = a_1 + jb_1, X_2 = a_2 + jb_2, X_1/X_2 = X_1 X_2^* / |X_2|^2$$

$$X = |X| e^{j\theta_x}, Y = |Y| e^{j\theta_y}, X/Y = X Y^* / |Y|^2 = |X| e^{j(\theta_x - \theta_y)} / |Y|$$

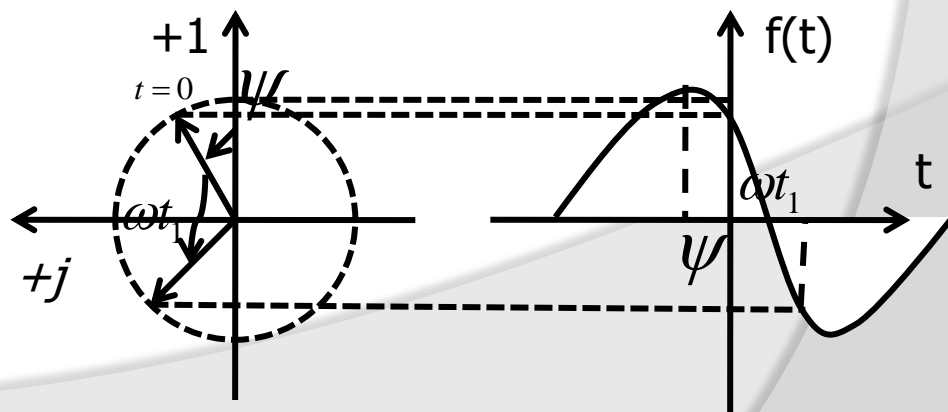
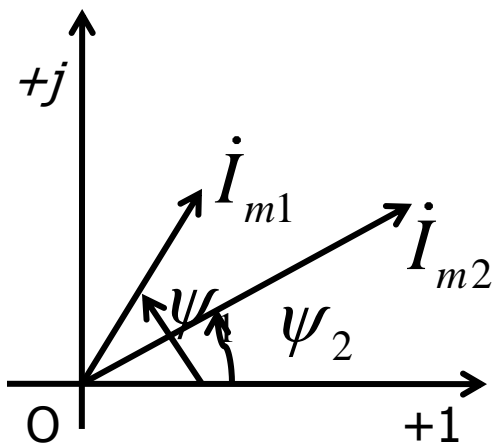
正弦量的相量表示法

$$f(t) = A_m \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re} \left\{ \dot{A}_m e^{j\omega t} \right\}$$

$$\dot{A}_m = A_m e^{j\phi} = A_m \angle \phi$$

对于**角频率相同**的两个信号，其相位差仅仅取决于初始相位，因此判断2个正弦信号仅仅需要**比对相量**即可

ω 给定后，该复数唯一标定一个正弦量



正弦电流电路

相量运算规则

- 唯一性 2个同频率正弦量相等的条件是他们的相量相等

$$\operatorname{Re} \left\{ \dot{A}_{m1} e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \dot{A}_{m2} e^{j\omega t} \right\} \Leftrightarrow \dot{A}_{m1} = \dot{A}_{m2}$$

- 线性性质 同频率正弦量的线性组合等价于他们的相量的同样的线性组合

$$f = \sum_{k=0}^{N-1} b_k f_k(t) \Leftrightarrow \dot{f} = \sum_{k=0}^{N-1} b_k \dot{f}_k$$

相量运算规则

正弦量的**微分**的相量等于原相量与频率因子的**乘积**

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \phi), y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$
$$\Rightarrow \dot{Y} = j\omega \dot{X}$$

正弦量的**积分**的相量等于原相量与频率因子的**商**

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \phi), y(t) = \int x(t) dt$$
$$\Rightarrow \dot{Y} = \frac{1}{j\omega} \dot{X}$$

正弦信号的相量表示方式举例

分别写出 $i_1 = 3 \cos(\omega t) A$, $i_2 = 4 \cos(\omega t - 150^\circ)$, $i_3 = -5 \cos(\omega t - 60^\circ)$,
 $i_4 = 6 \sin(\omega t + 30^\circ)$ 的相量

$$\dot{I}_{1m} = 3 \angle 0^\circ$$

$$\dot{I}_{2m} = 4 \angle -150^\circ A$$

$$i_3 = -5 \cos(\omega t - 60^\circ) = 5 \cos(\omega t + 120^\circ) \Rightarrow \dot{I}_{3m} = 5 \angle 120^\circ A$$

$$i_4 = 6 \sin(\omega t + 30^\circ) A \Rightarrow \dot{I}_{4m} = 6 \angle -60^\circ A$$

注意:

相量表达中**幅度部分**一定要是**非负实数**, 相位的计算使用按照**余弦函数**计算的相位, 很容易疏忽用正弦函数的相位认定为相量表达形式的相位。

基尔霍夫定律的相量形式

KCL时域形式

KCL相量形式

$$\sum i = 0 \Rightarrow \sum \dot{I}_m = 0, \sum \dot{I} = 0$$

激励为**同频率电源**时，流入一个节点电流的相量的代数和为0
输入电流的相量的代数和=输出电流的相量的代数和

KVL时域形式

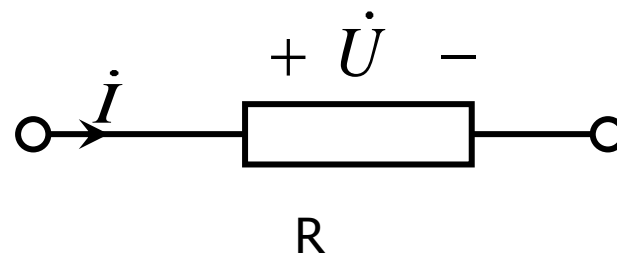
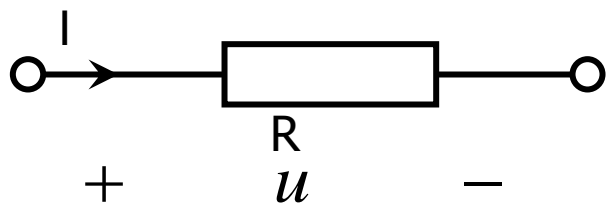
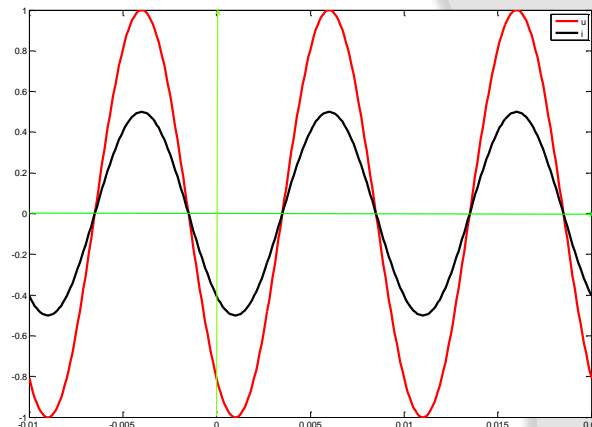
KVL相量形式

$$\sum u_k = 0 \Rightarrow \sum \dot{U}_m = 0, \sum \dot{U} = 0$$

激励为**同频率电源**时，回路上所有支路电压相量的代数和为0

电阻元件上的电压和电流的关系

- 关联参考方向下 $\dot{U} = R\dot{I}$
- 正弦信号的相量表示法可以看出 $\dot{U}_m = R\dot{I}_m, \dot{U} = R\dot{I}, \psi_u = \psi_i$



正弦信号激励下，电阻两端的电压和电流相位一致，电压有效值（振幅）与电流有效值（振幅）之间的比值为电阻 R

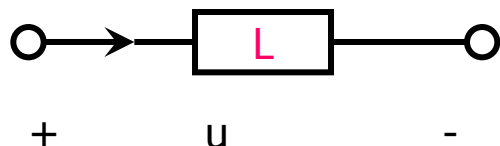
电感元件的电压电流的相量关系

- 时域的电压电流关系

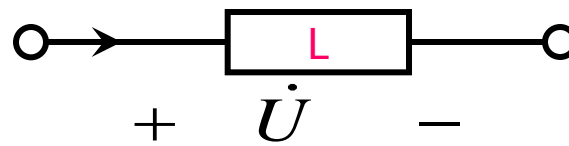
$$u = L \frac{di}{dt}$$

- 相量形式下的电压电流关系

$$\dot{U}_m = j\omega L \dot{I}_m$$



$$\dot{U} = j\omega L \dot{I}$$



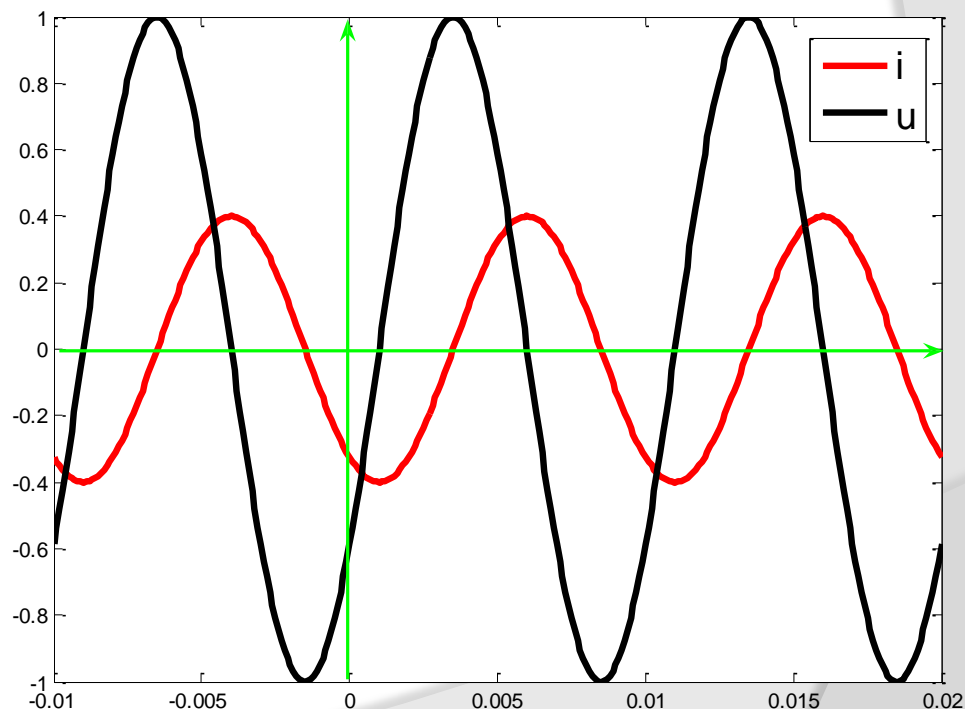
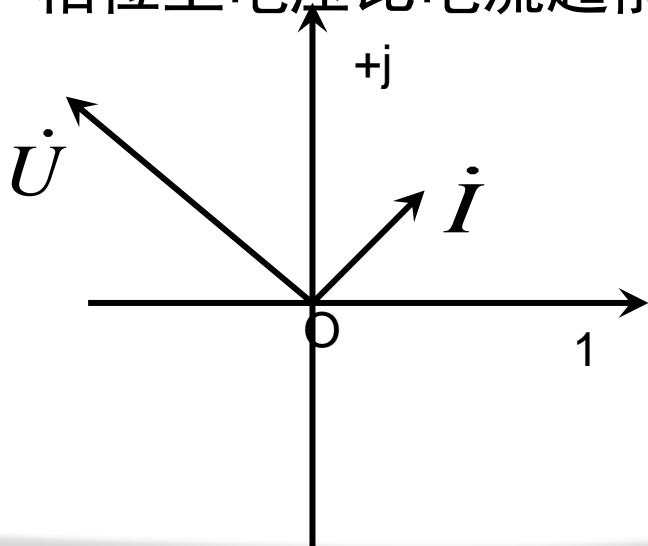
电感的感抗 $X_L = \omega L$ 单位为 Ω , 于是有:

$$\dot{U}_m = jX_L \dot{I}_m, \dot{U} = jX_L \dot{I} \quad \text{微分关系转换为线性关系}$$

电感元件的电压电流的相量关系

$$\psi_u - \psi_i = 90^\circ$$

电感元件中电压和电流的幅度的比值为电感的感抗
感抗为频率和电感量的乘积
相位上电压比电流超前90度



电容元件的电压电流相量关系

电容元件上电压电流的时域形式：

$$i = C \frac{du}{dt}$$

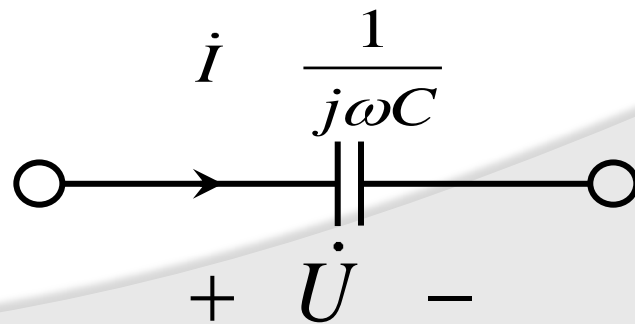
相量形式的电压电流关系为：

$$\dot{I}_m = j\omega C \dot{U}_m, \dot{I} = j\omega C \dot{U}$$

电容的容抗 $X_C = -1/\omega C$ ，单位为 Ω ，于是有：

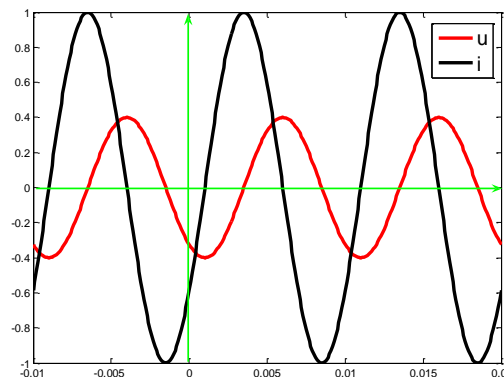
$$\dot{U}_m = jX_C \dot{I}_m$$

$$\dot{U} = jX_C \dot{I}$$



RLC电路元件电压电流相量关系

$$\psi_u = \psi_i - 90^\circ$$



电容C上电压电流的有效值（振幅）之比等于容抗 X_C 的绝对值；电压比电流相位滞后90度

电压电流相量形式关系总结

- 正弦电流电路下利用相量形式表达后，R、L和C元件的电压电流的相量关系都是一个线性关系，类似于线性直流电路下的电阻元件上的电压电流关系
- 该线性关系的常数不再是一个实数，而是一个复数，该复数的幅度决定了电压电流振幅的比值，复数的相位决定电压电流相位的超前和滞后

电路对比

◎ 正弦电流电路-相量形式

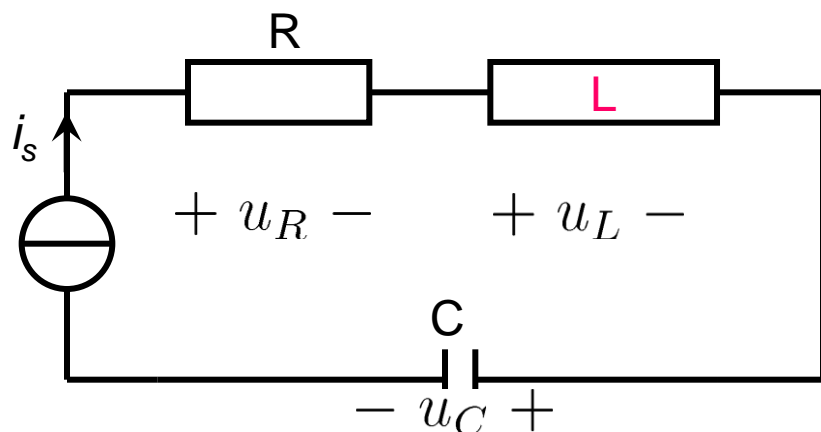
- 相量形式的基尔霍夫电压电流定律
- 相量形式下，电压电流关系为线性关系，比例系数为复阻抗

◎ 线性直流电路

- 基尔霍夫电压、电流定律
- 电压电流关系为线性关系，比例系数为阻值

正弦电流电路在使用相量形式表达后，具有和线性直流电路类似的电路结构和元件电压电流关系，因此可以利用直流电路的分析方法来分析正弦电流电路

RLC电路元件的电压电流关系相量形式



$$i_s = 0.2 \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ A}, R = 20\Omega$$
$$C = 5\text{mF}, L = 3\text{H}, \omega = 10\text{rad/s}$$

Question : u_R, u_L, u_C

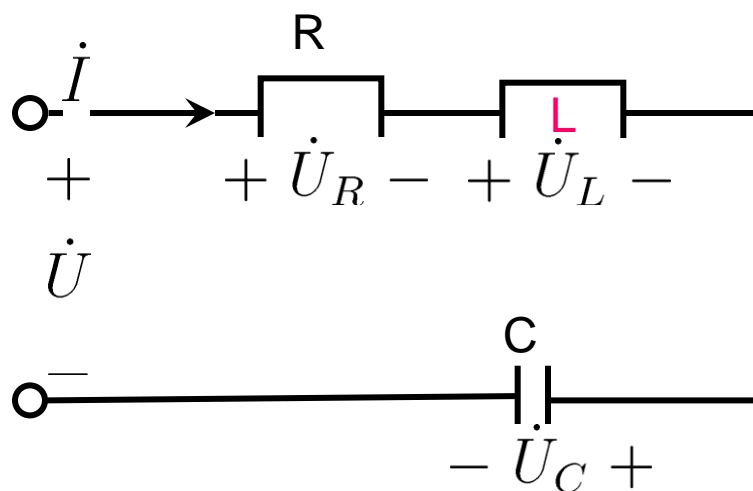
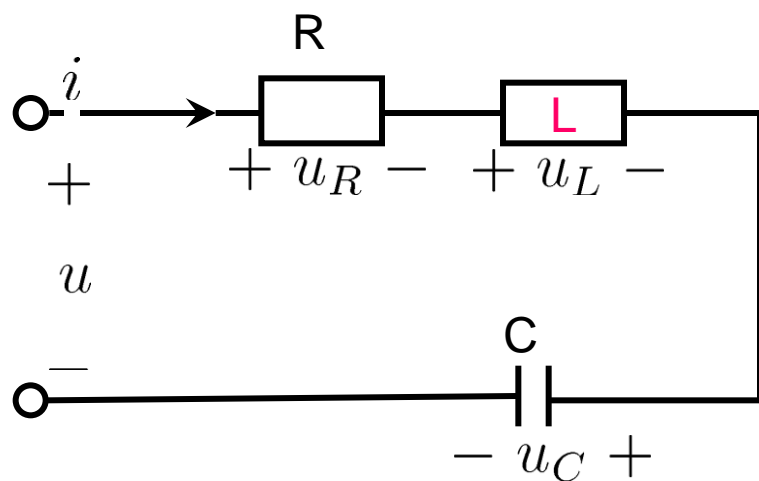
$$\dot{U}_R = \dot{I}_s R = 0.1\sqrt{2}\angle 45^\circ \times 20\Omega = 2\sqrt{2}\angle 45^\circ$$
$$u_R(t) = 4 \cos(\omega t + 45^\circ)$$

$$X_L = \omega L = 30\Omega, \dot{U}_L = jX_L \dot{I}_s = 3\sqrt{2}\angle 135^\circ$$
$$u_L = 6 \cos(\omega t + 135^\circ)$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -20\Omega, \dot{U}_C = jX_C \dot{I}_s = 2\sqrt{2}\angle -45^\circ$$
$$u_C = 4 \cos(\omega t - 45^\circ)$$

RLC串联电路的阻抗

RLC串联电路是交流电路的典型电路，重点研究支路上电压相量和电流相量的关系



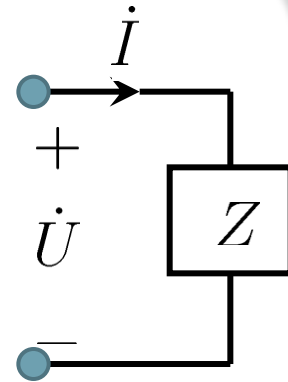
$$\text{KVL: } \dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

$$\dot{U}_R = R\dot{I}, \dot{U}_L = j\omega L\dot{I}, \dot{U}_C = \dot{I} / (j\omega C)$$

RLC串联电路的阻抗

$$\dot{U} = \dot{I} \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right)$$

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + j(X_L + X_C)$$



$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \angle \psi_u}{I \angle \psi_i} = \frac{U}{I} \angle (\psi_u - \psi_i) = |Z| \angle \varphi$$

阻抗模

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2} \\ &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \end{aligned}$$

阻抗角

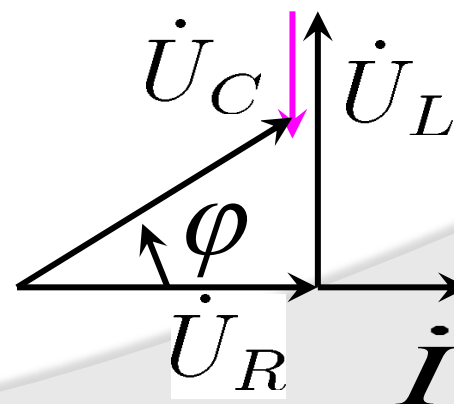
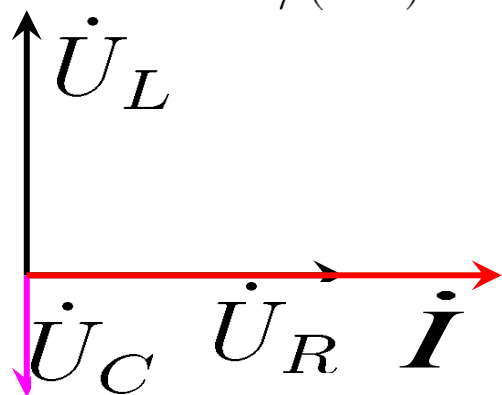
$$\varphi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

思考：何时电压超前于电流，何时滞后于电流？

关于阻抗的讨论

◎ 阻抗Z的特性

- 阻抗模决定电压电流的幅度比
- 阻抗角决定电压超前电流的相位
 - $\omega L > 1/(\omega C)$, 阻抗角 >0 , 电压超前, 呈现感性
 - $\omega L < 1/(\omega C)$, 阻抗角 <0 , 电压滞后, 呈现容性
 - $\omega L = 1/(\omega C)$, 阻抗角 $=0$, 同相位

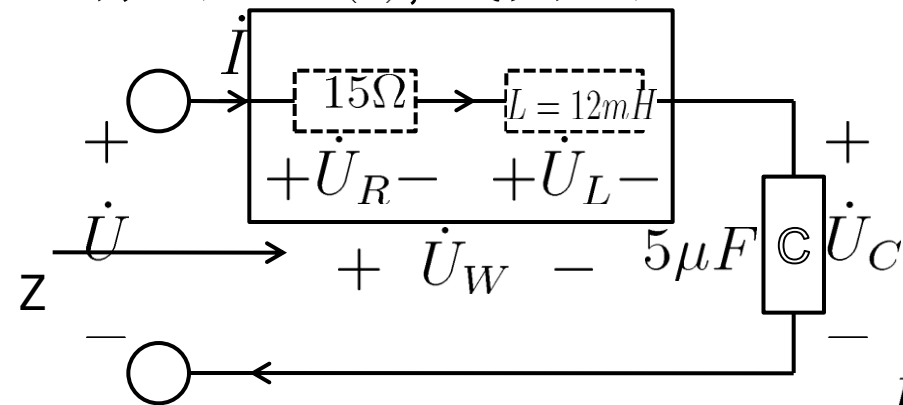


关于阻抗的讨论

- ◎ RLC串联电路中，电感上电压比电流超前 90° ，电容上电压比电流滞后 90° ，两者串联后 $u = u_L + u_C$ 考虑到相位的问题，则串联后电压电抗电压的振幅等于 u_L 和 u_C 的振幅差(why?)

RLC串联电路应用举例

一个 $R = 15\Omega$, $L = 12mH$ 的线圈, 与一个 $5\mu F$ 的电容串联
电压 $u = 100 \cos(\omega t)V$, $\omega = 5000 rad/s$ 。求取电流 i , 电容器
端电压 $u_C(t)$, 线圈电压 $u_w(t)$



计算电流相量:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = 4 \angle -53.1^\circ A$$

计算电感、电阻、电容电压相量:

$$\dot{U}_C = \dot{I} / (j\omega C) = 80\sqrt{2} \angle -143.1^\circ V$$

$$\dot{U}_w = \dot{I} (R + j\omega L) = 124\sqrt{2} \angle 22.9^\circ V$$

电压结果:

$$u_C(t) = 160 \cos(\omega t - 143.1^\circ) V$$

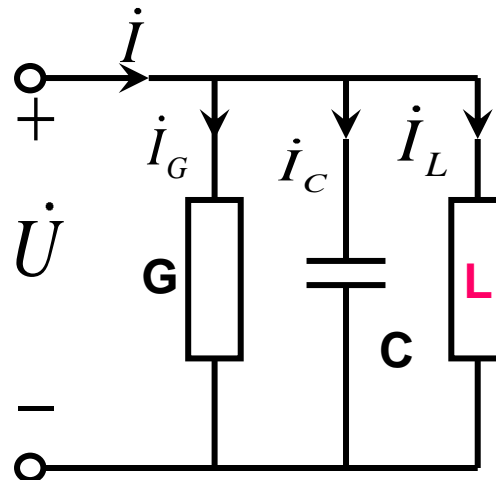
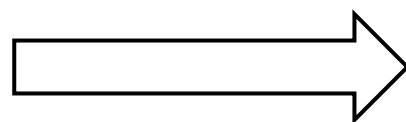
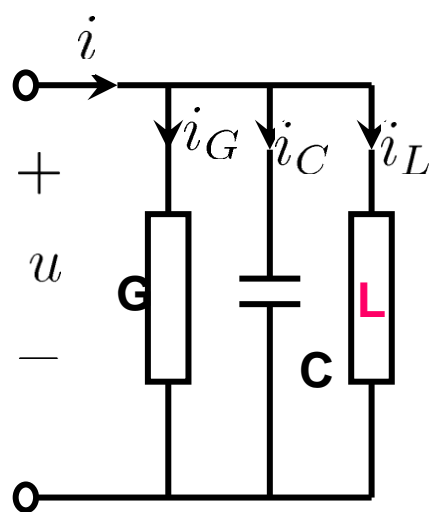
$$u_W(t) = 248 \cos(\omega t + 22.9^\circ)$$

计算串联等效阻抗:

$$\begin{aligned} Z &= R + j(\omega L - 1/(\omega C)) \\ &= (15 + j20)\Omega = 25 \angle 53.1^\circ \Omega \end{aligned}$$

$$\dot{U} = 50\sqrt{2} \angle 0^\circ V$$

GCL并联电路的导纳



$$\dot{I} = \dot{I}_G + \dot{I}_L + \dot{I}_C$$

$$Y = G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

B_C B_L

$$\text{导纳模: } |Y| = \sqrt{G^2 + (B_C + B_L)^2}$$

$$\text{导纳角: } \varphi_Y = \arctan \left(\frac{B_C + B_L}{G} \right)$$

GLC并联电路导纳讨论

并联电路电压电流关系 $\dot{I} = Y\dot{U}$

导纳端口电流与电压有效值
(振幅) 之比等于等于导纳模 $I = |Y|U$

导纳端口电流与端口电压
的相位差等于导纳角 $\psi_i - \psi_u = \varphi_Y$

$\varphi_Y < 0$, 端口电流**滞后**于电压, **感性**
 $\varphi_Y > 0$, 端口电流**超前**于电压, **容性**
 $\varphi_Y = 0$, 端口电流与电压相位**相同**, **纯阻**

正弦电流电路的相量分析方法

◎ 理论基础

- 电感、电容的电压电流关系在相量形式下是线性代数方程
- 电阻的电压电流关系在相量形式下仍然为线性代数方程
- KCL相量形式下仍然成立
- KVL相量形式下仍然成立

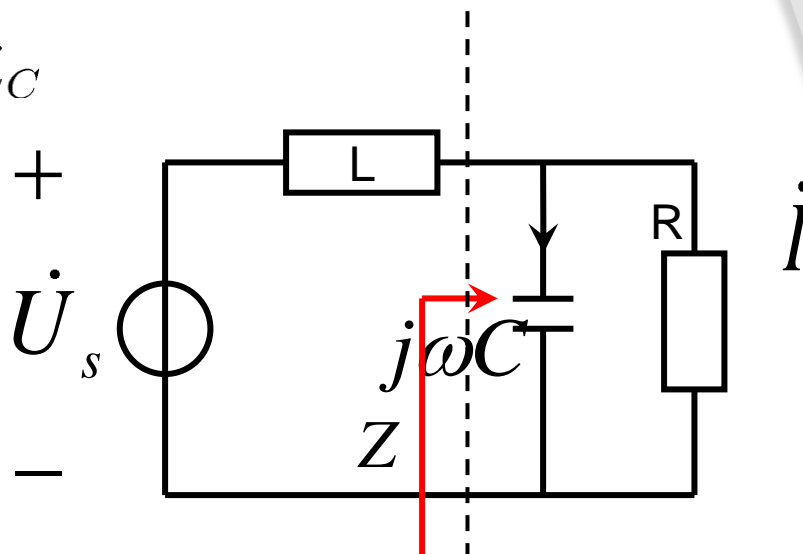
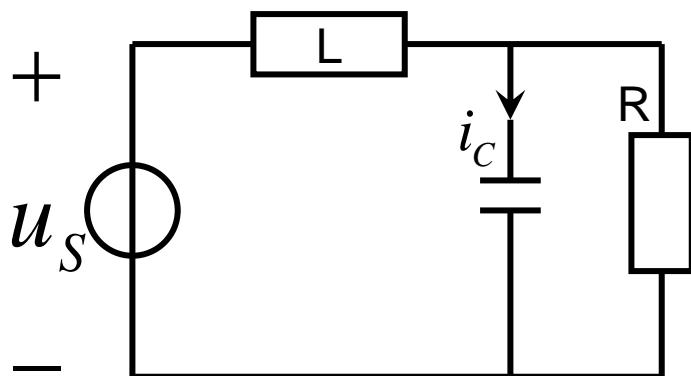
◎ 操作过程

- 将现有的电阻修改为阻抗
- 电压源表现为相量形式
- 电流源也表现为相量形式
- 利用现有的回路电流法、节点电压法以及电路定理解题

正弦电流电路的相量分析法

电路中 $u_s = 60\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ) V$, $\omega = 100 \text{ rad/s}$, $R = 100 \Omega$

$L = 0.1 H$, $C = 1 \text{ mF}$, 求电流 i_C



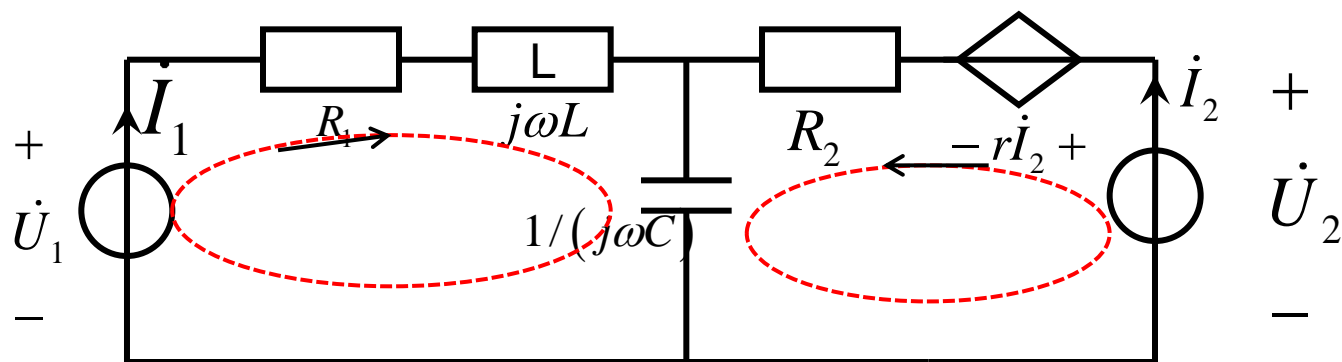
$$Z = \frac{R/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = 5(1 - j) \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{Z + j\omega L} = \frac{60\angle 45^\circ}{5 + j5} = 6\sqrt{2} A$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_C &= \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \times \dot{I} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \dot{I} \\ &= \frac{j}{1 + j} 6\sqrt{2} A = 6\angle 45^\circ A \end{aligned}$$

$$i_c(t) = 6\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ) A$$

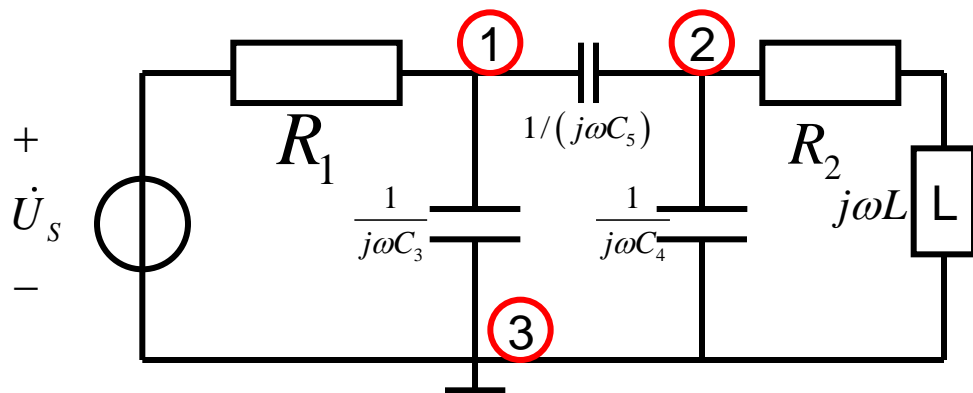
正弦电流电路的相量分析法举例



利用回路电流法列出上图的回路电流

$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega C} & R_2 + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 - r\dot{I}_1 \end{bmatrix}$$

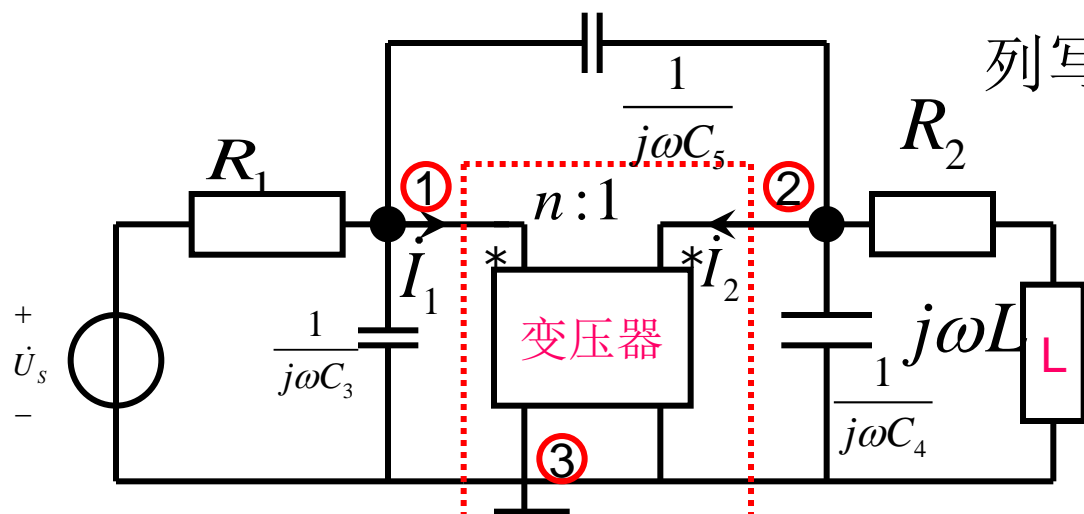
正弦电流电路的相量分析法举例



选取节点3作为参考节点，对其余2个节点用相量表示，就可以得到节点电压方程

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + j\omega C_3 + j\omega C_5 & -j\omega C_5 \\ -j\omega C_5 & j\omega C_5 + j\omega C_4 + \frac{1}{R_2 + j\omega L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_S / R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

正弦电流电路的相量分析法举例



列写左图改进的节点电压方程

思路：节点3电压为参考电压，将通过节点1，2流入变压器的电流记录为 i_1 , i_2 ，考虑为电流源列写电压方程；再利用变压器的电压电流关系增加2个方程

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + j\omega C_3 + j\omega C_5 & -j\omega C_5 \\ -j\omega C_5 & j\omega C_5 + j\omega C_4 + \frac{1}{R_2 + j\omega L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{U}_S}{R} - \dot{I}_1 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{U}_1 = n\dot{U}_2, \dot{I}_1 = (-1/n) \dot{I}_2$$

正弦稳态电路的相关定理

◎ 置换定理

- 在任意的线性电路中，所有的激励均为同频率电源，若某一端口的电压和电流的相量形式为 $\dot{U}(\dot{U}_m), \dot{I}(\dot{I}_m)$ ，则可以用独立源进行替换，不改变其他部分的电特性

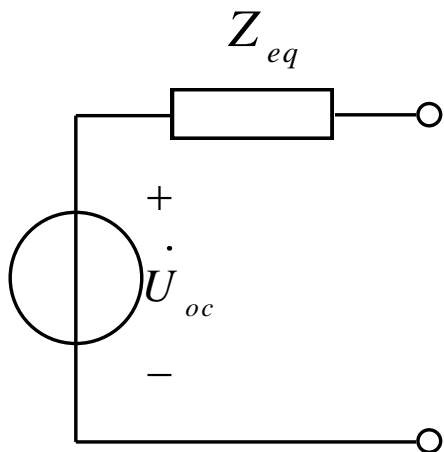
$$\dot{U}_s = \dot{U} \left(\dot{U}_{sm} = \dot{U}_m \right), \dot{I}_s = \dot{I} \left(\dot{I}_{sm} = \dot{I}_m \right)$$

◎ 线性定理

- 电路中存在若干同频率激励源，对应的相量形式为 $\dot{X}_k (0 \leq k \leq N-1)$ 则响应的向量形式为可以表示为 $\dot{Y} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \dot{X}_k$

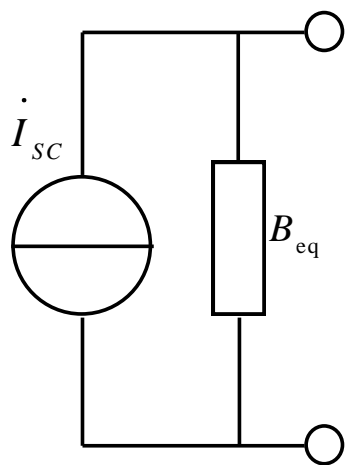
戴维南定理

- 一个含同频激励源一端口网络可以用一个电压源串联一个阻抗 Z_{eq} 表示
 - 电压源的相量为一端口的开路电压的相量
 - 等效阻抗 Z_{eq} 是将内部电源置0后的等效输入阻抗（计算阻抗时保留激励源频率）



诺顿等效

- 一个含同频激励源一端口网络可以用一个电流源串联一个导纳 B_{eq} 表示
 - 电流源的相量为一端口的短路电流的相量
 - 等效导纳 B_{eq} 是将内部电源置0后的等效输入导纳（计算阻抗时保留激励源频率）



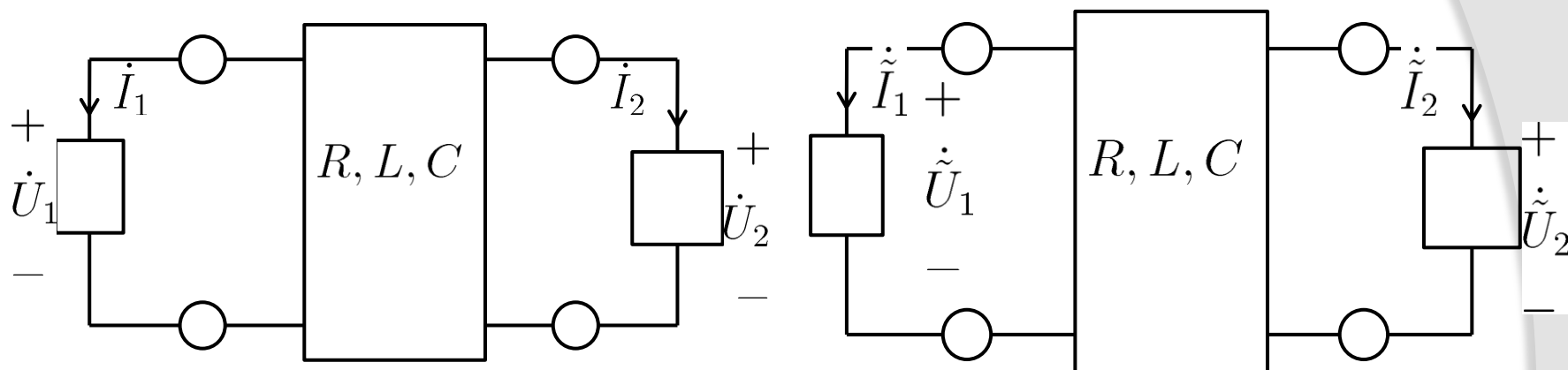
正弦稳态电路的电路定理

◎ 特勒根定理

- 两个同样电路结构的电路网络 N_1 和 N_2 ,所有的线性电路, 激励均为同频率电源, 若第1个电路的第 k 个支路电压(电流)和第2个电路的第 k 个支路电流(电压)选择同样的方向, 其相量形式为 $\dot{U}_k, \dot{I}_k, \ddot{U}_k, \ddot{I}_k$ 则:

$$\sum_k \dot{U}_k \ddot{I}_k = 0, \sum_k \dot{I}_k \ddot{U}_k = 0$$

正弦相量形式的互易定理



$$\dot{U}_1 \dot{I}_1 + \dot{U}_2 \dot{I}_2 + \sum_k \dot{U}_k \dot{I}_k = 0$$

$$\dot{\tilde{U}}_1 \dot{I}_1 + \dot{\tilde{U}}_2 \dot{I}_2 + \sum_k \dot{\tilde{U}}_k \dot{I}_k = 0$$

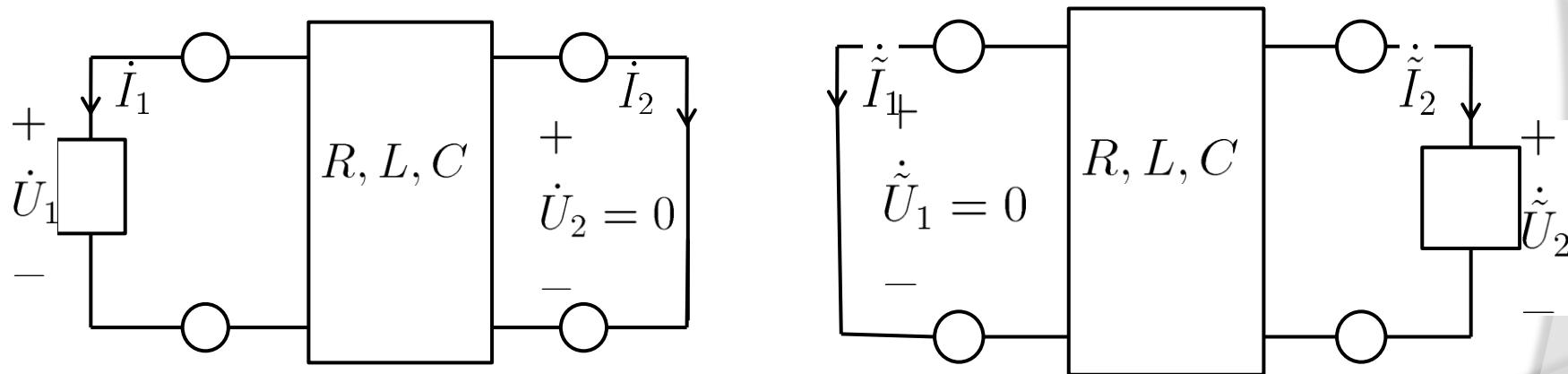
$$\dot{U}_k = \dot{I}_k Z_k, \dot{\tilde{U}}_k = \dot{\tilde{I}}_k Z_k$$

$$\Rightarrow \dot{U}_1 \dot{\tilde{I}}_1 + \dot{U}_2 \dot{\tilde{I}}_2 = \dot{\tilde{U}}_1 \dot{I}_1 + \dot{\tilde{U}}_2 \dot{I}_2$$

相量形式下的R, L, C的电压电流是线性关系!

互易定理1

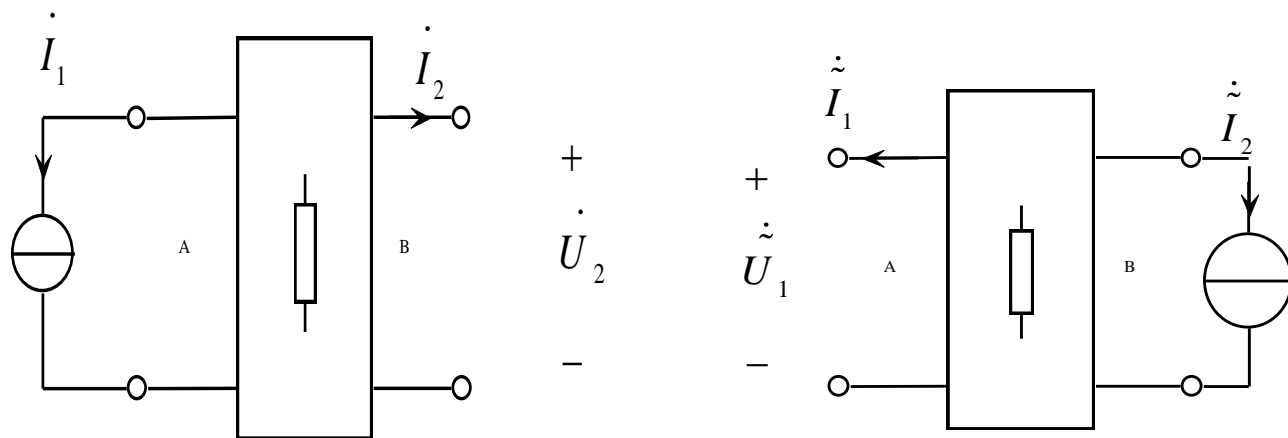
对于一个独立正弦电流源和若干线性R, L, C原件组成的电路, 当此电流源在某一端口作用时, 在另一端B产生的开路电压相量等于把电流源移动到端口B作用而在端口A产生的开路电压相量



$$\text{互易定理1: } \dot{U}_2 = 0, \dot{U}_1 = 0 \Rightarrow \dot{U}_1 \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \dot{I}_2 \Rightarrow \dot{I}_1 = \dot{I}_2$$

互易定理2

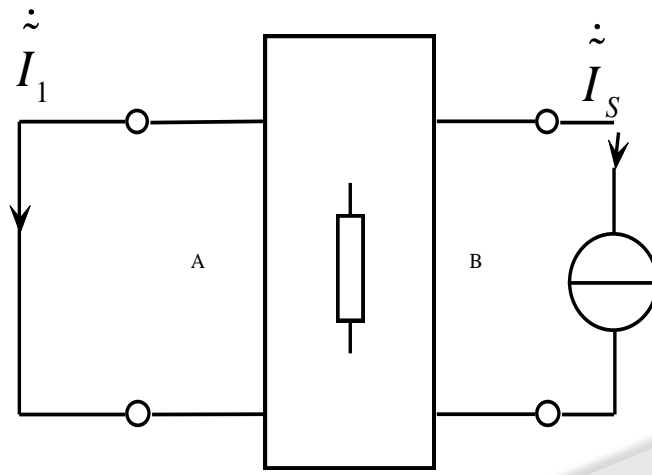
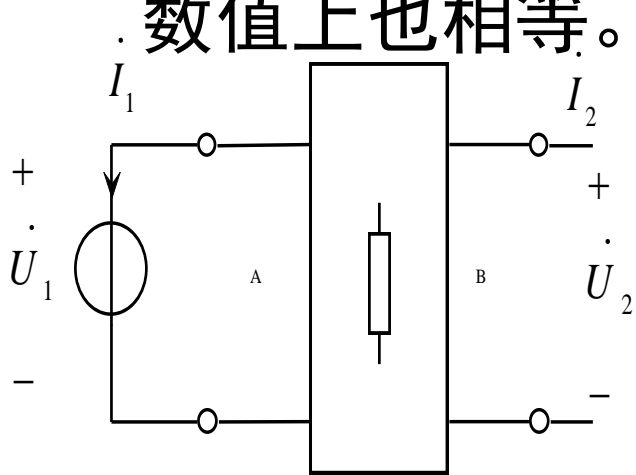
对于一个独立电流源和若干线性R, L, C二端口组成的电路, 当此电流源在某一端口作用时, 在另一端口B产生的开路电压相量等于把电流源移动到端口B作用而在端口A产生的开路电压相量



$$\text{互易定理2: } \dot{I}_2 = 0, \dot{I}_1 = 0 \Rightarrow \dot{U}_2 \dot{I}_2 = \dot{U}_1 \dot{I}_1 \Rightarrow \dot{U}_2 = \dot{U}_1$$

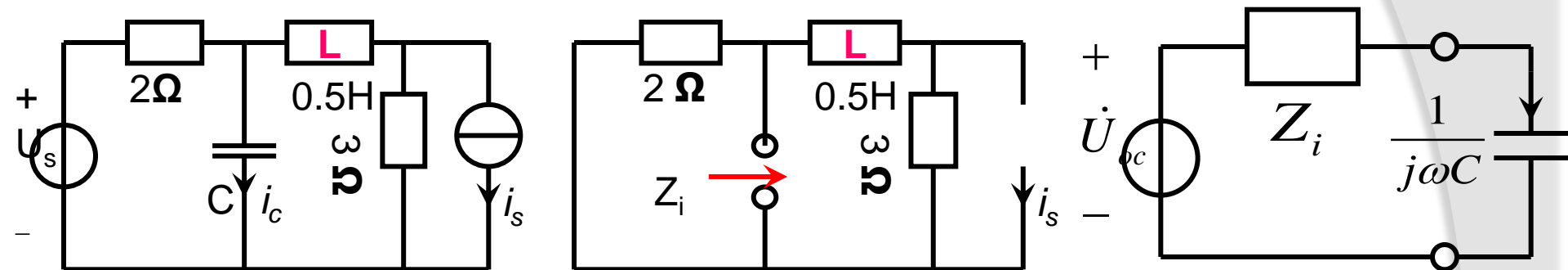
互易定理3

- 对于1个独立电源和若干二端R,L,C组成的电路，在数值上电流源和电压源数值相等（国际单位制），则电流源在另一端口激发的开路电压相量和电流源在另一端口激发的短路电流相量在数值上也相等。



$$\text{互易定理3: } \dot{I}_2 = 0, \tilde{U}_1 = 0 \Rightarrow \dot{U}_1 \tilde{\dot{I}}_1 + \dot{U}_2 \tilde{\dot{I}}_S = 0 \Rightarrow \frac{U_2}{U_s} = -\frac{\tilde{I}_1}{I_S}$$

正弦电流电路举例



$$C = 0.05F, i_C = 5\sqrt{2} \cos(10t - 60^\circ)$$

$$C = 0.25F, i_C = ?$$

Step1: 给出戴维南等效模型, U_{oc} 和 Z_i 未知

Step2: U_s 和 i_s 未知, 但是不影响断开后计算从电容看进去的输入电阻 Z_i

Step3: 根据 Z_i 和电容 C 计算 U_{oc}

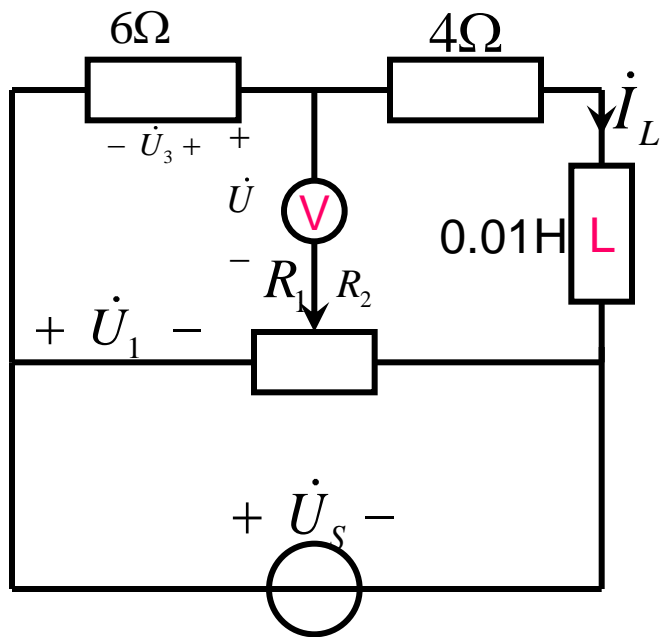
Step4: 计算改变电容后的电压

正弦电流电路举例

$\omega = 1000 \text{ rad/s}$, 电压表是理想设备, 问 R_2/R_1 为何值时, 电压表的读数最小

注释1: 理想电压表就是内阻无穷大的电压表

注释2: 电压表测试的是电压的幅度



$$\text{Step1: } \dot{U}_1 = \dot{U}_s R_1 / (R_1 + R_2) = \frac{r \dot{U}_s}{r + 1}$$

$$\text{Step2: } \dot{U}_3 = \frac{6 \dot{U}_4}{10 + 10j} = (0.3 - j0.3) \dot{U}_s$$

$$\begin{aligned} \text{Step3: } \dot{U} &= \dot{U}_3 - \dot{U}_1 \\ &= \dot{U}_s \left(\frac{r}{r + 1} - 0.3 + j0.3 \right) \end{aligned}$$

Step4: 容易看出当 $\frac{r}{r + 1} = 0.3$ 时, 电压表读数最小, 可以计算出 $r = \frac{3}{7}$

关于电路定理的澄清和说明

◎ 特勒根定理，置换定理

- 上述定理的成立并不需要写成相量形式，在时域形式仍然成立
- 写成相量形式将有助于联合应用其他定理

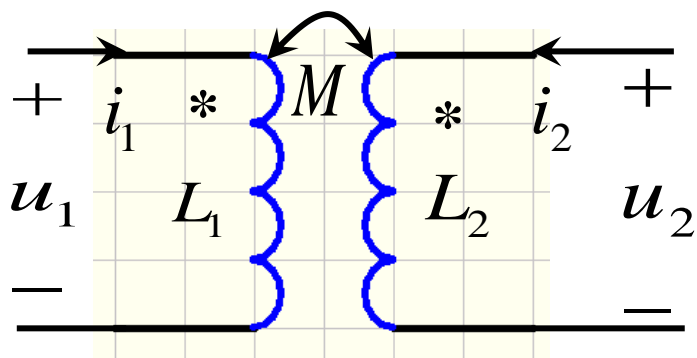
含互感元件的正弦电流电路

◎ 主要思路

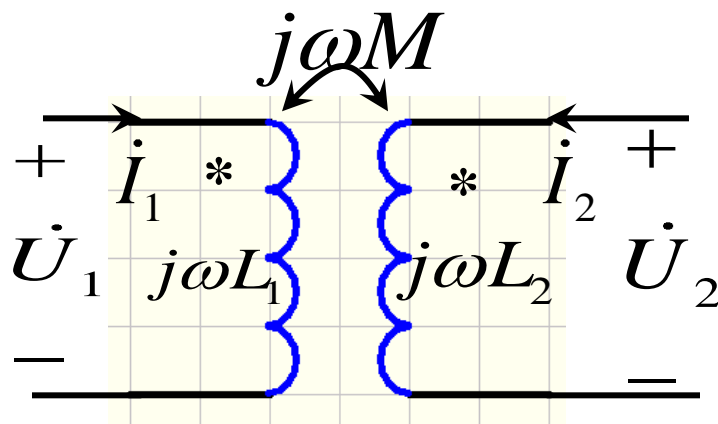
- 利用相量形式列出电路方程
- 当耦合线圈串联或者存在公共节点，可通过消去互感，变换成等效形式来进行分析

互感元件的正弦电流电路

◎ 互感元件的时域和频域模型

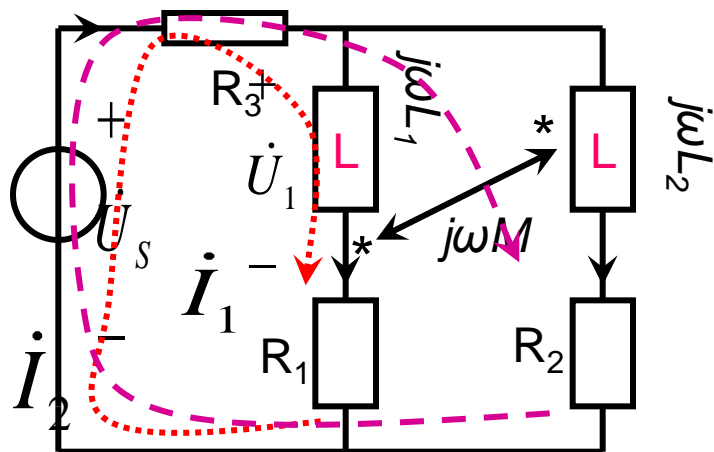


$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= \pm j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{aligned}$$

含互感元件的电路分析

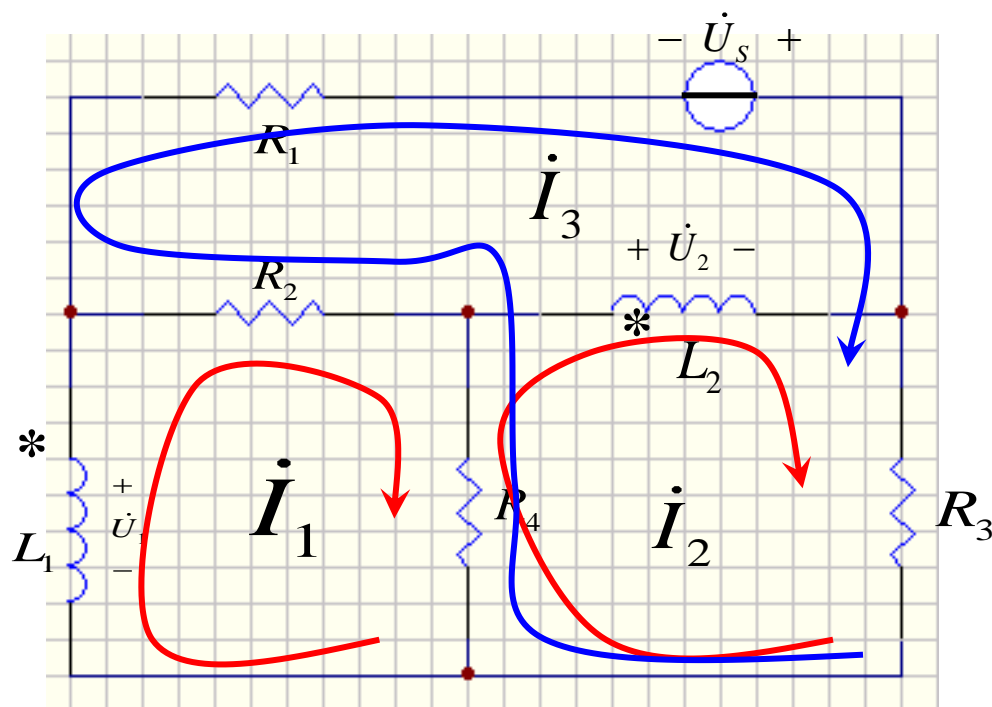


思考：

含互感元件的电路最好采用回路电流法进行分析，而且选取独立回路最好使的互感元件仅仅属于1个独立回路

$$\begin{bmatrix} R_3 + j\omega L_1 + R_1 & R_3 - j\omega M \\ R_3 - j\omega M & R_3 + j\omega L_2 + R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_s \\ \dot{U}_s \end{bmatrix}$$

含互感元件的电路分析举例2

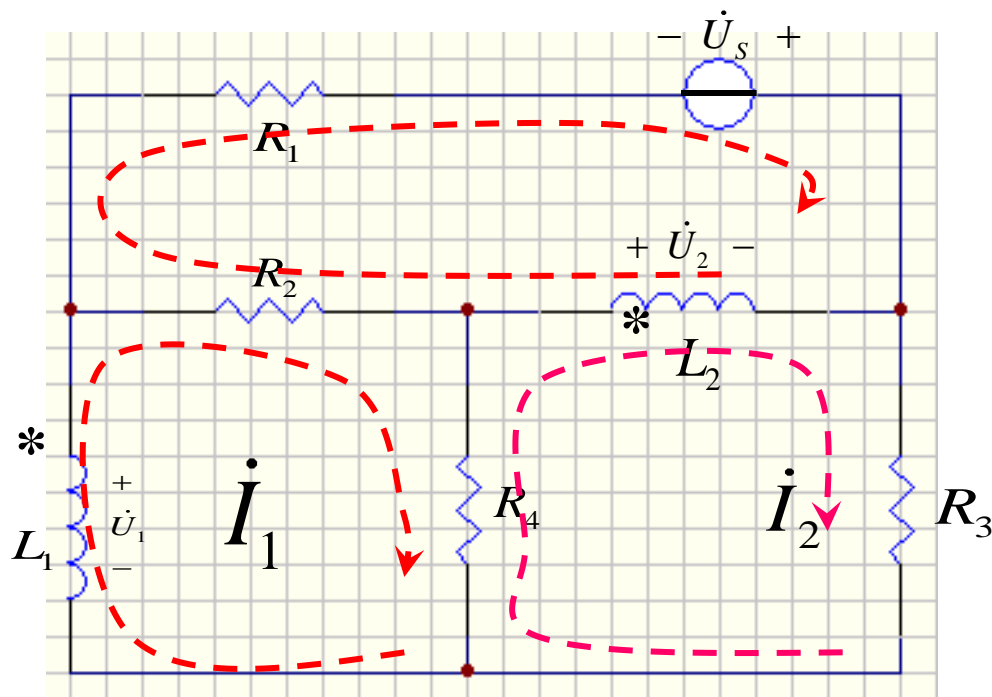


注意！

选择回路注意互感线圈
仅仅处于某一个回路中

$$\begin{aligned}
 j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 + (\dot{I}_1 - \dot{I}_3) R_1 + (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) R_4 &= 0 \\
 -j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + (\dot{I}_2 + \dot{I}_3) R_3 - (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) R_4 &= 0 \\
 -(R_2 + R_4) \dot{I}_1 + (R_3 + R_4) \dot{I}_2 + (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \dot{I}_3 &= \dot{U}_s
 \end{aligned}$$

含互感电路的电路分析举例3

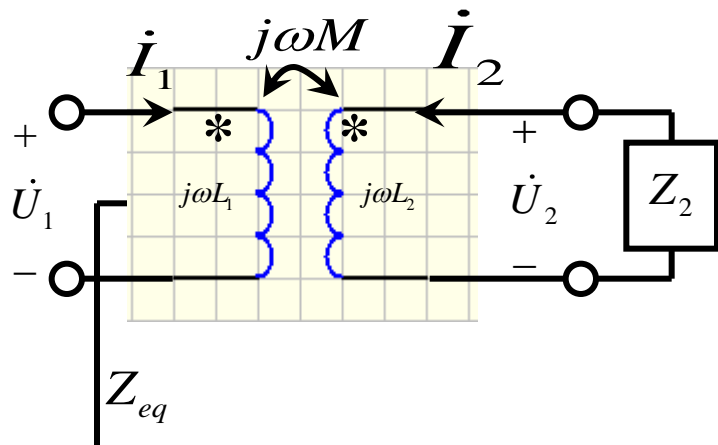


$$\mathbf{1:} j\omega L_1 \dot{I}_1 + R_2 (\dot{I}_1 + \dot{I}_3) - j\omega M (\dot{I}_2 - \dot{I}_3) + R_4 (\dot{I}_1 - \dot{I}_3) = 0$$

$$\mathbf{2:} R_4 (\dot{I}_2 - \dot{I}_1) + j\omega L_2 (\dot{I}_2 - \dot{I}_3) - j\omega M \dot{I}_1 + R_3 \dot{I}_2 = 0$$

$$\mathbf{3:} R_2 (\dot{I}_3 - \dot{I}_1) + R_1 \dot{I}_3 + j\omega L_2 (\dot{I}_3 - \dot{I}_2) + j\omega M \dot{I}_1 = \dot{U}_s$$

互感回路的等效问题



$$j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 = 0$$

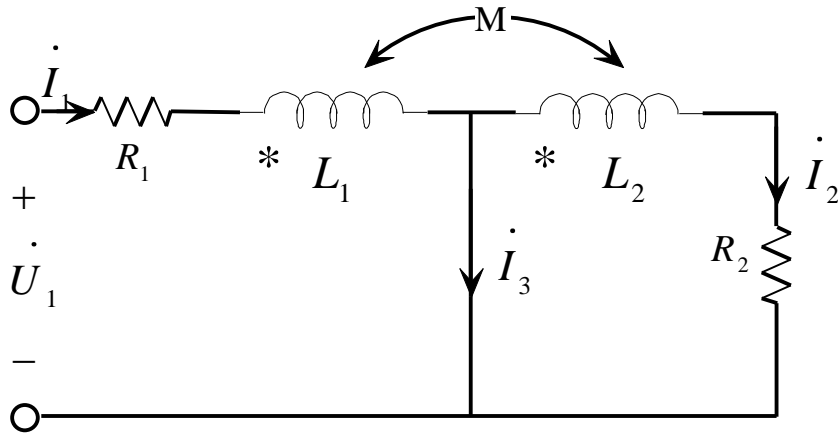
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + \dot{I}_2 j\omega M$$

$$Z_{eq} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + j\omega L_2} + j\omega L_1 = Z_r + j\omega L_1$$

$$Z_r = \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + j\omega L_2} = \frac{(\omega M)^2}{Z_{total}} = R_r + jX_r$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{j\omega M \dot{I}_1}{j\omega L_2 + Z_2}$$

互感电路的求解

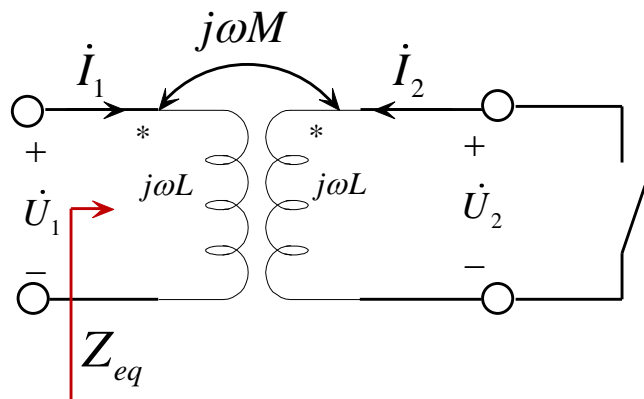


$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 + \dot{I}_2 R_2 &= 0 \\ \dot{I}_2 &= -\frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2} \dot{I}_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{R_2 + j\omega L_2}}$$

互感回路的等效问题

- ◎ 互感二次回路对一次回路的阻抗折合，等于互感量的模平方除以二次回路的阻抗
- ◎ 实数部分称为引入电阻
- ◎ 虚数部分称为引入电抗

互感回路举例

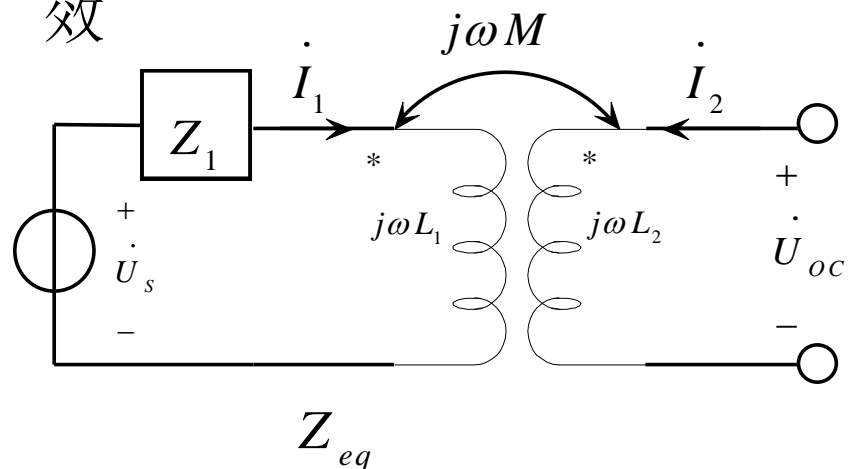


已知S断开和闭合分别对应的等效电感为 $L_{oc}=0.8\text{H}$, $L_{sc}=0.1\text{H}$, 求耦合系数 k

$$1 - k^2 = L_{sc}/L_{oc} = 8, k = 0.935$$

$$\begin{cases} j\omega L_{oc} : j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + j\omega L_2} = j\omega L_1 \\ j\omega L_{sc} : j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2} = j\omega \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} = j\omega (1 - k^2) L_1 \end{cases}$$

互感电路等效——求给出电路的戴维南等效



$$\begin{cases} \dot{U}_{oc} = \frac{j\omega M}{R_1 + j\omega L_1} \dot{U}_s \\ Z_i = \frac{(\omega M)^2}{R + j\omega L_1} + j\omega L_2 \end{cases}$$

正弦电流电路的功率问题

◎ 直流电路

- 平均功率和瞬时功率相等

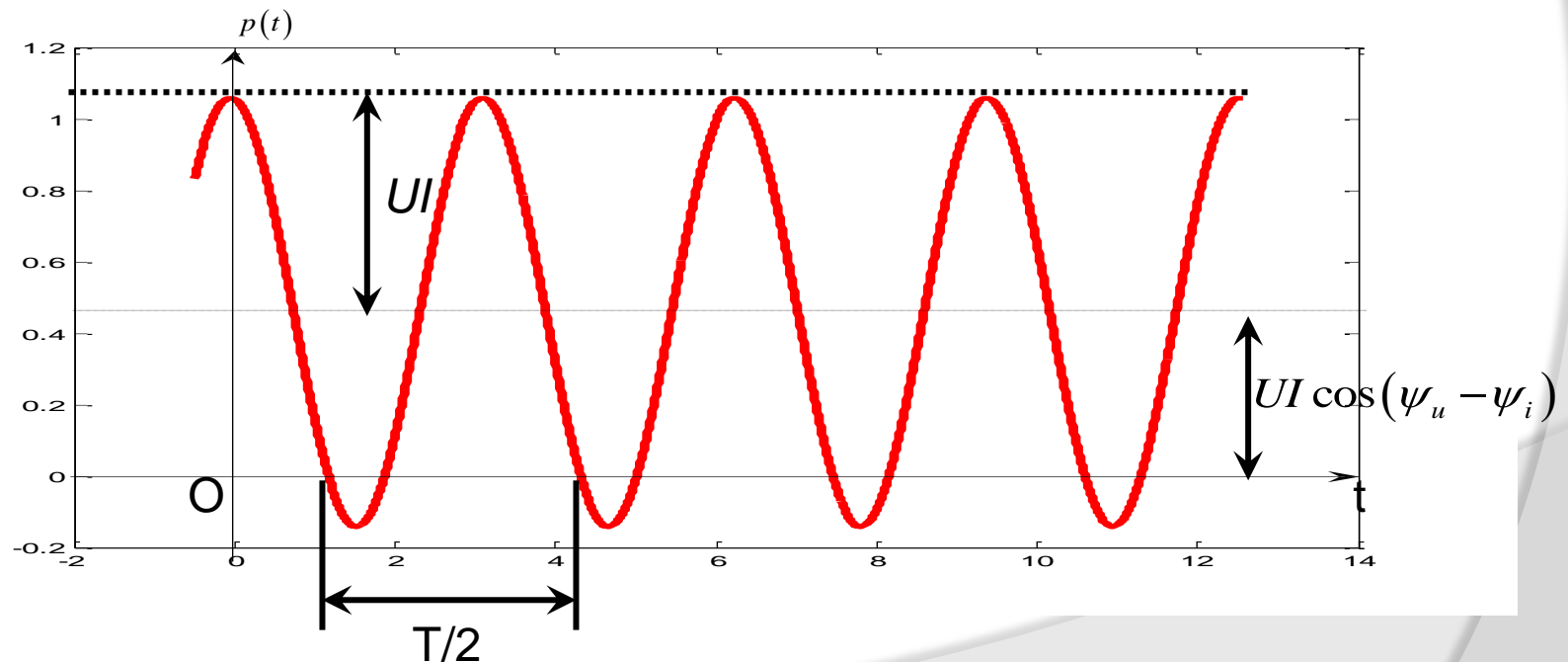
◎ 交流电路

- 电压是一个时变的信号，电流是一个时变的信号
 - 电功率也是是一个时变信号
 - 瞬时功率不等于平均功率
- ## ◎ 需要研究正弦交流电路的电功率特性

正弦交流电路的电功率

◎ **瞬时功率** 正弦电流电路的瞬时功率随时间的变化而变化

$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{2}U \cos(\omega t + \psi_u) & p(t) &= 2UI \cos(\omega t + \psi_u) \cos(\omega t + \psi_i) \\ i(t) &= \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i) & &= UI \cos(\psi_u - \psi_i) + UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i) \end{aligned}$$



正弦交流电路的平均功率

◎ 平均功率

- 瞬时功率在一个周期内的平均值定义为平均功率
- 平均功率取决于电压信号的有效值，电流信号的有效值以及电压、电流信号之间的相位差

◎ 功率因数

- 电压、电流信号之间的相位差的余弦值

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = UI \cos(\psi_u - \psi_i)$$

$$P = UI\lambda, \lambda = \cos(\psi_u - \psi_i)$$

特定器件上的功率因素

◎ 不同器件上的电功率

- 电阻

- 电压、电流相位相同, 功率因数 $\lambda = 1$

- 电感

- 电压超前电流 $\pi/2$, 功率因数 $\lambda = 0$

- 电容

- 电流超前电压 $\pi/2$, 功率因数 $\lambda = 0$

- 维持电容和电感上的电流无须电源提供功率

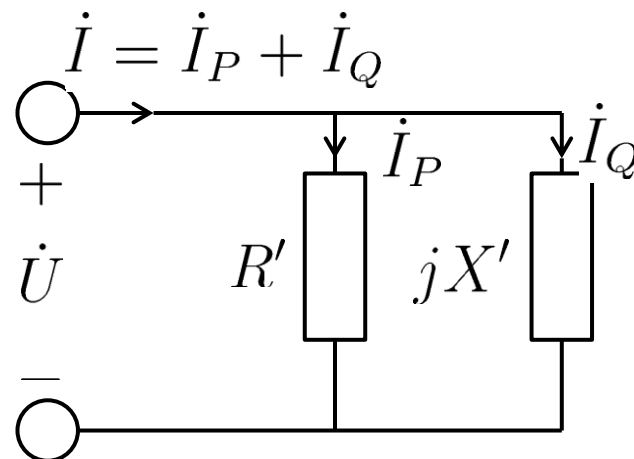
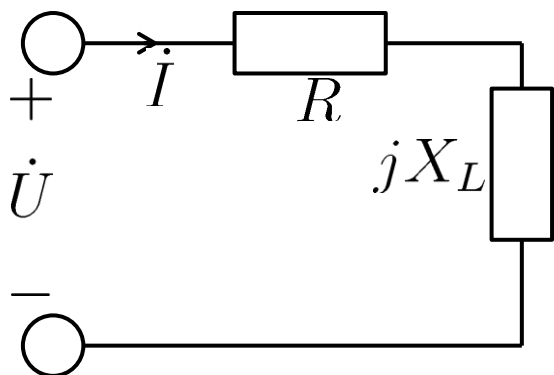
- 注意电容的容值、电感的感值会影响电阻上的功率

◎ 总结

- 电压、电流中的同相分量贡献平均功率

- 相位正交部分不贡献平均功率

感性负载电功率



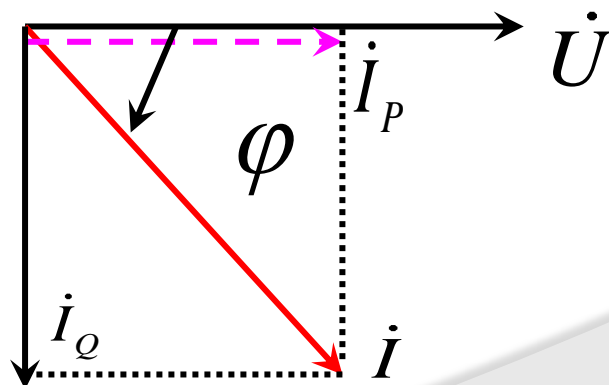
$$\begin{aligned}\dot{I} &= \frac{\dot{U}}{R + jX_L} \\ &= \frac{\dot{U}R}{R^2 + X_L^2} - j \frac{\dot{U}}{R^2 + X_L^2} X_L\end{aligned}$$

同相分量

\dot{I}_P R'

正交分量

\dot{I}_Q jX'



关于电功率的讨论

◎ 瞬时功率组成

- 平均功率部分

- 电流中和电压同相部分贡献，有功分量

- 无功功率部分

- 电流中和电压正交部分贡献，无功分量

$$Q = UI \sin(\varphi)$$

- 电感无功功率 $Q_L = U^2 / \omega L$

- 电容无功功率 $Q_C = -U^2 \omega C$

关于电功率的讨论II

◎ 有功功率

- 平均功率部分 $P = UI \cos(\varphi)$

◎ 视在功率

- 电压、电流有效值的乘积 $S = UI$
- 有功功率等于视在功率乘以功率因数
 - $P = S \cos \varphi$
- 无功功率与视在功率、功率因素的关系
 - $Q = S \sin \varphi$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

关于电功率的讨论III

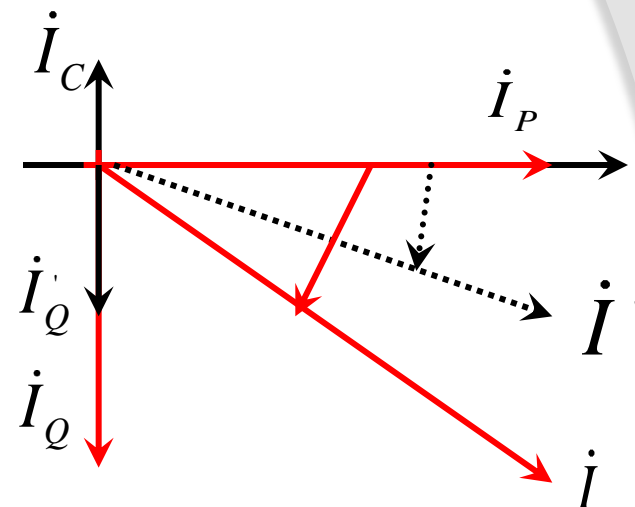
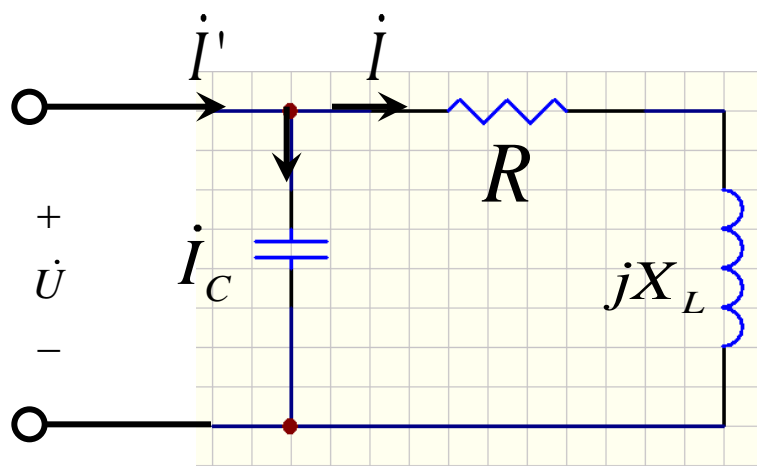
◎ 工程约定

- 交流电路中不加约定时，通常指平均功率
- 视在功率 S 的单位是伏安(**VA**)
- 有功功率 P 的单位瓦特(**W**)
- 无功功率 Q 的单位是乏(**var**)

◎ 工程上的负载多为感性

- 可以在感性负载上并联电容器，以解决功率因数较小的问题

功率因数的调整策略和无功补偿



$$\dot{I} = \dot{U} \frac{R - jX_L}{R^2 + X_L^2}$$

$$\dot{I}' = \dot{U} \frac{R}{R^2 + X_L^2} + j\dot{U} \left(X_C - \frac{X_L}{R^2 + X_L^2} \right)$$

电功率举例1

- 在工频条件下测得某线圈的端口电压、电流和功率分别为100V、5A和300W。求此线圈的功率因数，等效电阻和等效电感

$$S = UI = 500VA$$

$$P = UI\lambda = 300W$$

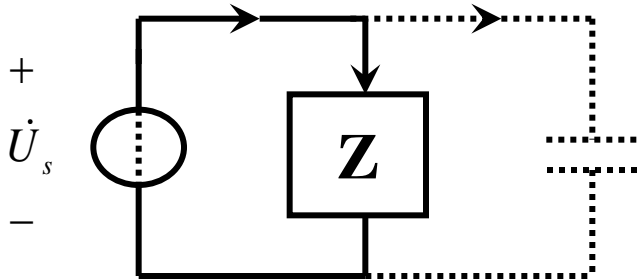
$$\Rightarrow \lambda = 0.6$$

$$\dot{I} = 5A$$

$$\dot{I}_Q = 5A \times 0.8 = 4A$$

电功率举例2

- 感性负载 Z 接于220V,50Hz的正弦电源上, 平均功率为2200W, 功率因数为0.8
 - 并联电容前电源电流、无功功率和视在功率
 - 并联电容、功率因数提高到0.95, 求电容大小、并联后的电源电流、无功功率和视在功率



$$\lambda = \cos(\varphi) \Rightarrow \varphi = 36.9^\circ$$

$$S = P / \lambda = 2750 \text{ VA}$$

$$Q = S \sin(\varphi) = 2750 * 0.6 = 1650 \text{ var}$$

$$I_P = 2200 / 220 \text{ V} = 10 \text{ A}, I_Q = 1650 \text{ var} / 220 \text{ V} = 7.5 \text{ A}$$

$$\lambda' = 0.95, Q' = P \tan \varphi = 723 \text{ var}$$

$$Q'_C = 723 - 1650 = -927 \text{ var}, C = -Q'^2 / U^2 \omega$$

复功率

◎ 定义

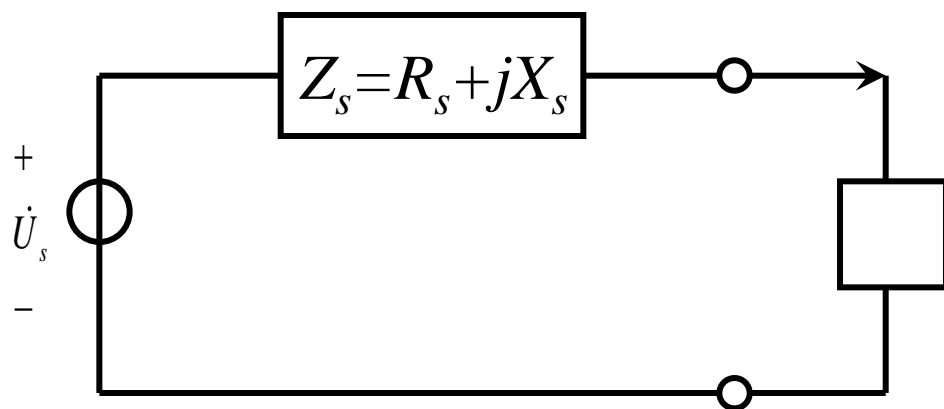
- 电压相量和电流相量的共轭乘积

$$\tilde{S} = P + jQ = UI \cos(\varphi) + jUI \sin(\varphi) = \dot{U} \dot{I}^*$$

◎ 复功率的特点

- 复功率的实部对应平均功率 $P = UI \cos(\varphi)$
- 复功率的虚部对应无功功率 $Q = UI \sin(\varphi)$
- 复功率的模是视在功率
- 复功率的相角就是电压超前于电流的相位差
- 任何一个网络的复功率具有守恒性

正弦电流电路下负载最大功率传输-负载可随意调整



$$I = \frac{U_s}{|Z_s + Z_L|} = \frac{U_s}{\sqrt{(R_s + R_L)^2 + (X_s + X_L)^2}} \quad P_L = R_L I^2$$

当 $X_s = -X_L$ 可以取得极大值当 $R_s = R_L$ 时取得最大值
于是 $Z_s = Z_L^*$ 时，系统取得最大的输出功耗

共轭匹配

思考：如何证明共轭匹配就是最优的？

最大功率传输定理-阻抗角恒定

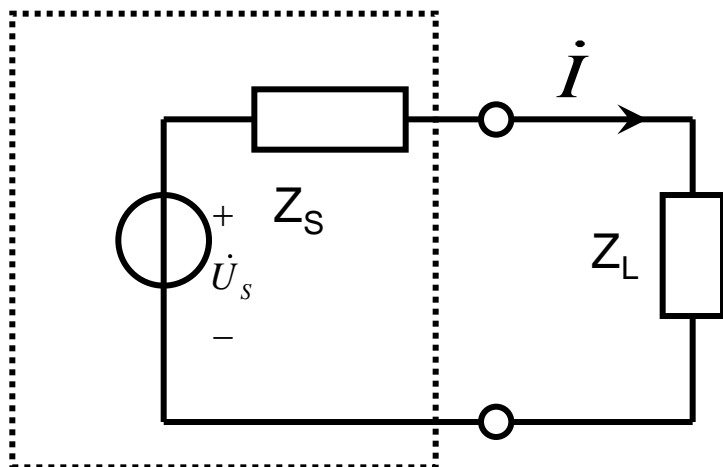
$$P_L = \frac{U_S^2 \cos(\varphi_L)}{|Z_S^2/Z_L| + |Z_L| + 2|Z_S| \cos(\varphi_s - \varphi_L)}$$

于是有 $|Z_S|=|Z_L|$ 取得 P_L 最大值

$$P_{L\max} = \frac{U_s^2 \cos(\varphi_L)}{2|Z_S| (1 + \cos(\varphi_S - \varphi_L))}$$

当负载阻抗角不能改变的话，负载功率在负载和电源内阻抗的模**相等**时，获得最大的输出功率

最大传输定理举例

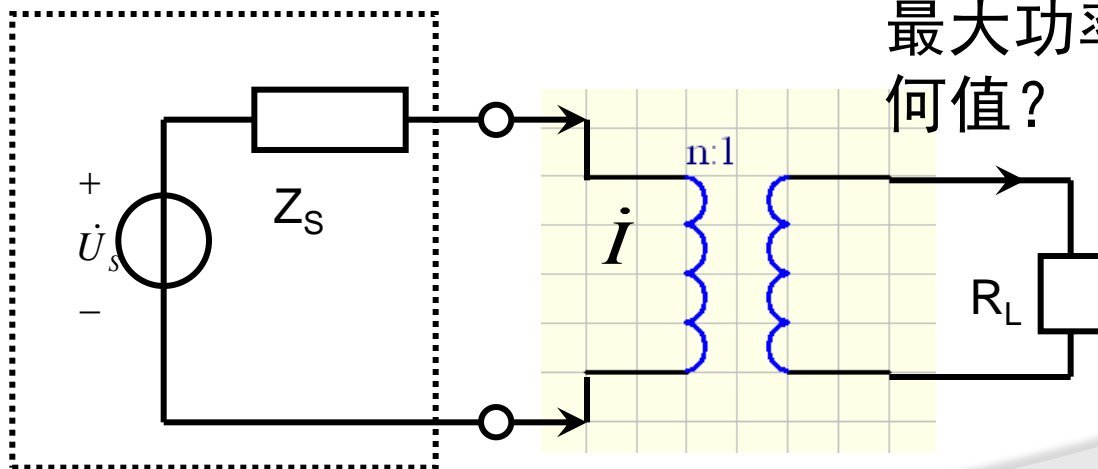


图为一实际电源的电路模型，其中电路参数为：

$$\dot{U}_S = 12\angle 0^\circ, Z_L = (3 + j4) \Omega$$

Q1: 负载 $Z_L = ?$ 时，电源发出的功率是最大

Q2: 利用 $n:1$ 变压器后， $R_L = 20$ ， n 为何值时，电源可发出最大功率，该最大功率为何值？



本章小结

- ⊙ 正弦量的三要素
- ⊙ 正弦量的相量表示
- ⊙ 电路定理的相量形式和电路元件的相量关系
- ⊙ 正弦电流电路的相量分析方法
- ⊙ 并联，串联RLC回路的相量分析方法
- ⊙ 正弦电路的功率和最大功率传输定理