中国科学技术大学

2020—2021学年第一学期考试试卷

考试科目 概率论　　得分 ____________

所在系 ________　姓名 ____________　学号 ____________

(考试时间: 2021年 1月 18 日上午 8:30–10:30)

一、 (30分, 每小题3分) **填空题或单选题, 答案可以直接写在试卷上.**

(1) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为一列独立同分布的随机变量, 具有共同的期望 μ 和方差 σ^2. 若记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$, 则 $\mathbf{E}\big[\sum_{k=1}^n (X_k - \overline{X})^2\big] =$________.

(2) 设随机向量 (X, Y) 服从单位圆盘 $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ 上的均匀分布, 则数学期望 $\mathbf{E}[\sqrt{X^2+Y^2}] =$________.

(3) 在三角形 $\triangle ABC$ 内部随机取一点记为 P, 然后在边 BC 上随机取一点记为 Q, 则直线PQ 与边 AB 相交的概率为________.

(4) 将 m 个 0 和 n 个 1 随机排成一行, 记 X 为第一个 1 前 0 的个数, 则 $\mathbf{E}X =$________.

(5) 连续掷一枚均匀的骰子, 当 6 点第二次出现时就立即停止, 则停止时所有出现的点数之和的期望为________.

(6) 设 X 和 Y 为独立的标准正态随机变量, 则 $\mathbf{E}[X+Y|X>0, Y>0] =$(　)

(A) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$　　(B) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$　　(C) $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$　　(D) $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$

(7) 设随机变量 X 的特征函数为 $f(t) = \frac{1}{1+\lambda^2 t^2}$, 则 X 的方差 $\mathbf{Var}(X)$ 为(　)

(A) λ　　(B) 2λ　　(C) λ^2　　(D) $2\lambda^2$

(8) 设 n 维随机向量 $\boldsymbol{X}$ 服从退化正态分布, 其协方差阵的秩为 $1 < m < n$, $\boldsymbol{Y}$ 是 n 维标准正态向量且与 $\boldsymbol{X}$ 独立, $\boldsymbol{C}$ 为 n 阶常数方阵, 则下列说法正确的是(　)

(A) $\boldsymbol{X}$ 为 m 维连续型随机向量　　(B) $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$ 也服从退化 n 维正态分布

(C) 存在方阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{CX} \overset{d}{=} \boldsymbol{Y}$　　(D) 存在方阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{CY} \overset{d}{=} \boldsymbol{X}$

(9) 设随机变量序列 $\{X, X_1, X_2, \cdots\}$ 对应的分布函数序列为 $\{F(x), F_1(x), F_2(x), \cdots\}$, 且 $X_n \xrightarrow{d} X$, 则下列说法一定正确的是(　)

(A) $F_n(x) \to F(x), \forall x \in \mathbb{R}$　　(B) 若函数 g 连续且有界, 则 $\mathbf{E}[g(X_n)] \to \mathbf{E}[g(X)]$

(C) 若期望均存在, 则 $\mathbf{E}[X_n] \to \mathbf{E}X$　　(D) 若 $Y_n \xrightarrow{d} Y$, 则 $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y$

(10) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为一列独立同分布的随机变量, $C(F)$ 为其分布函数 $F(x)$连续点集. 若对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 记 $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n I(X_k \le x)$, 则 $F_n(x)$ 依概率收敛到(　)

(A) $F(x), \forall x \in \mathbb{R}$　(B) $F(x-0), \forall x \in \mathbb{R}$　(C) $F(x), \forall x \in C(F)$　(D) 以上均不对

装……订……线

二、 (10分) 将区间 $(0,2)$ 随机截成两段, 记较短一段的长度为 X, 另一段长度为 Y.

(1) 试求 X 和 Y 的相关系数 $\mathrm{Corr}(X,Y)$;

(2) 试求数学期望 $\mathbf{E}[\frac{X}{Y}]$.

三、 (18分) 设随机向量 (X,Y) 服从二维正态分布 $\mathcal{N}(0,0;\sigma_1^2,\sigma_2^2,r)$, 则有已知结论: 对任意 $y\in\mathbb{R}$, 在条件 $Y=y$ 下 X 服从 $\mathcal{N}(\frac{r\sigma_1}{\sigma_2}y,\sigma_1^2(1-r^2))$ 分布.

(1) 证明: $\mathbf{E}[X|Y]=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbf{Var}(Y)}Y$;

(2) 利用上述结论求 $\mathbf{E}[X|X+Y]$;

(3) 试问 X 和 Y^2 是否相关? 证明你的结论.

四、 (24分) 已知平面上有 $n\,(n\geq 3)$ 个点, 且任意三点不共线. 设任意两点之间独立地以概率 $p\,(0<p<1)$ 连有一条边或以概率 $1-p$ 不连边. 现以 X_n 表示以这 n 个点为顶点的三角形的个数.

(1) 求数学期望 $\mathbf{E}[X_n]$;

(2) 求方差 $\mathbf{Var}[X_n]$;

(3) 试利用 Chebyshev 不等式证明: 当 $n\to\infty$ 时, 有 $\mathbf{P}(X_n\geq 1)\to 1$;

(4) 试证明: 当 $n\to\infty$ 时, $X_n/(np)^3$ 依概率收敛. 并请指出其极限.

五、 (18分) 设随机变量 X 的密度函数为 $p(x)=\frac{1}{\Gamma(s)}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}$, $x>0$, 其中 $s>0$ 为常数. 已知在给定 $X=x$ 时, 随机变量 Y 服从参数为 x 的 Poisson 分布.

(1) 当 $t<1$ 时, 试求 X 的矩母函数 $\phi(t)=\mathbf{E}[\mathrm{e}^{tX}]$;

(2) 利用(1), 试求 Y 的特征函数 $f(t)$;

(3) 利用(2), 证明: 当 $s\to\infty$ 时,

$$\frac{Y-\mathbf{E}Y}{\sqrt{\mathbf{Var}(Y)}}\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1).$$

六、 (附加题, 10分) 设 $\{X_n,n\geq 1\}$ 是一列独立的随机变量, 且 X_n 的分布律为

$$\mathbf{P}(X_n=1)=\mathbf{P}(X_n=-1)=\frac{1-2^{-n}}{2},\quad \mathbf{P}(X_n=2^k)=2^{-k},\quad k=n+1,n+2,\cdots.$$

试问 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}X_j$是否依分布收敛? 证明你的结论.