

第一章 引言

一. 教学内容

二. 参考书籍 ★ Scully 讨论本质
★ Agarwal 工具书

三. 量子光学的地位

1. 理论模型、客观世界、物理图像

2. 新技术, 新工具, 新理论

3. 仍然在试图回答“光是什么”这个古老而现代的问题

4. 关于光的各种理论及其历史

5. 经典电磁理论, 量子力学; 半经典, 半量子, 全量子, 都行。★ 能标是否统一起来?

6. 光量子的特点: 能量动量, 角动量自旋(质), 不可分割的整体。★

统计上的行为低阶, 高阶, 相干性。

7. 行之有效的理论方法处理复杂体系问题

四. 量子力学回顾 ★ 诠释的不同

1. 全同粒子

2. 不确定性关系 $(\Delta\hat{A})^2 (\Delta\hat{B})^2 \geq \frac{1}{4} [\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle^2 + \langle \{\hat{A}, \hat{B}\} - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle \rangle^2]$

3. 开放系统的密度矩阵表示。用主方程描述演化。 $|\Psi\rangle_{SE} = \sum_{mn} c_{mn} |\psi_m\rangle_S \otimes |\psi_n\rangle_E$

定义 $\hat{\rho}$, $\hat{\rho} = \text{Tr}^{(E)}(|\Psi\rangle_{SE} \langle \Psi|_{SE})$ 。退相干的情况是因为不同的之间相位

逐渐开始不稳定。★。混乱度 $1 - \text{Tr}(\hat{\rho}^2)$ 纯度 $\text{Tr}(\hat{\rho}^2)$, Von Neumann 熵

$-\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})$ 。

4. 复合系统与量子纠缠。 $|\psi\rangle = \sum_{mn} c_{mn} |a_m\rangle \otimes |b_n\rangle$, $C = UDV$, 由 SVD, 矩阵元

$c_{mn} = \sum_k U_{mk} D_{kk} V_{kn}$, $|\psi\rangle = \sum_k D_{kk} (\sum_m U_{mk} |a_m\rangle) \otimes (\sum_n V_{kn} |b_n\rangle)$ 。

存在相互作用时多个子系统。★ 各模光场
★ 光场与原子

五. 谐振子正则量子化

1. 薛定谔方程 $L_T = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, $\xi = \frac{x}{L_T}$, $\frac{1}{2}\hbar\omega [-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2] \eta(\xi) = E \eta(\xi)$

$\eta(\xi) = e^{-\xi^2/2} u(\xi)$, $u(\xi) = H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2})$, 归一化, $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$,

$\psi_n(x) = \frac{1}{(\sqrt{2}2^n n!)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{2L_T^2}} H_n(\xi)$ 。

2. 狄拉克 $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\omega}\hat{x} + i\frac{1}{\omega}\hat{p})$, $\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\omega}\hat{x} - i\frac{1}{\omega}\hat{p})$, $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$. \hat{a}, \hat{a}^\dagger 为湮灭, 产生算符。求出了本征值和不同本征态之间的关系。

3. 为什么要这样? 不太关心本身而关心不同态之间的关系, 如能量, 跃迁... 这些对于处理问题比较重要。

第一章 电磁场的量子理论

一. 为何不把电磁场对应量子态?

1. 归一化问题。因为没有粒子数作为归一化依据。以及模平方该如何阐释。

2. 如果这样的话那么哈密顿量的形式如何。

二. 自由电磁场的量子化

$$1. \vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \hat{\epsilon}_{\vec{k}} \epsilon_k a_{\vec{k}} e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + c.c.$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \sum_{\vec{k}} \frac{\vec{k} \times \hat{\epsilon}_{\vec{k}}}{\omega_k} \epsilon_k a_{\vec{k}} e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + c.c.$$

式中 ϵ_k 为归一化常数而 $a_{\vec{k}}$ 为无量纲复数振幅。

$$\omega = \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2), H = \int \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2) d^3\vec{r}. \hat{\epsilon}_{\vec{k}} = \left(\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V}\right)^{1/2}$$

2. 三维谐振腔。 $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_j (m_j v_j^2 \hat{q}_j^2 + \frac{\hat{p}_j^2}{m_j})$, m_j 为人为定义的。

对 p_j 与 q_j 量子化为 \hat{p}_j 和 \hat{q}_j , $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_j (m_j v_j^2 \hat{q}_j^2 + \frac{\hat{p}_j^2}{m_j})$.

定义升降算符 $\mathcal{H} = \hbar \sum_j v_j (a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2})$, $[a_j, a_j^\dagger] = \delta_{jj}$.

3. 自由电磁场中的模式展开。① 离散情形 ② 连续情形。

也可以在其他坐标系下展开。★ 为何单模 实际中会有什么问题 ★ $a(t)$ 是啥? 也是模

4. 自由电磁场中的量子化。 $a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^* \rightarrow a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^\dagger$. $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) + \vec{E}^{(-)}(\vec{r}, t)$.

$\vec{E}^{(+)} \leftrightarrow a, \vec{E}^{(-)} \leftrightarrow a^\dagger$. 注意不同地点的时候会有不对易性。

注意测量是否能同时进行。

三. Fock 或粒子数态. ★ 好的地方与坏的地方

1. $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$. 其本征态为 $|n\rangle$, $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, $|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$.

2. $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$, $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$, 构成了一个表象。表象下 $\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{n}, \hat{x}, \hat{p}$.

表象下的量子态: $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$, $\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$

3. 无穷、无负整数激发; 相位算符的定义困难。★量子相位与经典相位

4. $\langle E \rangle = 0$, $\langle E^2 \rangle = 2|E|^2(n + \frac{1}{2})$, 有涨落乃至真空涨落。

是原子自发辐射的激励源, 造成 Lamb Shift 和 Casimir Effect.

5. 粒子数表象下的多模场

四. 算符代数的常用公式

1. 为什么算符运算复杂 ①对易 ②微分

2. 算符函数 $f(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \hat{A}^n$, 对于单变量没有问题。算符函数

的求导 ①算符映射 ②变化量 ③设共同作用域为 Q, 则称

$d(\hat{A}_1, \hat{A}_2) = \max(\hat{A}_1 f(x), \hat{A}_2 f(x))$ 为距离 ④极限 ⑤除以极限

2) 把 ΔA 变为 λ , $\frac{df(\hat{A})}{d\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{df(\hat{A} + \lambda)}{d\lambda}$.

3. 指数算符导数的参数微分。 $\hat{G}' = \frac{d}{dx} G(x)$, $\frac{d}{dx} e^{G(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{(n+1)!} \hat{G}^m \hat{G}' \hat{G}^{n-m}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{(n+m+1)!} G^n G' G^m = \int_0^1 dy \sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{1}{n!} G^n G' \sum_{m=0}^{\infty} (1-y)^m \frac{1}{m!} G^m$$

$= \int_0^1 dy e^{y\hat{G}} \hat{G}' e^{(1-y)\hat{G}}$, 总之 Sneddon 公式。进一步地有

$$e^{-\hat{G}(x)} \frac{d}{dx} e^{G(x)} = \int_0^1 dy e^{-(1-y)\hat{G}} \hat{G}' e^{(1-y)G} = \int_0^1 dy e^{-y\hat{G}} \hat{G}' e^{yG}$$

$$= \int_0^1 dy \left[\hat{G}' + (-y)[G, \hat{G}'] + \frac{(-y)^2}{2!} [G, [G, \hat{G}']] + \dots \right] = \hat{G}' + \frac{1}{2!} [G, \hat{G}' G] + \frac{1}{3!} [[G, \hat{G}'], G]$$

4. 相似变换。 $\hat{S}^{-1} \hat{A} \hat{S}$, $\hat{S}^{-1} F(\hat{A}) \hat{S} = F(\hat{S}^{-1} \hat{A} \hat{S})$, $\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{A} e^{-i\hat{H}t/\hbar}$.

$$e^{x\hat{A}} \hat{B} e^{-x\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d}{dx} (e^{x\hat{A}} \hat{B} e^{-x\hat{A}}) |_{x=0} x^n = e^{x\hat{A}} \hat{B} e^{-x\hat{A}}, \mathcal{L}_x(\hat{B}) = [\hat{A}, \hat{B}],$$

$$e^{x\hat{A}} \hat{B} e^{-x\hat{A}} = \hat{B} + x[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{x^2}{2} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]$$

5. BCH 定理。 $e^{x\hat{A}} e^{x\hat{B}} = e^{G(x)} = e^{x\hat{G}_1 + x^2\hat{G}_2 + x^3\hat{G}_3 + \dots}$, $e^{-x\hat{B}} e^{-x\hat{A}} \frac{d}{dx} (e^{x\hat{A}} e^{x\hat{B}})$

$$= e^{-x\hat{B}} e^{-x\hat{A}} [\hat{A} e^{x\hat{A}} e^{x\hat{B}} + e^{x\hat{A}} e^{x\hat{B}} \hat{B}] = \hat{B} + \hat{A} - x[\hat{B}, \hat{A}] + \frac{x^2}{2} [[\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \dots]$$

$$[\hat{G}', \hat{G}] = [\hat{G}_1 + 2x\hat{G}_2 + \dots, x\hat{G}_1 + x^2\hat{G}_2 + \dots] = -x^2[G_1, G_2] + \dots$$

$$e^{-\hat{G}} \frac{d}{dx} e^{\hat{G}} = \hat{G}_1 + 2x\hat{G}_2 + 3x^2\hat{G}_3 + \dots - \frac{x^2}{2!} [\hat{G}_1, \hat{G}_2] + \dots$$
 得到了

$$G_1 = \hat{A} + \hat{B}, G_2 = \frac{1}{2}[A, B], G_3 = \frac{1}{12} \{ [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] \}$$

当 $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] = 0$ 时, $e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B}} e^{\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}$

6. 产生与湮灭。 $[a, f(a, a^\dagger)] = \frac{\partial f}{\partial a^\dagger}$, $[a^\dagger, f(a, a^\dagger)] = -\frac{\partial f}{\partial a}$.

$$e^{x\hat{a}^\dagger} \hat{a} e^{-x\hat{a}^\dagger} = \hat{a} - x, \quad e^{x\hat{a}} \hat{a}^\dagger e^{-x\hat{a}} = \hat{a}^\dagger + x, \quad \text{推广到 } f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger).$$

$$e^{x\hat{a}^\dagger} \hat{a} e^{-x\hat{a}^\dagger} = \hat{a} e^{-x}, \quad e^{x\hat{a}} \hat{a}^\dagger e^{-x\hat{a}} = \hat{a}^\dagger e^x, \quad \text{推广到 } f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger).$$

7. 正规排列与反正规排列 \hat{a}^\dagger 在 \hat{a} 的左侧与右侧, 记为 $\mathcal{N}(\hat{O})$ 或 \hat{O} .

利用这种排列, 可以避免对易问题。

四. 粒子数算符的延伸

1. 量子相位算符 \star 共轭的量 产生的光子如何?

1) 相位 ϕ 存在并在相干叠加中显示 \odot 整体本身不可测

$$2) q(t) = Ae^{-i\omega t} + A^* e^{i\omega t} \Rightarrow A = |A| e^{i\phi}$$

$$E(t) = ae^{-i\omega t} + a^* e^{i\omega t} \Rightarrow \hat{a} = \hat{g} e^{i\hat{\phi}} \text{ 可以吗?}$$

$$3) \text{反证法 } \hat{g} = \sqrt{\hat{n}+1}, \quad \hat{n} = e^{-i\hat{\phi}} (\hat{n}+1) e^{i\hat{\phi}}, \quad [\hat{n}, \hat{\phi}] = i.$$

但是 $\phi \in [0, 2\pi]$, 所以 $\langle (\Delta\hat{n})^2 \rangle = \langle (\Delta\hat{\phi})^2 \rangle \geq \frac{1}{4}$, 失败了。

尤其 \hat{n} 离散而 $\hat{\phi}$ 连续, 很奇怪。

另外 $e^{i\hat{\phi}}$ 不正则 $\hat{\phi}$ 不厄米。

2. 量子相位算符的正余弦表示。

$\cos \hat{\theta}, \sin \hat{\theta}$ 。 \odot 正确地说明了粒子数态的相位随机性

\odot 同时需要两个观测量。

3. 量子相位算符的正规化定义。 \star 有限无限 - 伪随机真随机 一种内在联系 \star 截断的物理意义。

$$|\theta_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{M+1}} \sum_{n=0}^M e^{in\theta_k} |n\rangle, \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{M+1}} \sum_{k=0}^M e^{-in\theta_k} |\theta_k\rangle, \quad \theta_k = \theta_0 + \frac{2k\pi}{M+1}.$$

$$e^{i\hat{\phi}_\theta} = \sum_{k=0}^M e^{i\theta_k} |\theta_k\rangle \langle \theta_k|, \quad \hat{\phi}_\theta = \sum_{k=0}^M \theta_k |\theta_k\rangle \langle \theta_k|.$$

$$e^{i\hat{\phi}_\theta} |n\rangle = \begin{cases} |n-1\rangle \\ e^{i(M+1)\theta_0} |M\rangle \end{cases}, \quad e^{-i\hat{\phi}_\theta} |n\rangle = \begin{cases} |n+1\rangle \\ e^{-i(M+1)\theta_0} |0\rangle \end{cases}.$$

$$W(\theta_k) = \frac{1}{M+1} \left| \sum_{n=0}^M c_n e^{-in\theta_k} \right|^2, \quad M \rightarrow \infty \text{ 时 } W(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{n=0}^M c_n e^{-in\theta} \right|^2 d\theta,$$

$$\int_0^{2\pi} W(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=0}^M c_n e^{-in\theta} \right|^2 d\theta = 1.$$

4. 奇偶校验算符 $\hat{\nu} = e^{i\pi\hat{a}^\dagger\hat{a}} = e^{i\pi\hat{n}}$.

5. 衡量某些性质需要这些, 可以直接用实验测而非进行一种先层析再计算。 \star 非经典性指标

五. 辐射场的密度矩阵与热平衡光场

1. $\hat{\rho}_T = e^{-\hat{H}/k_B T} / \text{Tr}(e^{-\hat{H}/k_B T})$ 得到了配分函数 $Z = \frac{e^{-\bar{n}\omega/2k_B T}}{1 - e^{-\bar{n}\omega/k_B T}}$

2. $\bar{n} = \frac{1}{e^{\bar{n}\omega/k_B T} - 1}$, $\hat{\rho}_T = \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}}\right)^n |n\rangle\langle n|$, $P_n = \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n} + 1)^{n+1}}$

3. $\langle \hat{n}^2 \rangle = 2\bar{n}^2 + \bar{n}$, $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \bar{n}^2 + \bar{n}$. $\bar{n} \gg 1$ 时, $\Delta n \approx \bar{n} + \frac{1}{2}$.

$\bar{n} \ll 1$ 时, $\Delta n \approx \sqrt{\bar{n}}$. 总之涨落相比而言很大。

4. $U(\omega) d\omega = \rho(\omega) \pi \hbar \omega$, $\rho(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$, $U(\omega) d\omega = \frac{8\pi \hbar \omega^3}{c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} d\omega$.

称为 Planck 公式。高温极限下 Rayleigh-Jeans; 低温极限下

Wien; 对 $U(\omega)$ 积分 Stefan-Boltzmann. \star 建立运算 \rightarrow 解释 \rightarrow 预言

六. Lamb 位移

\star 忽略是探测器的问题

1. 氢原子初步认识

\star 不能写信要具体分析

1) 非相对论情形的结构

2) 相对论中的精细与超精细结构

3) 电子与真空中虚粒子的作用

4) 不同的能标的对比

2. 氢原子的跃迁, $3^2S_{1/2} \rightarrow 2^2P_{1/2}$, $3^2P_{1/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}$, 分别为 e 和 γ 线,

比理论值少了 0.01 cm. 最初是 Houston 和 Hsieh, 后来被 Lamb 证实。

意义在于在量子光学之前。当年和现代的探测。

3. 当年的推导。真空电磁场的涨落 $\vec{F} \rightarrow \vec{F} + \delta\vec{F}$, $\langle \Delta V \rangle = \langle \delta\vec{F} \cdot \nabla V \rangle$

$+ \langle \frac{1}{2} (\delta\vec{F} \cdot \nabla)^2 V(\vec{F}) \rangle = \frac{1}{6} \langle (\delta\vec{F})^2 \rangle_{\text{vac}} \langle \nabla^2 V \rangle_{\text{atom}}$; 第二部分为

$\frac{e^2}{\epsilon_0} |\psi(0)|^2$, $\psi(0)$ 对于 2s 能级, $\frac{1}{\sqrt{8\pi a_0^3}}$, 得到了 $\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0^3}$; \star 经典性

第一部分由 $m \frac{d^2}{dt^2} (\delta\vec{F})_k = -eE_k$, $(\delta\vec{F})_k \cong \frac{e}{mc^2 k^2} E_k$,

$\langle (\delta\vec{F})^2 \rangle_{\text{vac}} = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{e}{mc^2 k^2}\right)^2 \left(\frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 V}\right) = 2 \left(\frac{V}{2\pi}\right)^3 4\pi \int dk k^2 \left(\frac{e}{mc^2 k^2}\right)^2 \left(\frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 V}\right)$

$= \frac{1}{2\pi^2 \epsilon_0^2} \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right) \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \int \frac{dk}{k}$, 对于玻尔半径和康普顿波长, \star 近似了

$\langle \Delta V \rangle = \frac{4}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \frac{1}{8\pi a_0^3} \ln\left(\frac{4\epsilon_0 \hbar c}{e^2}\right) \approx 1 \text{ GHz}$. \star 答案对了

4. 更严格的求解需要量子电动力学/量子场论, 其建立

用了实验物理学家的精细的数据。

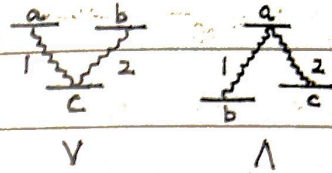
七. 量子拍 \star 时间分辨取代时间积分

1. 半经典: 原子量子化 + 经典电磁场 + 真空涨落 \star 在 Lamb 位移中可以

全量子: 原子量子化 + 电磁场量子化

2. 三能级系统

1) V 型原子与 Λ 型原子



2) 矩阵元与振荡电偶极

3) 半经典处理 $|\psi(t)\rangle = c_a e^{-i\omega_a t} |a\rangle + c_b e^{-i\omega_b t} |b\rangle + c_c e^{-i\omega_c t} |c\rangle$

4) 全量子处理

$$\textcircled{1} |\psi_V(t)\rangle = c_1 |i\rangle |0\rangle |0\rangle + c_2 |c\rangle |1\rangle |0\rangle + c_3 |c\rangle |0\rangle |1\rangle$$

$$|\psi_\Lambda(t)\rangle = c_1 |i\rangle |0\rangle |0\rangle + c_2 |b\rangle |1\rangle |0\rangle + c_3 |c\rangle |0\rangle |1\rangle$$

$$\textcircled{2} \langle \psi_V(t) | E_1^{(+)}(t) E_2^{(+)}(t) | \psi_V(t) \rangle = K e^{-i(\nu_1 - \nu_2)t}$$

$$\langle \psi_\Lambda(t) | E_1^{(+)}(t) E_2^{(+)}(t) | \psi_\Lambda(t) \rangle = 0$$

作为一种不同, 分别与不可区分与可区分 \star 复习

3. 再次对比一下两种观念

八. 光的本质

1. 为什么需要光子的概念 - 要看作一个客体, 有深层次的物理行为 - 更深层次的需要量子场论

2. 半经典理论的缺陷 - 光的产生与湮灭 - 过程是如何涉及的 - 但是量子理论仍然 - 没有说明白

3. 有些关于光子概念的否定 - 从探测手段入手

4. 结语

第二章 辐射场的相干态和压缩态 \star 挤压态 \star 为何称为相干、压缩

一. 经典电流的辐射

1. 经典电流 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ 与向量势算符 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 之间耦合. $\mathcal{V}(t) = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) d^3r$

$|\psi(t)\rangle = \frac{i}{\hbar} \mathcal{V}(t) |\psi(t)\rangle$. 利用相互作用图像与 Dyson 序列.

2. $e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \hat{Z}(t')} = \prod e^{a_k \hat{a}_k^\dagger - a_k^* \hat{a}_k}$ 除了整体相位。 $|\psi(t)\rangle = \prod e^{a_k \hat{a}_k^\dagger - a_k^* \hat{a}_k} |0\rangle_k$ 。

$|\alpha\rangle = e^{a\hat{a}^\dagger - a^*\hat{a}}$ 。 a_k 由电流分布 $\frac{E_k}{\hbar \omega_k} \int_0^t dt' \int d^3r' \mathcal{E}_k(\mathbf{r}', t') e^{i\omega_k t' - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}$

二. 相干态的描述 (Heisenberg 图像)

1. $D(\alpha) = e^{a\hat{a}^\dagger - a^*\hat{a}}$ ，利用 BCH 得 $D(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{a\hat{a}^\dagger} e^{-a^*\hat{a}}$ 和

$D(\alpha) = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-a^*\hat{a}} e^{a\hat{a}^\dagger}$ 。称为平移算符。

2. $D(\alpha)$ 为酉算符 $D^\dagger(\alpha) = D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$ 。 $D^\dagger(\alpha) \hat{a} D(\alpha) = \hat{a} + \alpha$ 。

$D^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger D(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*$

3. $|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle$

三. 相干态的描述 (Schrödinger 图像)

1. $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ 。 $|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ 。这是 Fock 表象。

2. 光子数分布。 $\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2$ ， $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \langle \hat{n} \rangle$ 。 $p(n) = \frac{\langle \hat{n} \rangle^n e^{-\langle \hat{n} \rangle}}{n!}$ 。泊松分布

3. 不确定性。 $\hat{\chi}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ ， $\hat{\chi}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$ 。 $[\hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2] = \frac{i}{2}$ 。

$\langle (\Delta \chi_1)^2 \rangle = \langle (\Delta \chi_2)^2 \rangle = \frac{1}{4}$ ，达到了有可能的极限。

4. 非正交性。 $\langle \alpha | \alpha' \rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\alpha'|^2}{2}} e^{a^* \alpha'}$ ， $|\langle \alpha | \alpha' \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \alpha'|^2}$ 。

5. 超完备性。 $\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \hat{1}$ ，利用 Fock 表象。相干态是一种表示而非表象，反映了概率上的叠加。

6. 时间演化。 $|\alpha\rangle$ 演化为 $|\alpha e^{-i\omega t}\rangle$ 。★ 这里是 Schrödinger 图像，Heisenberg 图像是 E。

四. 相干态的相干性

1. 易于与原子发生相互作用，体现在二阶关联函数中。

2. 相干态的波函数类似于波包。

五. 压缩态的描述 (Heisenberg 图像)

1. $D(\alpha)$ 为一次项， $S(\zeta)$ 为二次项。

2. $S(\zeta) = e^{\frac{1}{2}\zeta^* \hat{a}^2 - \frac{1}{2}\zeta \hat{a}^{\dagger 2}}$ ， $\zeta = r e^{i\theta}$ ， r 与压缩系数有关。称为压缩算符。

3. $S(\zeta)$ 为酉算符。 $S^\dagger(\zeta) = S^{-1}(\zeta) = S(-\zeta)$ 。 $S^\dagger(\zeta) \hat{a} S(\zeta) = \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh r$ ，

$S^\dagger(\zeta) \hat{a}^\dagger S(\zeta) = \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} e^{-i\theta} \sinh r$ 。旋转复振幅。 $\hat{Y}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a} e^{i\frac{\theta}{2}} + \hat{a}^\dagger e^{-i\frac{\theta}{2}})$ ，

$\hat{Y}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{a} e^{-i\frac{\theta}{2}} - \hat{a}^\dagger e^{i\frac{\theta}{2}})$ ， $S^\dagger(\zeta) \hat{Y}_1 S(\zeta) = \hat{Y}_1 e^{-r}$ ， $S^\dagger(\zeta) \hat{Y}_2 S(\zeta) = \hat{Y}_2 e^r$ 。

$$4. |\xi\rangle = S(\xi)|0\rangle.$$

六. 压缩态的描述 (Schrödinger 图像)

$$1. |\xi\rangle = \frac{1}{\cosh r} \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\theta} (\tanh^n r) \frac{\sqrt{(2n)!}}{n! 2^n} |2n\rangle, \text{ 利用了 } SU(1,1) \text{ 的 BCH 公式.}$$

$$2. \text{光子数分布. } \langle n \rangle = \sinh^2 r, \langle (\Delta n)^2 \rangle = 2\langle n \rangle (\langle n \rangle + 1)$$

$$3. \text{不确定性. } \langle (\Delta Y_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r}, \langle (\Delta Y_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2r}. \text{ 压缩因子}$$

$$\text{在 Decibels 中为 } -10 \log \frac{(\Delta X_0)^2_{\min}}{(\Delta X_0)^2}.$$

七. 压缩态的压缩性

1. LIGO 中的噪声, 量子的有真空涨落与光子压强. 对振幅压缩

2. 压缩态的波函数类似于波包, 但压缩了. 极端时为 δ 函数 \leftrightarrow 平面波.

八. 压缩相干态

$$1. |\alpha, \xi\rangle = S(\xi) D(\alpha) |0\rangle.$$

2. 不确定性.

九. 多模压缩态 \star 对一切的一种划分

$$1. \text{双模压缩. } S(\xi) = e^{\xi^* a_{\nu+\nu'} a_{\nu-\nu'} - \xi a_{\nu+\nu'}^\dagger a_{\nu-\nu'}^\dagger}. \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\nu+\nu'} + e^{i\delta} a_{\nu-\nu'}),$$

$$b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\nu+\nu'}^\dagger + e^{i\delta} a_{\nu-\nu'}^\dagger), \quad b_1 = \frac{1}{2} (b + b^\dagger), \quad b_2 = \frac{1}{2i} (b - b^\dagger).$$

$$2. \text{多模压缩. } S[\xi(\omega)] = \int \frac{d\nu'}{2\pi} e^{\xi^*(\nu') a_{\nu+\nu'} a_{\nu-\nu'} - \xi(\nu') a_{\nu+\nu'}^\dagger a_{\nu-\nu'}^\dagger}.$$

十. 自旋压缩态

第三章 光场-光场与光子-光子相干性 \star 振幅 \star 物质波 \star 分辨性 \star 可选性

一. 从迈克尔逊测量干涉仪到 HBT 实验

$$1. \text{迈克尔逊测量干涉仪. } I(\alpha) = I_0 \frac{J_1(\frac{\pi \alpha D}{\lambda \alpha B})}{\frac{\pi \alpha D}{\lambda \alpha B}} [1 + \cos(\frac{\pi \alpha B}{\lambda})]. \text{ 本质上}$$

是考虑衍射效应的杨氏双缝干涉仪. $I = K \langle E^* E \rangle$; 无关且光强相等,

$$= 2KI_0 \{ 2 + \cos(\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) + \cos(\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) \}, \text{ 进了和差化积与近似,}$$

$$= 4KI_0 \{ 1 + \cos(\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) \times \cos(\frac{\pi \nu r_0}{\lambda}) \}, \text{ 频率的高的部分很影响.}$$

2. HBT 干涉仪. 本来的光场的相加变成了光强的相乘. $I(\vec{r}_1) I(\vec{r}_2)$ 没有了

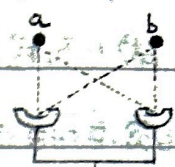
$$\text{频率的高的部分, } = 2K^2 I_0^2 \{ 2 + \cos(\frac{\pi \nu r_0}{\lambda}) \}. \text{ 这是经典的结果.}$$

3. Purcell 给出的解释。经典粒子的情况变为了，

$$|\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle|^2 + |\langle 1|b\rangle\langle 2|a\rangle|^2, \text{ 概率的叠加。}$$

Boson 的 $|\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle + \langle 1|b\rangle\langle 2|a\rangle|^2$ ，为 2 倍。

Fermion 的 $|\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle - \langle 1|b\rangle\langle 2|a\rangle|^2$ ，为 0 倍。★ 没有建立量子光学，光量子即可产生激光



二. 光子探测与量子相关函数

1. 探测器的过程。在 $t \rightarrow t+dt$ 内跃迁正比于 $w_1(\vec{r}, t) = \langle i | \hat{E}^{(1)}(\vec{r}, t) \hat{E}^{(1)}(\vec{r}, t) | i \rangle$

或者是 $w_1(\vec{r}, t) = \sum_i P_i \langle i | \hat{E}^{(1)}(\vec{r}, t) \hat{E}^{(1)}(\vec{r}, t) | i \rangle$ ★ 也可以用 Poynting 矢量

★ 实际探测器是否会有不正比于 dt 的情况

2. 一阶相关函数 $G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; t_1, t_2) = \text{Tr} [\rho \hat{E}^{(1)}(\vec{r}_1, t_1) \hat{E}^{(1)}(\vec{r}_2, t_2)]$

平稳光场 $\tau = t_2 - t_1, G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \tau) = G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; t_1, t_2)$

二阶相关函数 $G^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4; t_1, t_2, t_3, t_4)$

3. 一阶量子相干度 $g^{(1)}(\vec{r}, \tau) = \frac{\langle \hat{E}^{(1)}(\vec{r}, t) \hat{E}^{(1)}(\vec{r}, t+\tau) \rangle}{\sqrt{\langle I(\vec{r}, t) \rangle \langle I(\vec{r}, t+\tau) \rangle}}$

二阶量子相干度 $g^{(2)}(\vec{r}, \tau) = \frac{\langle \hat{E}^{(1)}(\vec{r}, t) \hat{E}^{(1)}(\vec{r}, t+\tau) \hat{E}^{(1)}(\vec{r}, t+\tau) \hat{E}^{(1)}(\vec{r}, t) \rangle}{\langle I(\vec{r}, t) \rangle \langle I(\vec{r}, t+\tau) \rangle}$

4. $g^{(2)}(0) = 1 + \frac{\langle \Delta I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2}$ 。二阶的统计特征最为明显。 $g^{(2)}(0)$ 分别为

Thermal $\Leftrightarrow 2$, Coherent $\Leftrightarrow 1$, Fock $\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n}$, Squeezed $\Leftrightarrow 3$ 等等

5. $g^{(2)}(\tau)$ 分别为 Thermal \Leftrightarrow Lorentzian, Stellar \Leftrightarrow Gaussian, Coherent \Leftrightarrow Plain.

三. 一阶相干性和杨氏双缝干涉

1. 杨氏双缝干涉 $\langle I(\vec{r}, t) \rangle = \langle I^{(1)}(\vec{r}) \rangle + \langle I^{(2)}(\vec{r}) \rangle + 2\sqrt{\langle I^{(1)}(\vec{r}) \rangle \langle I^{(2)}(\vec{r}) \rangle} \text{Re} [g^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \tau)]$

2. 单光子波包 $|\Psi\rangle = \int d\omega f(\omega) a^\dagger(\omega) |0\rangle$ 。 $G^{(1)}(z_1, z_2; t_1, t_2)$ ，令 $\nu = \omega - \omega_0$ ，

$T_i = t_i - z_i/c$ ， $= [e^{i\omega_0(T_1 - T_0)} \mathcal{F}_{T_1 - T_0}^* \{f(\nu)\}] [e^{-i\omega_0(T_2 - T_0)} \mathcal{F}_{T_2 - T_0} \{f(\nu)\}]$ ， 交叠程度。

3. 多模相干态 $|\Psi\rangle = \prod_k |\alpha_k\rangle$ ， $G^{(1)}(z_1, z_2; t_1, t_2) = E^*(z_1, t_1) E(z_2, t_2)$ 。

4. 多模热光场 $\langle \langle \hat{E}^{(1)}(\vec{r}, t) \hat{E}^{(1)}(\vec{r}, t) \rangle \rangle_{\text{Ensemble}}$ 。和每一个独立的单光子的总和一样。

5. 两原子发光 $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a, b\rangle + |a', b'\rangle) |0\rangle$ ， $|\psi(\infty)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|b, b'\rangle (|\gamma\rangle + |\gamma'\rangle))$ 。

体现的是两个原子的不可分辨性。

四. 二阶相干性

1. HBT 实验的物理涵义。★ 探测不同路径

2. 单光子。 $G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) = 2\mathcal{E}^4 [1 + \cos((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))]$ 。

3. 两原子发光。非相干激发 $|\psi(t=0)\rangle$ 到 $|\psi(t \rightarrow \infty)\rangle$ 。一阶相干性消失。

二阶相关函数仍然有。 $G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) = 2|\alpha|^2 \mathcal{E}^4 [1 + \cos((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))]$ 。

4. 热光场。 $G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) = 2\mathcal{E}^4 \langle n \rangle^2 (3 + \cos[(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)])$ 。

5. 相干态。 $G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) = 2\mathcal{E}^4 \langle n \rangle^2 (2 + \cos[(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)])$ 。

6. 光子反聚束。 $g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0)$ ，是经典光场 C-S 不等式的自然延伸。

$g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$ 。是非经典的行为体现了反聚束。 $g^{(2)}(0) = 1 + \frac{\langle n \rangle^2 - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle^2}$ 。

★ 全同性的一种体现？这里对应了量子全同性。

7. 中子源。 $\{c_k, c_{k'}^\dagger\} = \delta_{kk'}$, $\{c_k, c_{k'}\} = \{c_k^\dagger, c_{k'}^\dagger\} = 0$ 。

$G^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) = 2\mathcal{E}^4 [1 - \cos((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))]$ 。只差了一个负号。

8. 分束器。 $\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}_{out} = \begin{bmatrix} t_1 & r_2 \\ r_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}_{in} \xrightarrow[\text{不依赖}]{SU(2)} \begin{bmatrix} \cos\theta & e^{i\phi} \sin\theta \\ -e^{i\phi} \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi=\pi} \begin{bmatrix} \cos\theta & i \sin\theta \\ i \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \xrightarrow{R=I}$

在 $\begin{bmatrix} | \\ | \end{bmatrix}$ 。将两个模式进行线性叠加。哈密顿量为对于 $\begin{bmatrix} \cos\theta & i \sin\theta \\ i \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ，

$\hat{H} = -\hbar(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger)$, $S(\theta) = e^{i\theta(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a})}$ 。可以用于变换量子态。

9. 单光子。联合探测效率 $P(x_a, x_b) = \frac{1}{2} K_a K_b \mathcal{E}^4 \{1 - \cos[\frac{2\pi(x_a - x_b)}{L}]\}$ 。

10. 相干态。联合探测效率 $P(x_a, x_b) = \frac{1}{4} K_a K_b \{ \langle (I_1 + I_2)^2 \rangle - 2 \langle I_1 I_2 \rangle \cos[\frac{2\pi(x_a - x_b)}{L}] \}$ 。

五. 一些和 BS 有关的计算

1. $\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}_{out} = S^\dagger(\theta) \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}_{in} S(\theta)$, $\hat{p}_{out} = S(\theta) \hat{p}_{in} S^\dagger(\theta) = S^\dagger(-\theta) \hat{p}_{in} S(-\theta)$ 。

2. $|\psi\rangle_{in} = |\alpha\rangle|0\rangle$, $|\psi\rangle_{out} = S(\theta)|\alpha\rangle|0\rangle = S(\theta)D(\alpha)|0\rangle|0\rangle = S(\theta)D(\alpha)S^\dagger(\theta)|0\rangle|0\rangle$
 $= e^{\alpha(\hat{a}^\dagger \cos\theta + i\hat{b}^\dagger \sin\theta) - \alpha^*(\hat{a} \cos\theta - i\hat{b} \sin\theta)} |0\rangle|0\rangle = |\alpha \cos\theta\rangle |i\alpha \sin\theta\rangle$ 。

3. $|\psi\rangle_{in} = |\alpha\rangle|\beta\rangle$, $|\psi\rangle_{out} = S(\theta)D(\alpha)D(\beta)S^\dagger(\theta)|0\rangle|0\rangle = e^{\hat{a}^\dagger(-\theta)\alpha - \hat{a}(-\theta)\alpha^*}|0\rangle$
 $e^{\hat{b}^\dagger(-\theta)\beta - \hat{b}(-\theta)\beta^*}|0\rangle = e^{\hat{a}^\dagger \alpha(\theta) - \hat{a} \alpha^*(\theta)}|0\rangle e^{\hat{b}^\dagger \beta(\theta) - \hat{b} \beta^*(\theta)}|0\rangle = |\alpha(\theta)\rangle |\beta(\theta)\rangle$ 。

4. $|\psi\rangle_{in} = |n\rangle|m\rangle$, $|\psi\rangle_{out} = S(\theta) \frac{(\hat{a}^\dagger)^n (\hat{b}^\dagger)^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} S^\dagger(\theta)|0\rangle|0\rangle$
 $= \frac{[\hat{a}^\dagger \cos\theta + i\hat{b}^\dagger \sin\theta]^n [\hat{a}^\dagger \sin\theta + \hat{b}^\dagger \cos\theta]^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} |0\rangle|0\rangle = \sum_{p=0}^{n+m} f_p |p\rangle |n+m-p\rangle$ 。

$|\psi\rangle_{in} = |1\rangle|0\rangle$, $|\psi\rangle_{out} = \cos\theta |1\rangle|0\rangle + i \sin\theta |0\rangle|1\rangle$ 。

$|\psi\rangle_{in} = |1\rangle|1\rangle$, $|\psi\rangle_{out} = i\sqrt{2} \sin\theta \cos\theta [|0\rangle|2\rangle + |2\rangle|0\rangle] + (-\sin^2\theta + \cos^2\theta) |1\rangle|1\rangle$ 。

$|\psi\rangle_{in} = |n\rangle|n\rangle$, $|\psi\rangle_{out} = \dots$; $|\psi\rangle_{in} = |n\rangle|0\rangle$, $|\psi\rangle_{out} = \dots$ 。称为 SU(2) 相干态。

5. BS作为一个衰减器，只保留一个出口的BS可以用来模拟散射。

$|n\rangle$ 容易受其影响，但 $|1\rangle$ 或 $|a\rangle$ 似乎不会。★到底什么特殊了

$$6. |\psi\rangle_{in} = |a\rangle|1\rangle, |\psi\rangle_{out} = b^\dagger \cos\theta |a \cos\theta\rangle |i a \sin\theta\rangle + i a^\dagger \cos\theta |a \cos\theta\rangle |i a \sin\theta\rangle,$$

考虑 $\hat{n}_a = 1$ 的子空间，在另一边得到了预报单光子态。

$$7. |\psi\rangle_{in} = S_{ab}(\xi) |0\rangle|0\rangle, |\psi\rangle_{out} = S(\theta) e^{\xi a^\dagger b - \xi a b^\dagger} S^\dagger(\theta) |0\rangle|0\rangle$$

$$= e^{\xi^* a(-\theta) b(-\theta) - \xi a^\dagger(\theta) b^\dagger(\theta)} |0\rangle|0\rangle = e^{\xi^* (\frac{1}{2} i a^2 + \frac{1}{2} i b^2) - \xi (\frac{1}{2} i a^2 + \frac{1}{2} i b^2)}$$

$$= e^{\frac{1}{2} (i\xi)^* a^2 - \frac{1}{2} (i\xi) a^2} |0\rangle e^{\frac{1}{2} (i\xi)^* b^2 - \frac{1}{2} (i\xi) b^2} |0\rangle = |\xi\rangle|\xi\rangle.$$

六. 经典电磁波的测量理论

1. 瞬时光强。 $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$, $I(\vec{r}, t) \propto |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2$.

2. 傅里叶展开。 $\vec{E}(\vec{r}, t) = \int d^3k \hat{e}_k E(\vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}}$, $E(\vec{r}, t) = \int d\omega E(\omega) e^{-i\omega t + i\vec{k}(\omega) \cdot \vec{r}}$.

$$E(\omega) = a(\omega) e^{i\varphi(\omega)}, E(\vec{r}, t) = e^{-i\omega t + i\vec{k}(\omega) \cdot \vec{r}} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \{E(\nu)\}, I(\vec{r}, t) = |\int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \{E(\nu)\}|^2$$

3. 点光源叠加。 $E(\vec{r}, t) = e^{-i\omega t + i\vec{k}(\omega) \cdot \vec{r}} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \{ \sum_j a_j(\omega) e^{i\varphi_j(\omega)} \}$.

4. 理论平均值，系综平均值，统计平均值，时间积分平均值。

1) 不得已。 $i(\vec{r}, \vec{r}) \propto \int dt |E(\vec{r}, t)|^2 D(\vec{r}, t)$ 会对探测种类有影响。P

2) 故意的。 $i(\vec{r}, t) \propto \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} dt |E(\vec{r}, t)|^2$ 为了系综的取平均。

七. 光子计数与光子统计

1. 光电效应是光子探测计数的物理基础。★量子行为

2. 光电效应。利用光子和原子之间的相互作用哈密顿量。

单原子计数器，双原子复合计数器。★一阶与二阶微扰★不同于各极

八. 平衡零拍和差拍探测

$$1. E_s(t) E_r^*(t) = \left\{ \int d\nu \left[\sum_j A_j(\nu) e^{i[\varphi_j(\nu) - \varphi_r + (\omega_{s0} z_s - \omega_r z_r)/c]} \right] e^{-i\nu t} \right\} e^{-i(\omega_{s0} - \omega_r)t}$$

$$2. \text{差拍探测 } \mathcal{F}_{rs} \left\{ \sum_j A_j(\nu) e^{i[\varphi_j(\nu) - \varphi_r + (\omega_{s0} z_s - \omega_r z_r)/c]} \right\} e^{-i\nu t}$$

$$\text{零拍探测 } \mathcal{F}_{rs} \left\{ \sum_j A_j(\nu) e^{i[\varphi_j(\nu) - \varphi_r + \omega_0(z_s - z_r)/c]} \right\}$$

3. 测的结果可能反应了涨落也可能反应了相位。

增加的滤波器可以反映功率谱。

4. 量子情况下的处理。 $\langle \hat{n}_c \rangle = T \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + (1-T) |\beta|^2 - 2\sqrt{T(1-T)} |\beta| \langle \hat{X}(\phi_c + \frac{\pi}{2}) \rangle$.

$$\langle (\Delta \hat{n}_c)^2 \rangle = (1-T) |\beta_L|^2 \{ (1-T) + 4T \langle (\Delta \hat{X}_L(\phi_L + \frac{\pi}{2}))^2 \rangle \}. \text{前提是 } \beta_L \text{ 够大.}$$

$$\langle \hat{n}_{cd} \rangle = 2|\beta_L| \langle \hat{X}(\phi_L + \frac{\pi}{2}) \rangle, \langle (\Delta \hat{n}_{cd})^2 \rangle = 4|\beta_L|^2 \langle (\Delta \hat{X}(\phi_L + \frac{\pi}{2}))^2 \rangle. T = \frac{1}{2}.$$

第四章 量子分布理论和部分相干辐射

★相空间点 ↔ 密度矩阵: 分布函数。

★对经典性 ↔ 对量子性: 不同度规。

一. P表示

1. 最初的R表示。 $\hat{\rho} = \iint \frac{d^2\alpha}{\pi} \frac{d^2\beta}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| \hat{\rho} |\beta\rangle \langle \beta|$, 用 $R(\alpha^*, \beta) = \langle \alpha | \hat{\rho} | \beta \rangle e^{\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}$ 。

Glauber 发现它可以进行对角化。引出了P表示。 $\hat{\rho} = \int P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha$ 。

可以把任何的操作变成积分。

2. $\delta(\alpha^* - \hat{a}^+) \delta(\alpha - \hat{a}) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{-\beta(\alpha^* - \hat{a}^+)} e^{\beta(\alpha - \hat{a})} d^2\beta$ 。

$$P(\alpha, \alpha^*) = \text{Tr}[\hat{\rho} \delta(\alpha^* - \hat{a}^+) \delta(\alpha - \hat{a})]$$

3. 正规排列与反正规排列。

4. $\hat{O}_N(\hat{a}, \hat{a}^+) = \sum_{n,m} c_{nm} (\hat{a}^+)^n (\hat{a})^m$, $O_N(\alpha, \alpha^*) = \sum_{n,m} c_{nm} (\alpha^*)^n (\alpha)^m$ 。

$$\text{Tr}[\hat{\rho} \hat{O}_N(\hat{a}, \hat{a}^+)] = \int d^2\alpha O_N(\alpha, \alpha^*) P(\alpha, \alpha^*)$$

5. $\langle -\beta | \hat{\rho} | \beta \rangle e^{|\beta|^2} = \int [P(\alpha, \alpha^*) e^{-|\alpha|^2}] e^{\beta\alpha^* - \alpha\beta^*} d^2\alpha$ 。

$$P(\alpha, \alpha^*) e^{-|\alpha|^2} = \frac{1}{\pi^2} \int [\langle -\beta | \hat{\rho} | \beta \rangle e^{|\beta|^2}] e^{\alpha\beta^* - \beta\alpha^*} d^2\beta$$

6. 热态的P表示。 $P(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi \langle \hat{n} \rangle} e^{-\frac{|\alpha|^2}{\langle \hat{n} \rangle}}$ 。

相干态的P表示。 $P(\alpha, \alpha^*) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0)$ 。

粒子数态的P表示。 $P(\alpha, \alpha^*) = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\pi^2 n!} \frac{\partial^{2n}}{\partial \alpha^n \partial \alpha^{*n}} \delta^{(2)}(\alpha)$ 。

二. Q表示

1. $\delta(\alpha - \hat{a}) \delta(\alpha^* - \hat{a}^+) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\beta(\alpha - \hat{a})} e^{-\beta(\alpha^* - \hat{a}^+)} d^2\beta$ 。

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \text{Tr}[\hat{\rho} \delta(\alpha - \hat{a}) \delta(\alpha^* - \hat{a}^+)]$$

2. $Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle$, $\int Q(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha = 1$ 。

3. $\hat{O}_A(\hat{a}, \hat{a}^+) = \sum_{n,m} d_{nm} (\hat{a})^n (\hat{a}^+)^m$, $O_A(\alpha, \alpha^*) = \sum_{n,m} d_{nm} (\alpha)^n (\alpha^*)^m$

$$\text{Tr}[\hat{\rho} \hat{O}_A(\hat{a}, \hat{a}^+)] = \int d^2\alpha O_A(\alpha, \alpha^*) Q(\alpha, \alpha^*)$$

4. $Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} \int P(\alpha', \alpha'^*) e^{-|\alpha - \alpha'|^2} d^2\alpha'$

$$P(\alpha, \alpha^*) = e^{-\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*}} Q(\alpha, \alpha^*)$$

5. 相干态的 Q 表示。 $\frac{1}{\pi} e^{-|\alpha - \alpha_0|^2}$

粒子数态的 Q 表示。 $\frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}}{\pi n!}$

热态的 Q 表示。 $\frac{1}{\pi(1+\langle n \rangle)} e^{-\frac{|\alpha|^2}{1+\langle n \rangle}}$

6. 压缩相干态的 Q 表示。 $Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | \beta, \xi \rangle|^2$ 利用微分方程得到了 $\langle \alpha | \beta, \xi \rangle$ 的取值。压缩相干态的粒子数表示。这是之前不易求得的。

振幅方向的压缩的粒子数表示是有意思的，考虑 $\beta \gg \sin^2 \frac{1}{2} \theta$ ，

$\beta \ll \sin^2 \frac{1}{2} \theta$ ， $\beta = 0$ 的三种情况。

三. W 表示

1. P 表示与 Q 表示引发的思考。

2. $W(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint dt d\sigma \text{Tr} [\hat{\rho} e^{-i(p\hat{p} + q\hat{q})}] e^{i(p\hat{p} + q\hat{q})}$ 。与经典对应。

3. $\bar{W}(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta \text{Tr} [\hat{\rho} e^{\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}}] e^{\beta^*\alpha - \beta\alpha^*}$ 。

4. 三种特征函数及其对应的表示。

5. \hat{O}_s 可以定义为， $\text{Tr} [\hat{\rho} \hat{O}_s(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)] = \int d^2\alpha \hat{O}_s(\alpha, \alpha^*) \bar{W}(\alpha, \alpha^*)$ 。

6. 相干态的 W 表示。 $\frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha - \alpha_0|^2}$ 。

热态的 W 表示。 $\frac{1}{\pi(1+\langle n \rangle)} e^{-\frac{|\alpha|^2}{1+\langle n \rangle}}$ 。

粒子数态的 W 表示。 $\frac{2(-1)^n}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} L_n(4|\alpha|^2)$ ，Laguerre 多项式。

7. $\bar{W}(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi} \int P(\alpha', \alpha'^*) e^{-2|\alpha - \alpha'|^2} d^2\alpha'$

$P(\alpha, \alpha^*) = e^{-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*}} \bar{W}(\alpha, \alpha^*)$

8. $Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi} \int W(\alpha', \alpha'^*) e^{-2|\alpha - \alpha'|^2} d^2\alpha'$

$\bar{W}(\alpha, \alpha^*) = e^{-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*}} Q(\alpha, \alpha^*)$

9. 压缩相干态的 W 表示。奇偶相干态的 W 表示。

四. 一般表示理论与 P, Q, W 表示之间的联系

1. $\hat{\rho} = \pi \int F^{(W)}(\alpha, \alpha^*) \Delta^{(W)}(\alpha - \hat{a}, \alpha^* - \hat{a}^\dagger) d^2\alpha$ 。

$\Delta^{(W)}(\alpha - \hat{a}, \alpha^* - \hat{a}^\dagger) = \int e^{\Omega(\beta, \beta^*)} e^{-\beta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) + \beta^*(\alpha - \hat{a})} d^2\beta$ 。

2. 联系在于 $\Omega(\beta, \beta^*)$ 不同。

第五章 原子-光场作用半经典理论

一. 将分析力学引入原子-光场作用框架

1. $\nabla \cdot \vec{B} = 0, \nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}}$.

$\vec{E} = -\nabla\phi - \dot{\vec{A}}, \vec{B} = \nabla \times \vec{A}, A' = A + \nabla\chi, \phi' = \phi - \dot{\chi}$.

2. $\dot{f} = \{f, H\}, \{f, g\} = \sum \frac{\partial f}{\partial q_a} \frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a} \frac{\partial g}{\partial q_a}, [\hat{f}, \hat{g}] = i\hbar \{f, g\}$.

3. $H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi + V(\vec{r}), \hat{H} = \frac{(\hat{p} - q\hat{A})^2}{2m} + q\hat{\phi} + \hat{V}(\hat{r})$. 外部无电荷电流.

4. 规范不变性. $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \hat{H}'\psi', \psi' = R\psi, R = e^{i\chi(\vec{r}, t)}$.

$\langle \psi | O | \psi \rangle = \langle \psi' | O' | \psi' \rangle, O' = R O R^\dagger$ 才可观测. $\hat{E} = i\hbar \dot{\vec{A}}$ 和 \hat{H} 不是可观测的,

$\hat{E}^0 = i\hbar \dot{\vec{A}} - q\hat{\phi}$ 和 $\hat{H}^0 = \frac{(\hat{p} - q\hat{A})^2}{2m} + \hat{V}(\hat{r})$ 才是可观测的.

5. 库伦规范. $\nabla \cdot \vec{A}^c = 0 \Rightarrow \hat{\phi}^c = 0 \Rightarrow \hat{H}^c = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}) - \frac{q}{m} \vec{A}^c \cdot \hat{p} + \frac{q^2}{2m} \vec{A}^c \cdot \vec{A}^c$.

电偶极近似 $\Rightarrow \hat{H}^c = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}) - \frac{q}{m} \vec{A}^c \cdot \hat{p}$ 电场规范. 电偶极近似

$\Rightarrow \hat{H}^e = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}) - q\hat{r} \cdot \vec{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{r}) - \hat{d} \cdot \vec{E}$

二. 二能级原子与单模光场与无耗散

1. 先考虑一般的情况. $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I, \hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}), \hat{H}_I = -\hat{d} \cdot \vec{E}$.

$|\psi(t)\rangle = \sum c_i(t) |i\rangle, \hat{H}_0 = \sum \hbar \omega_i |i\rangle \langle i|, \hat{H}_I = \sum_{ij} |i\rangle \langle i| \hat{H}_I |j\rangle \langle j|$.

2. $\hat{H}_0 = \hbar \omega_a |a\rangle \langle a| + \hbar \omega_b |b\rangle \langle b|, \hat{H}_I = |a\rangle \langle a| \hat{H}_I |b\rangle \langle b| + |b\rangle \langle b| \hat{H}_I |a\rangle \langle a|$

$= \mathcal{E} \cos \omega t (d_{ab} |a\rangle \langle b| + d_{ba} |b\rangle \langle a|) = \hbar \Omega_R (e^{-i\phi} |a\rangle \langle b| + e^{i\phi} |b\rangle \langle a|) \cos \omega t$.

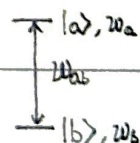
3. 薛定谔图像. $|\psi(t)\rangle = c_a(t) |a\rangle + c_b(t) |b\rangle, \dot{c}_a(t) = -i\omega_a c_a(t) + i\Omega_R e^{-i\phi} \cos \omega t c_b(t),$

$\dot{c}_b(t) = -i\omega_b c_b(t) + i\Omega_R e^{i\phi} \cos \omega t c_a(t), \tilde{c}_a(t) = i\Omega_R e^{-i\phi} \cos \omega t e^{i\omega_a t} \tilde{c}_b(t),$

$\tilde{c}_b(t) = i\Omega_R e^{i\phi} \cos \omega t e^{-i\omega_a t} \tilde{c}_a(t)$. 旋波近似适用于光场较弱时.

$\Omega_R \ll (\omega_{ab}, \omega), \Delta = \omega_{ab} - \omega, \Omega = \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}$. 可以得到 Rabi 振荡.

可以得到极化率、折射率、色散关系.



4. 相互作用图像. $H_0' = \hbar \frac{\omega_a + \omega_b + \omega}{2} |a\rangle \langle a| + \hbar \frac{\omega_a + \omega_b - \omega}{2} |b\rangle \langle b|,$

$H_I' = \hbar \frac{\omega_a - \omega}{2} |a\rangle \langle a| - \hbar \frac{\omega_b - \omega}{2} |b\rangle \langle b| + \hbar \Omega (e^{-i\phi} |a\rangle \langle b| + e^{i\phi} |b\rangle \langle a|) \cos \omega t.$

$H_I' = U^\dagger H_I U_0 = \frac{1}{2} \hbar \Delta \sigma_z - \hbar \Omega_R (e^{-i\phi + i\omega t} |a\rangle \langle b| + e^{i\phi - i\omega t} |b\rangle \langle a|) \cos \omega t.$

旋波近似适用于光场较弱时. $H_I' = \frac{1}{2} \hbar \Delta \sigma_z - \frac{1}{2} \hbar \Omega_R [e^{-i\phi} |a\rangle \langle b| + e^{i\phi} |b\rangle \langle a|]$.

5. 利用 Pauli 矩阵。 $\hat{\rho} = \frac{I + \vec{R} \cdot \vec{\sigma}}{2}$, $\vec{R} = \text{Tr}(\hat{\rho} \vec{\sigma})$. $\hat{H}_I = \frac{\hbar \Omega}{2} \hat{n} \cdot \vec{\sigma}$, 其中 \hat{n} 为单位向量, 体现了 Ω 的含义。 $\dot{\vec{R}} = \Omega \hat{n} \times \vec{R}$, $i\hbar \dot{\hat{\rho}} = [\hat{H}_I, \hat{\rho}]$. 考虑 Bloch 球面。

6. Ramsey 干涉仪。把态制备至南极转动至赤道面, 停一段时间, 转动至尽量靠近北极的地方。最后的 $\langle \sigma_z \rangle = \Delta t$ 。

三. 二能级原子与单模光场与有耗散

1. 自发辐射的耗散 $\dot{\rho}_{aa} = \dots - \Gamma \rho_{aa}$, $\dot{\rho}_{bb} = \dots + \Gamma \rho_{aa}$ 。

退相干的耗散 $\dot{\rho}_{ab} = \dots - \gamma_{\perp} \rho_{ab}$, $\dot{\rho}_{ba} = \dots - \gamma_{\perp} \rho_{ba}$ 。

2. $T_1 = \frac{1}{\Gamma}$, $T_2 = \frac{1}{\gamma_{\perp}}$, $\frac{1}{T_2} = \frac{1}{2T_1} + \frac{1}{T_c}$. $\gamma_{\perp} = \frac{\Gamma}{2} + \frac{1}{T_c}$ 。

3. 考虑稳态。 $S = \frac{\Omega_R^2 / \Gamma \gamma_{\perp}}{1 + \Delta^2 / \gamma_{\perp}^2}$. $\rho_{aa} = \frac{S}{2S+2}$, $\rho_{bb} = \frac{S+2}{2S+2}$ 。

$$S_0 = \frac{\Omega_R^2}{\Gamma \gamma_{\perp}} = \frac{d_{30}^2 \epsilon^2}{\hbar^2 \pi \gamma_{\perp}} = \frac{I}{I_0}, \quad I = \frac{\epsilon_0 c \epsilon^2}{2}, \quad I_s = \frac{\epsilon_0 c \hbar^2 \Gamma \gamma_{\perp}}{2 d_{30}^2}$$

比尔兰姆特定律: $\frac{dW}{dt} = n A z (\Gamma \rho_{aa}) \hbar \omega$, 利用 $\frac{dW}{dt} = P = IA$,

$\frac{dI}{dz} = -\Gamma \rho_{aa} n \hbar \omega$, 在 $\rho_{aa} \ll 1$ 即 αI 时成立。饱和效应,

在 $\rho_{aa} \sim \frac{1}{2}$ 即与 I 无关时成立。

四. 麦克斯韦-薛定谔方程

1. $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_c$, $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 。

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

2. $\vec{E}(z, t) = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}}(z, t) e^{-i(\omega t - kz + \phi(z, t))} + c.c.$, 其中 $\vec{\mathcal{E}}(z, t)$ 和 $\phi(z, t)$ 缓变的。

那么就可以消去一些项得到 $\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = -k \vec{\epsilon} - \frac{1}{2\epsilon_0} k \text{Im} \vec{P}$ 。

五. 受激辐射与吸收的物理图像

1. Rabi 振荡。 $\tilde{c}_a(t) = \tilde{c}_a(0) \cos \frac{\Omega_R t}{2} + i \tilde{c}_b(0) \sin \frac{\Omega_R t}{2}$, $\tilde{c}_b(t) = \tilde{c}_b(0) \cos \frac{\Omega_R t}{2} + i \tilde{c}_a(0) \sin \frac{\Omega_R t}{2}$

2. 受激辐射, $\tilde{c}_a(0) = 1$, $\tilde{c}_b(0) = 0$, $\vec{P} = -i d_{ab} \Omega_R T$, $\Delta \epsilon = \frac{ck}{2\epsilon_0} \frac{d_{ab}^2}{\hbar} \epsilon I^2$ 。

3. 吸收, $\tilde{c}_a(0) = 0$, $\tilde{c}_b(0) = 1$, $\vec{P} = i d_{ab} \Omega_R T$, $\Delta \epsilon = -\frac{ck}{2\epsilon_0} \frac{d_{ab}^2}{\hbar} \epsilon I^2$ 。

4. 相干相长与相干相消。

第六章 原子-光场作用全量子理论

一. 将哈密顿量进行量子化

1. $\hat{H}_a = \sum_i \hbar \omega_i |i\rangle \langle i|$, $\hat{H}_F = \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k$, $H_I = -\vec{d} \cdot \vec{E}$, $\vec{d} = \sum_{ij} \vec{d}_{ij} \hat{\sigma}_{ij}$, $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle \langle j|$.

$\vec{E} = \sum_k \hat{\epsilon}_k \epsilon_k (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger)$, $H_I = \sum_{ij} \sum_k (-\vec{d}_{ij} \hat{\epsilon}_k \epsilon_k) \hat{\sigma}_{ij} (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger) = \sum_{ij} \sum_k \hbar g_{ij} \hat{\sigma}_{ij} (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger)$

2. 两能级系统。 $\hat{H}_a = \frac{1}{2} \hbar \omega_a \hat{\sigma}_z$, $H_I = \sum_k \hbar g_k (\hat{\sigma}_{ab} + \hat{\sigma}_{ba}) (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger)$, 会有能量混串

的现象。现在引入相互作用图像。 $\hat{\sigma}_{ab} = \hat{\sigma}_+$, $\hat{\sigma}_{ba} = \hat{\sigma}_-$, $\hat{\sigma}_+(t) = \hat{\sigma}_+ e^{i\omega_a t}$,

$\hat{\sigma}_-(t) = \hat{\sigma}_- e^{-i\omega_a t}$, $\hat{a}_R(t) = \hat{a}_R e^{-i\omega_R t}$, $\hat{a}_R^\dagger(t) = \hat{a}_R^\dagger e^{i\omega_R t}$ 。进行了旋波近似

的一种理解。

二. 单个二能级系统与单模光场

1. Rabi 模型。 $H_I = \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ 。 Jaynes-Cummings 模型。

2. 相互作用图像方法。 $H_I' = \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{i\Delta t} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger e^{-i\Delta t})$ 。

$|\psi\rangle = \sum_n c_{a,n}(t) |a, n\rangle + c_{b,n}(t) |b, n\rangle$ 。 $\dot{c}_{a,n} = -ig\sqrt{n+1} e^{i\Delta t} c_{b,n+1}$,

$\dot{c}_{b,n+1} = -ig\sqrt{n+1} e^{-i\Delta t} c_{a,n}$ 。 产生了 Ω_R 与 $2g\sqrt{n+1}$ 的对应关系。

得到的式子中有 $\Omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2(n+1)}$ 。

3. 考虑初始时刻原子处于 $|a\rangle$ 的情况。 $w(t) = \sum_n |c_{a,n}(t)|^2 - |c_{b,n}(t)|^2$ 。

$w(t) = \sum_n |c_n(0)|^2 \left[\frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} + \frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2} \cos \Omega_n t \right]$ 。 考虑真空态。 会得到

$|a\rangle |0\rangle$ 和 $|b\rangle |1\rangle$ 之间的振荡。 考虑相干态。 $|c_n(0)|^2 = e^{-|a|^2} \frac{|a|^{2n}}{n!}$ 。

会有坍塌-复原的过程。 t_R 为 Rabi 频率, t_c 为波包时间, t_r 为复原时间。

考虑 $\langle n \rangle \rightarrow +\infty$ 时的情况。 $t_R = \frac{2\pi}{\Omega_0}$, $t_c = \frac{2\pi}{\Omega_0 \langle n \rangle}$, $t_r = \frac{2\pi}{\Omega_0 \langle n \rangle}$ 。

4. 海森堡算符方法。 $H = \frac{1}{2} \hbar \omega_a \hat{\sigma}_z + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger)$,

$\hat{A}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, H]$, $\hat{N} = \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- + \hat{a}^\dagger \hat{a}$, $\hat{c} = \frac{1}{2} \Delta \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger)$

$\hat{\sigma}_-, \hat{a}$ 满足 $x^2 + 2i(\omega - c)x + (2\omega c - \omega^2 - g^2)x = 0$, $\hat{\sigma}_+, \hat{a}^\dagger$ 满足

$x^2 - 2i(\omega - c)x + 2\omega c(\omega^2 - g^2)x = 0$ 。

5. 么正算符演化方法。 $\Delta = 0$ 。 $\hat{u}(t) = e^{-igt(\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger)}$ 。 $\hat{u}(t) = \sum_n \frac{(-igt)^n}{n!} (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger)^n$ 。

$\hat{u}(t) = \cos(gt\sqrt{a a^\dagger}) \hat{\sigma}_{aa} + \cos(gt\sqrt{a^\dagger a}) - i \frac{\sin(gt\sqrt{a a^\dagger}}{\sqrt{a a^\dagger}} a \hat{\sigma}_+ - i \frac{\sin(gt\sqrt{a^\dagger a}}{\sqrt{a^\dagger a}} a^\dagger \hat{\sigma}_-$ 。

$\Delta \neq 0$ 时就凑 H_0 使得 H_I' 不含时。

三. 两能级原子自发辐射的 Weisskopf - Wigner 理论

$$1. H_2' = \sum_{\mathbf{k}} \hbar g_{\mathbf{k}}^* (\vec{r}_0) \hat{\sigma}_+ \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\vec{r}_0} + \hbar g_{\mathbf{k}} (\vec{r}_0) \hat{\sigma}_- \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\vec{r}_0}, \quad g_{\mathbf{k}} = \frac{-d_{ab} \cdot \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{e}_k}{\hbar}, \quad \epsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}}$$

$$c_a(t) = -i \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^* (\vec{r}_0) e^{i\mathbf{k}\cdot\vec{r}_0} c_{bR}(t); \quad c_a(t) = \sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}(\vec{r}_0)|^2 \int_0^t e^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-t')} c_a(t') dt'$$

$$2. \sum_{\mathbf{k}} \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} 4\pi k^2 dk, \quad c_a(t) = \frac{-d_{ab}^2}{6\pi\hbar\epsilon_0 c^3} \int_0^{+\infty} d\omega_R \omega_R^3 \int_0^t dt' e^{i(\omega_{ab} - \omega_R)(t-t')} c_a(t') dt'$$

$$\omega_R^3 \rightarrow \omega_{ab}^3, \quad \int_0^{+\infty} d\omega_R \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_R, \quad c_a(t) = \frac{-d_{ab}^2 \omega_{ab}^3}{6\pi\hbar\epsilon_0 c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_R \int_0^t dt' e^{i(\omega_{ab} - \omega_R)(t-t')} c_a(t') dt'$$

$$I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4d_{ab}^2 \omega_{ab}^3}{3\pi c^3}, \quad \dot{c}_a(t) = -\frac{\Gamma}{2} c_a(t), \quad c_a(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} c_a(0).$$

$$3. c_{bR}(t) = -i g_{\mathbf{k}}(\vec{r}_0) \int_0^t dt' e^{-i\mathbf{k}\cdot\vec{r}_0 - \frac{\Gamma}{2}t'} = g_{\mathbf{k}}(\vec{r}_0) \frac{1 - e^{-i\mathbf{k}\cdot\vec{r}_0 - \frac{\Gamma}{2}t}}{-\Delta_{\mathbf{k}} + i\frac{\Gamma}{2}}$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} |a\rangle|0\rangle + |b\rangle \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\vec{r}_0} \frac{1 - e^{-i\mathbf{k}\cdot\vec{r}_0 - \frac{\Gamma}{2}t}}{-\Delta_{\mathbf{k}} + i\frac{\Gamma}{2}} |1_{\mathbf{k}}\rangle.$$

$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}'; t, t) = \langle \psi | E^{(+)}(\vec{r}, t) E^{(+)}(\vec{r}', t) | \psi \rangle$, $G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}'; t, t)$ 可以进行插入变为

$\psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}', t)$, 发现会有光的传播所需的时间, 会有随传播半径的衰减。

$$4. \text{爱因斯坦 A, B 系数. } \frac{N_a}{N_b} = e^{-\frac{\hbar\omega_{ab}}{k_B T}}, \quad \rho(\omega_{ab}) = D(\omega_{ab}) \bar{n} \hbar \omega_{ab}$$

$$D(\omega_{ab}) = \frac{\omega_{ab}^2}{\pi^2 c^3}, \quad \bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_{ab}/k_B T} - 1}, \quad \frac{dN_a}{dt} = -A_{ab} N_a, \quad \frac{dN_a}{dt} = B_{ba} N_b \rho(\omega_{ab}),$$

$$\frac{dN_b}{dt} = -B_{ab} N_b \rho(\omega_{ab}). \text{ 平衡态中 } B_{ab} = B_{ba}, \quad \frac{A_{ab}}{B_{ba}} = \frac{\hbar\omega_{ab}^3}{\pi^2 c^3}.$$

四. 缀饰态和正规模式劈裂

1. 哈密顿量可以拆分为一些子空间。 $H_n = \Pi_n H \Pi_n$, 得到了

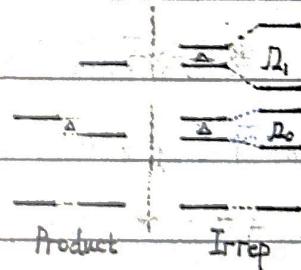
$$H_n = (|a, n\rangle, |b, n+1\rangle) \begin{pmatrix} \hbar\omega_{a(n+\frac{1}{2})} + \frac{1}{2}\hbar\Delta & \hbar g \sqrt{n+1} \\ \hbar g \sqrt{n+1} & \hbar\omega_{b(n+\frac{1}{2})} - \frac{1}{2}\hbar\Delta \end{pmatrix} (\langle a, n |, \langle b, n+1 |)^T.$$

这些子空间是哈密顿量加群生成的酉群的不可约空间。

2. 因为新的子空间是二维的, 也定义 Bloch 球面之类的。

得到了劈裂, 称为 A.C Stark Shift 或 Light Shift,

真空的时候称为 Rabi Shift.



五. 单个三能级系统与双模光场

$$1. \text{半经典情形. } H = \hbar\omega_1 |1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2 |2\rangle\langle 2| + \hbar\omega_3 |3\rangle\langle 3|$$

$$- \hbar\Omega_p (\sigma_{21} + \sigma_{12}) \cos(\omega_p t) - \hbar\Omega_c (\sigma_{31} + \sigma_{13}) \cos(\omega_c t),$$

分别为 Probe 和 Control。相互作用图像取 $|1\rangle\langle 1|$ 为固定的,

$$H_I = \hbar\Delta_p |3\rangle\langle 3| + \hbar(\Delta_p - \Delta_c) |2\rangle\langle 2| - \frac{1}{2}\hbar\Omega_p (\sigma_{31} + \sigma_{13}) - \frac{1}{2}\hbar\Omega_c (\sigma_{21} + \sigma_{12}).$$

考虑 $\Delta_p = \Delta_c$ 时, 有一个暗态出现。亮态为 $|L\rangle = \frac{\Omega_p}{\sqrt{\Omega_p^2 + \Omega_c^2}} |1\rangle + \frac{\Omega_c}{\sqrt{\Omega_p^2 + \Omega_c^2}} |2\rangle.$

暗态为 $|D\rangle = -\frac{\Omega_c}{\sqrt{\Omega_c^2 + \Omega_p^2}} |1\rangle + \frac{\Omega_p}{\sqrt{\Omega_c^2 + \Omega_p^2}} |2\rangle$ 。 $H_I' = \hbar\Delta_p |3\rangle\langle 3|$

$$-\frac{1}{2}\hbar\sqrt{\Omega_p^2 + \Omega_c^2} (|B\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle B|) = \frac{1}{2}\hbar\Delta_p + \frac{1}{2}\hbar\Delta_p\sigma_z - \frac{1}{2}\sqrt{\Omega_p^2 + \Omega_c^2}\sigma_x$$

$$\Omega = \sqrt{\Delta_p^2 + \Omega_p^2 + \Omega_c^2}, E^\pm = \frac{1}{2}\hbar(\Delta_p \pm \Omega), E^0 = 0$$

2. 受激拉曼绝热通道。绝热通道指的是哈密顿量

缓慢变化，本征态会进行跟踪。

3. 全量子情形。 $H = \hbar\omega_1 |1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2 |2\rangle\langle 2| + \hbar\omega_3 |3\rangle\langle 3| + \hbar\omega_c a^\dagger a$

$$+ \hbar\omega_p b^\dagger b + \hbar g_1 (\sigma_{31} a + \sigma_{13} a^\dagger) + \hbar g_2 (\sigma_{32} b + \sigma_{23} b^\dagger)$$

$$+ \hbar(\Delta_p - \Delta_c) |2\rangle\langle 2| + \hbar g_1 (\sigma_{31} a + \sigma_{13} a^\dagger) + \hbar g_2 (\sigma_{32} b + \sigma_{23} b^\dagger)$$

$\hat{N}_a = a^\dagger a - |1\rangle\langle 1|$, $\hat{N}_b = b^\dagger b - |2\rangle\langle 2|$ 。 H_{N_a, N_b} 为三维的

$$(|1, n_a+1, n_b\rangle, |2, n_a, n_b+1\rangle, |3, n_a, n_b\rangle) \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_1\sqrt{n_a+1} \\ g_1\sqrt{n_a+1} & \Delta_p - \Delta_c & g_2\sqrt{n_b+1} \\ 0 & g_2\sqrt{n_b+1} & \Delta_p \end{pmatrix}$$

$$(|1, n_a+1, n_b|, |2, n_a, n_b+1|, |3, n_a, n_b|)^T$$

六. 大失谐近似与系统有效相互作用

1. 考虑 $U(t) = \hbar g (Ae^{i\omega t} + A^\dagger e^{-i\omega t})$, $U(t) = \mathcal{T} [e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H(t')}]$

$$= 1 + \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H(t') + \frac{1}{2!} \int_0^t dt' H(t') \int_0^{t'} dt'' H(t'') + \dots$$

$$\text{一阶项 } [Ae^{i\omega t} - 1] - \frac{\hbar g}{i\omega} [A^\dagger(e^{-i\omega t} - 1)], \text{二阶项 } \frac{\hbar^2 g^2}{\omega} [A, A^\dagger]$$

积累的部分是 $H_{\text{eff}} = \hbar \frac{g^2}{\omega} [A, A^\dagger]$ 。

2. 应用在 Jaynes-Cummings 模型上, $\chi = \frac{g^2}{\omega}$, $H_{\text{eff}} = \hbar\chi [|a\rangle\langle a| (a^\dagger a + 1)$

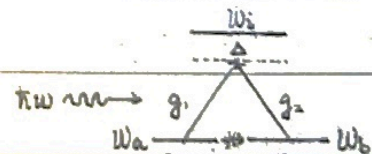
$- |b\rangle\langle b| (a^\dagger a)]$ 。当光场是粒子数态时, $U(t)$ 会引起相位。

当光场是相干态时, $U(t)$ 会引起相空间的转动。

七. 等效于 Jaynes-Cummings 模型的其他模型

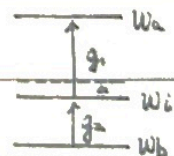
1. $A = g_1 \sigma_{ia} a + g_2 \sigma_{ib} a$, $H_{\text{eff}} = \frac{\hbar}{\omega} [A, A^\dagger]$,

交叉项为 $-g_1 g_2 (\sigma_{ab} + \sigma_{ba}) a^\dagger a$



2. $A = g_1 \sigma_{ai} a + g_2 \sigma_{ib} a^\dagger$, $H_{\text{eff}} = \frac{\hbar}{\omega} [A, A^\dagger]$,

交叉项为 $g_1 g_2 (\sigma_{ab} a^2 + \sigma_{ba} a^{\dagger 2})$



第七章 耗散的量子理论 (I) - 主方程

一. 耗散的一些特点

1. $p_{SR} = \begin{matrix} \boxed{S} \\ R \end{matrix}, p_S = \text{Tr}_R(p_{SR}).$

2. ①自由度很高 ②耦合不改变环境 ③耦合比较弱

3. $H = H_S + H_R + H_I$, 引入相互作用图像, $i\hbar \dot{p}_{SR} = [V(t), p_{SR}]$,

$$p_{SR}(t) = p_{SR}(t_i) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^t [V(t'), p_{SR}(t')] dt'$$

$$\dot{p}_{SR}(t) = -\frac{i}{\hbar} [V(t), p_{SR}(t)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_i}^t [V(t'), [V(t'), p_{SR}(t')]] dt'$$

4. Born 近似. $p_{SR}(t') \approx p_S(t') \otimes p_R(t_i)$.

Markov 近似. $p_{SR}(t') \approx p_S(t) \otimes p_R(t_i)$.

二. 原子在热库中的衰减

1. $V(t) = \hbar \sum_R g_R (\sigma_- b_R^\dagger e^{-i\Delta_R t} + \sigma_+ b_R e^{i\Delta_R t})$.

2. $p_R(t_i) = \otimes (1 - e^{-\frac{\hbar\omega_k}{k_B T}}) e^{-\frac{\hbar\omega_k}{k_B T}} a_k^\dagger a_k$

$$\dot{p}_S = \int_{t_i}^t dt \sum_R g_R^2 [\sigma_- \sigma_+ p_S(t') - \sigma_+ p_S(t') \sigma_-] n_R e^{-i\Delta_R(t-t')} + [\sigma_+ \sigma_- p_S(t') - \sigma_- p_S(t') \sigma_+] (n_R + 1) e^{i\Delta_R(t-t')} + \text{H.c.}$$

3. $\Gamma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-4dab^2\omega a^3}{3\hbar c^3}, p_S = -\frac{1}{2} \bar{n}_{th} \Gamma [\sigma_- \sigma_+ p_S(t) - \sigma_+ p_S(t) \sigma_-] - \frac{1}{2} (\bar{n}_{th} + 1) \Gamma [\sigma_+ \sigma_- p_S(t) - \sigma_- p_S(t) \sigma_+] + \text{H.c.}$

4. $\dot{p}_{aa} = \Gamma \bar{n}_{th} p_{bb} - \Gamma (\bar{n}_{th} + 1) p_{aa}, \dot{p}_{ab} = -\Gamma (\bar{n}_{th} + \frac{1}{2}) p_{ab}$.

可见光 $\bar{n}_{th} = 10^{-40}$, 所以 $\dot{p}_{aa} = -\Gamma p_{aa}, \dot{p}_{ab} = -\frac{\Gamma}{2} p_{ab}$.

三. 场的耗散

1. 系统是 $a(\omega)$, 环境是 b_R . $\star SU(2)$ 和 $SU(1,1)$ 真的很像

2. 令 $l = \frac{\omega}{\Omega}, p_S = -\frac{1}{2} \bar{n}_{th} (a a^\dagger p_S - 2a^\dagger p_a + p_a^\dagger a) - \frac{1}{2} (\bar{n}_{th} + 1) (a^\dagger a p_S - 2a p_a^\dagger + p_a^\dagger a),$

可见光 $\bar{n}_{th} = 10^{-40}$, 所以 $\dot{p}_S = -\frac{1}{2} (a^\dagger a p_S - 2a p_a^\dagger + p_a^\dagger a)$.

四. 薛定谔图像下的耗散与 Lindblad 算符

1. $H_I = \hbar \sum_\alpha S_\alpha^{(S)} B_\alpha^{(R)}, V(t) = \hbar \sum_\alpha S_\alpha(t) B_\alpha(t), \langle n | B_\alpha | n \rangle = 0.$

2. $S_\alpha^{(S)} = \sum_{a,b} |a\rangle \langle a| S_\alpha^{(S)} |b\rangle \langle b|, S_\alpha(t) = \sum_{a,b} e^{-i(\omega_b - \omega_a)t} \langle a | S_\alpha^{(S)} | b \rangle |a\rangle \langle b|.$

$$S_{ab}(t) = \sum_{\omega} \sum_{\omega'} S(\omega, \omega') \langle a | S_a^{(s)} | b \rangle | a \rangle \langle b | e^{-i\omega a t} = \sum_{\omega} S(\omega) e^{-i\omega t}$$

$$V(t) = \hbar \sum_{\omega} S(\omega) e^{-i\omega t} B_a(t) = \hbar \sum_{\omega} S^{\dagger}(\omega) e^{i\omega t} B_a(t) = V^{\dagger}(t)$$

3. $T_{TR} [V(t), \rho_{SR}(t_i)] = 0, \int_{t_i}^t dt' T_{TR} [V(t), [V(t'), \rho_S(t) \otimes \rho_R(t_i)]]$
 $= -\int_0^{t_0} dt' T_{TR} [V(t), [V(t-t'), \rho_S(t) \otimes \rho_R(t_i)]]$, 因为有马尔可夫近似,
 $= -\int_0^{t_0} dt' T_{TR} [V^{\dagger}(t), V(t-t') \rho_S(t) \otimes \rho_R(t_i)] + H.c.$

4. 代入 $S(\omega)$ 等等得到时间演化 $\rho_S^{\dagger} = \sum_{\omega, \omega'} e^{i(\omega-\omega')t} \Gamma_{\omega\omega'}(\omega) [S_{\beta}(\omega) \rho_S(t), S_a^{\dagger}(\omega)] + H.c.$

$$\Gamma_{\omega\omega'}(\omega) = \int_0^{t_0} dt' e^{i\omega t'} \langle B_a^{\dagger}(t) B_{\beta}(t-t') \rangle$$
, 进行旋波近似.

$$\rho_S = \sum_{\omega, \omega'} -i \Delta_{\omega\omega'} [S_a^{\dagger}(\omega) S_{\beta}(\omega), \rho_S] + \gamma_{\omega\omega'} (S_{\beta} \rho_S S_a^{\dagger} - \frac{1}{2} \{S_a^{\dagger} S_{\beta}, \rho_S\})$$

$$= \frac{1}{\hbar} [H_{LS}, \rho_S] + \sum_{\omega, \omega'} \gamma_{\omega\omega'} (L_{\beta}(\omega) \rho_S L_{\beta}^{\dagger}(\omega) - \frac{1}{2} \{L_{\beta}^{\dagger}(\omega) L_{\beta}(\omega), \rho_S\})$$

$$H_{LS} = \hbar \sum_{\omega, \omega'} \Delta_{\omega\omega'} S_a^{\dagger}(\omega) S_{\beta}(\omega), L_{\beta}(\omega) \text{ 称为 Lindblad 算符, 有 Lamb 位移,}$$

$$\rho_S^{(s)} = \frac{1}{\hbar} [H_S + H_{LS}^{(s)}, \rho_S^{(s)}] + \sum_{\omega, \omega'} \gamma_{\omega\omega'} (L_{\beta}(\omega) \rho_S^{(s)} L_{\beta}^{\dagger}(\omega) - \frac{1}{2} \{L_{\beta}^{\dagger}(\omega) L_{\beta}(\omega), \rho_S^{(s)}\})$$

5. 谐振子在光场中的情况。 $S_a(\omega)$ 的形式非常简单。

第八章 耗散的量子理论 (II) - 朗之万方程

一. 经典朗之万方程

二. 谐振子热库作用下的耗散

$$1. H = \hbar \omega a^{\dagger} a + \sum_{\omega} \hbar \omega_{\omega} b_{\omega}^{\dagger} b_{\omega} + \hbar \sum_{\omega} g_{\omega} (a b_{\omega}^{\dagger} + a^{\dagger} b_{\omega})$$

$$\dot{a}(t) = -i\omega a(t) - i \sum_{\omega} g_{\omega} b_{\omega}(t), \quad \dot{b}_{\omega}(t) = -i\omega_{\omega} b_{\omega}(t) - i g_{\omega} a(t)$$

$$b_{\omega}(t) = b_{\omega}(0) e^{-i\omega_{\omega} t} - i g_{\omega} \int_0^t dt' a(t') e^{-i\omega_{\omega}(t-t')}$$

$$2. \dot{a}(t) = -i\omega a(t) - \sum_{\omega} g_{\omega}^2 \int_0^t dt' a(t') e^{-i\omega_{\omega}(t-t')} - i \sum_{\omega} b_{\omega}(0) e^{-i\omega_{\omega} t}$$

$$\dot{\tilde{a}}(t) = -\sum_{\omega} g_{\omega}^2 \int_0^t dt' \tilde{a}(t') e^{-i(\omega_{\omega}-\omega)(t-t')} - i \sum_{\omega} g_{\omega} b_{\omega}(0) e^{-i(\omega_{\omega}-\omega)t}$$

$$l = \frac{2g_{\omega}^2 V \omega^3}{\pi c^3}, \quad \dot{\xi}(t) = -i \sum_{\omega} g_{\omega} b_{\omega}(0) e^{-i(\omega_{\omega}-\omega)t}, \quad \dot{\tilde{a}}(t) = -\frac{1}{2} l \tilde{a}(t) + \dot{\xi}(t)$$

$$3. \langle \xi(t) \rangle = 0, \langle \xi^{\dagger}(t) \rangle = 0, \langle \xi^{\dagger}(t) \xi(t') \rangle = l \bar{n}_{\omega} \delta(t-t'), \langle \xi(t) \xi^{\dagger}(t') \rangle = l (\bar{n}_{\omega} + 1) \delta(t-t')$$

$$\langle \xi^{\dagger}(t) a(t) \rangle = \frac{1}{2} l \bar{n}_{\omega}, \langle \xi(t) a^{\dagger}(t) \rangle = \frac{1}{2} l \bar{n}_{\omega}, \langle \tilde{a}(t) \rangle = e^{-\frac{1}{2} l t} \langle \tilde{a}(0) \rangle$$

$$\langle \tilde{a}^{\dagger}(t) \rangle = e^{-\frac{1}{2} l t} \langle \tilde{a}^{\dagger}(0) \rangle, \frac{d}{dt} \langle \tilde{a}^{\dagger}(t) \tilde{a}(t) \rangle = -l \langle \tilde{a}^{\dagger}(t) \tilde{a}(t) \rangle + l \bar{n}_{\omega}$$

$$\langle [\tilde{a}(t), \tilde{a}^{\dagger}(t)] \rangle = 1, S(\omega) \text{ 为 Lorentz 线型, } \frac{1}{\omega - \omega' + i\gamma/4}, D_c(\omega) = \frac{\omega_c/2\alpha}{\omega(\omega - \omega')^2 + (\omega_c/2\alpha)^2}$$

三. 原子热库作用下的耗散

1. 考虑一个个原子往下漏。 $H = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega \sum_i \sigma_i^z + \hbar g \sum_i f(t_i, t, \tau) (\sigma_i^- a^\dagger + \sigma_i^+ a)$,

$f(t_i, t, \tau)$ 为一个 \square 函数。 $V(t) = \hbar g \sum_i f(t_i, t, \tau) (\sigma_i^- a^\dagger + \sigma_i^+ a)$ 。

$\dot{a}(t) = -ig \sum_i f(t_i, t, \tau) \sigma_i^-(t)$, $\dot{\sigma}_i^-(t) = ig f(t_i, t, \tau) \sigma_i^-(t) a(t)$,

$\dot{a}(t) = g^2 \sum_i \int_{t_i}^t dt' f(t_i, t, \tau) f(t_i, t', \tau) \sigma_i^-(t') a(t') - ig \sum_i f(t_i, t, \tau) \sigma_i^-(t)$ 。

2. 进行同时只能有一个原子的近似, $L = -2g^2 \sum_i \int_{t_i}^t dt' f(t_i, t, \tau) f(t_i, t', \tau) \sigma_i^-(t')$,

$\dot{\xi}(t) = -ig \sum_i f(t_i, t, \tau) \sigma_i^-(t)$, $\dot{a}(t) = -\frac{1}{2}La(t) + \xi(t)$ 。

3. $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi^\dagger(t) \rangle = 0$, $\langle \xi^\dagger(t) \xi(t') \rangle = g^2 \sum_{i,j} f(t_i, t, \tau) f(t_j, t', \tau) \langle \sigma_i^-(t_i) \sigma_j^-(t_j) \rangle$

$= g^2 \frac{1}{1+e^{\hbar\omega/\hbar k_B T}} \sum_i f(t_i, t, \tau) f(t_i, t', \tau) = g^2 \frac{1}{1+e^{\hbar\omega/\hbar k_B T}} \gamma(\tau - |t-t'|)$,

当 $|t-t'| \leq \tau$ 时, 它并非马尔可夫的白噪声。

四. 耗散腔中的原子

1. 考虑一个既有光场又有原子的谐振腔。 $\Gamma(\omega) = D(\omega) \cdot 2\pi \cdot \langle g^2(\omega) \rangle$ 。

$\Gamma_c(\omega) = D_c(\omega) \cdot 2\pi \cdot \langle g^2(\omega) \rangle$, $D_c(\omega) = \frac{\omega_c/2Q}{\pi[(\omega-\omega_c)^2 + (\omega_c/2Q)^2]}$

2. $\Gamma_c(\omega_c)/\Gamma(\omega_c) = Q \frac{\lambda^3}{4\pi^2 V}$ 。共振时会增强自发辐射, $\Gamma_c(\omega)/\Gamma_c(\omega_c) = \frac{(\omega_c/2Q)^2}{(\omega-\omega_c)^2}$ 。

非共振时会抑制自发辐射, 称为 Purcell 效应。

3. $H = H_F + H_A + H_{AF} + H_R + H_{FR}$, $\frac{d}{dt} \langle a^\dagger a \rangle = ig \langle \sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger \rangle - l \langle a^\dagger a \rangle + l \bar{n}_th$,

$\frac{d}{dt} \langle \sigma_- \rangle = -2ig \langle \sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger \rangle$, 等等。因为为了求解, 只考虑初始为

$|a\rangle, |0\rangle$ 时, $l \ll 4g$ 时 $\langle \sigma_{aa} \rangle = \frac{1}{2} e^{-lt} (1 + \cos(2gt))$,

$l \gg 4g$ 时, $\langle \sigma_{aa} \rangle = e^{-\frac{l}{2}t}$ 。

第九章 光与物质相互作用

一. 共振荧光

1. $H = \frac{1}{2}\hbar\omega_{ab}\sigma_z - \frac{1}{2}\hbar(\Omega_R\sigma_+ e^{-i\omega t} + \Omega_R^*\sigma_- e^{i\omega t}) + \sum_R \hbar\omega_R b_R^\dagger b_R$

$+ \hbar\sigma_+ \sum_R g_R b_R + \hbar\sigma_- \sum_R g_R b_R^\dagger$, $S_1(\omega_{ab}) = \sigma_+$, $S_2(\omega_{ab}) = \sigma_-$

$B_1(t) = \sum_R g_R b_R(t)$, $B_2(t) = \sum_R g_R b_R^\dagger(t)$, $\gamma_{11}(\omega_{ab}) = \Gamma \bar{n}_th$,

$\gamma_{22}(-\omega_{ab}) = \Gamma(1 + \bar{n}_th)$ 。

2. 进行一定的近似导出和之前类似的情况。

1) $\Omega_R \ll \Gamma$. 由于考虑电偶极矩,
$$\rho_{ab}(t) = i \frac{\Omega_R}{2} \frac{e^{-i\omega t} - e^{-(i\omega_{ab} + \Gamma)t}}{i(\omega_{ab} - \omega) + \Gamma/2} [\rho_{aa}(0) - \rho_{bb}(0)].$$

频率与驱动频率相近。

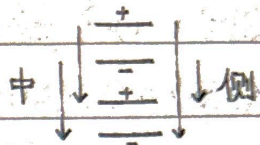
2) $\Omega_R \gg \Gamma$. 考虑相干态, $\omega = \omega_{ab}$, $\Omega_R \approx \Omega_R$, 考虑缀饰态。

发现了三组峰, 称为 Mollow Triplet, 宽度为 $\frac{3}{4}\Gamma$, $\frac{1}{2}\Gamma$, $\frac{3}{4}\Gamma$,

高度为 $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}$. 考虑 + 和 - 两个态,
$$\dot{\tilde{\rho}}_{++} = -\frac{\Gamma}{2} \tilde{\rho}_{++} + \frac{\Gamma}{4} \tilde{\rho}_{+-}$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{+-} = -(\frac{3}{4}\Gamma + i\Omega_R) \tilde{\rho}_{+-} - \frac{\Gamma}{4} \tilde{\rho}_{-+} - \frac{\Gamma}{2},$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{-+} = -(\frac{3}{4}\Gamma - i\Omega_R) \tilde{\rho}_{-+} - \frac{\Gamma}{4} \tilde{\rho}_{+-} - \frac{\Gamma}{2}.$$



二. 光的色散

1. $n = \sqrt{1 + \chi}$, $n_R + i n_I = \sqrt{1 + \chi_R + i \chi_I}$,
$$\chi_R = -\frac{d_{ab}^2 N_a}{\epsilon_0 \hbar} \frac{\omega_{ab} - \omega}{(\omega_{ab} - \omega)^2 + \Gamma^2/4} [\rho_{aa}(0) - \rho_{bb}(0)].$$

$$\chi_I = -\frac{d_{ab}^2 N_a}{\epsilon_0 \hbar} \frac{\Gamma/2}{(\omega_{ab} - \omega)^2 + \Gamma^2/4} [\rho_{aa}(0) - \rho_{bb}(0)]$$

2. 色散是实部, 吸收是虚部。

三. 电磁诱导透明效应

1.
$$H = \hbar \omega_1 |1\rangle\langle 1| + \hbar \omega_2 |2\rangle\langle 2| + \hbar \omega_3 |3\rangle\langle 3| - \frac{\hbar}{2} (\Omega_p \sigma_{31} e^{-i\omega_p t} + \Omega_p^* \sigma_{13} e^{i\omega_p t})$$

$$- \frac{\hbar}{2} (\Omega_c \sigma_{22} e^{-i\omega_c t} + \Omega_c^* \sigma_{22} e^{i\omega_c t}). H_I(t) = \hbar \Delta_p |3\rangle\langle 3| + \hbar (\Delta_p - \Delta_c) |2\rangle\langle 2|$$

$$- \frac{\hbar}{2} (\Omega_p \sigma_{31} + \Omega_c \sigma_{13}) - \frac{\hbar}{2} (\Omega_c \sigma_{32} + \Omega_c^* \sigma_{23}).$$
 为了避免主方程,

引入 $-\frac{\hbar}{2} \Gamma_3 |3\rangle\langle 3| - \frac{\hbar}{2} \Gamma_2 |2\rangle\langle 2|$.

2. 考虑 $\Omega_p \ll \Gamma$, Ω_c 未知的情况, 考虑 $c_1 \approx 0$, $c_1 = 1$ 的情况。

1) $\Omega_c = 0$ 时,
$$\chi = N_a \frac{d_{13}^2}{\epsilon_0 \hbar} \frac{4\Delta_p + i2\Gamma_3}{4\Delta_p^2 + \Gamma_3^2}.$$

χ_R 是关于 Δ_p 的奇函数, $\Delta_p = 0$ 时 $\chi_R = 0$, χ_I 是关于 Δ_p 的偶函数,

$\Delta_p = 0$ 时 χ_I 最大。这和之前的一致。

2) $\Delta_p = \Delta_c$ 时,
$$\chi_R = N_a \frac{d_{13}^2}{\epsilon_0 \hbar} \frac{4\Delta_c \Gamma_3}{(\Gamma_3 + i2\Delta_c)\Gamma_3 + |\Omega_c|^2}, \chi_I = N_a \frac{d_{13}^2}{\epsilon_0 \hbar} \frac{2(|\Omega_c|^2 + \Gamma_3 \Gamma_3)\Gamma_3}{(|\Omega_c|^2 + i2\Delta_c)\Gamma_3 + |\Omega_c|^2}.$$

$\Omega_c \rightarrow \infty$ 时 $\chi_R, \chi_I \rightarrow 0$.

3) $\Gamma_3 \rightarrow 0$ 时, $\Delta_c = 0$ 时, 令 $\beta = \frac{2\Delta_c}{\Gamma_3}$, $\alpha = \frac{|\Omega_c|}{\Gamma_3}$,
$$\chi_I \sim \frac{2\beta^2 \Gamma_3}{(\alpha^2 - \beta^2 + i|\alpha|^2)},$$

原理是形成了 Dressed State, 这也称为 Autler-Town 劈裂,

会出现两个吸收峰。

第十章 非线性光学过程和制备压缩态

一. 参量下转换过程

$$1. \omega_p = \omega_s + \omega_i, H = \hbar\omega_p b^\dagger b + \hbar\omega_s a^\dagger a_s + \hbar\omega_i a_i^\dagger a_i + \hbar k(a_s^\dagger a_i^\dagger b + a_s a_i b^\dagger).$$

$$H_2(t) = \hbar k(a_s^\dagger a_i^\dagger b + a_s a_i b^\dagger). \quad \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow a_s \\ \text{---} \rightarrow a_i \end{array}$$

$$2. \xi = \tau e^{-i\theta}, S^\dagger(\xi) a S(\xi) = a \cosh r - a^\dagger e^{i\theta} \sinh r, S^\dagger(\xi) a^\dagger S(\xi) = a^\dagger \cosh r - a e^{-i\theta} \sinh r.$$

二. 制备压缩态

$$1. \langle b \rangle = \beta_p e^{-i\phi}, \langle b^\dagger \rangle = \beta_p e^{i\phi}, H_2(t) = \hbar g \beta_p (a^{\dagger 2} e^{-i\phi} + a^2 e^{i\phi}).$$

$$2. \dot{a}(t) = -i 2k \beta_p e^{-i\phi} a^\dagger(t) \text{ 而 } \dot{a}^\dagger(t) = i 2k \beta_p e^{i\phi} a(t), \text{ 则进行了}$$

相似对角化, 则得到 $\Gamma = 2k \beta_p t$. 但是 Γ 可能实在是太小了.

$$\Omega_p = 2k \beta_p, \Gamma = \Omega_p t.$$

三. 利用谐振腔提高压缩度

$$1. \text{考虑非线性过程与耗散, } \dot{a}(t) = -\Omega_p a^\dagger - \frac{1}{2} a + \xi(t).$$

$$\dot{a}^\dagger(t) = -\Omega_p a - \frac{1}{2} a^\dagger + \xi^\dagger(t), \langle a(t) \rangle = \{ \langle a_0 \rangle \cosh(\Omega_p t) - \langle a_0^\dagger \rangle \sinh(\Omega_p t) \} e^{-\frac{1}{2}t},$$

$$\langle a^\dagger(t) \rangle = \{ \langle a_0^\dagger \rangle \cosh(\Omega_p t) - \langle a_0 \rangle \sinh(\Omega_p t) \} e^{-\frac{1}{2}t}.$$

2. 考虑 $\Omega_p < \frac{1}{2}$ 与稳态的情形.

$$3. \vec{A}(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ a^\dagger(t) \end{pmatrix}, \vec{F}(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \xi^\dagger(t) \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \Omega_p \\ \Omega_p & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ 得到了}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -M\vec{A} + \vec{F}, \vec{A}(t) = e^{-Mt} \vec{A}(0) + \int_0^t dt' \vec{F}(t'), \text{ 得到了场和噪声的关联.}$$

$$\vec{A}(t) = \begin{pmatrix} \langle a \rangle \\ \langle a^\dagger \rangle \end{pmatrix}, \vec{F}(t) = \begin{pmatrix} \langle a^\dagger + F \rangle \\ \langle a + F^\dagger \rangle \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \Omega_p \\ \Omega_p & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ 得到了}$$

$$\frac{d\vec{A}'}{dt} = M'\vec{A}' + \vec{F}', \frac{d\vec{A}'}{dt} = 0 \text{ 时 } \vec{A}' = \frac{1}{4[(\frac{1}{2})^2 - \Omega_p^2]} \begin{pmatrix} -\Omega_p \\ -\Omega_p \end{pmatrix}, \text{ 得到了场的二阶关联.}$$

$$4. \langle (\Delta X_1)^2 \rangle = \frac{1}{8} \frac{1}{\frac{1}{2} + \Omega_p}, \langle (\Delta X_2)^2 \rangle = \frac{1}{8} \frac{1}{\frac{1}{2} - \Omega_p}.$$

四. 腔的输出场

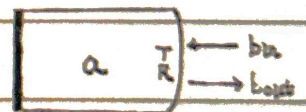
$$1. E_{\text{out}}(t) = \sqrt{T} E_{\text{in}} + \sqrt{R} E_{\text{cov}}(t - 2L/c),$$

$$\frac{dE_{\text{cov}}(t)}{dt} = -\frac{1-\sqrt{R}}{\sqrt{R}} \frac{c}{2L} E_{\text{cov}}(t) + \sqrt{T} \frac{c}{2L} E_{\text{in}}(t), L = \frac{cT}{2L}.$$

$$2. E_{\text{in}}(t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{4\pi\epsilon_0 c A}} \int b_{\text{in}}(\omega) e^{-i(\omega_0 - \omega)t} d\omega,$$

$$[b(\omega), b(\omega')] = \delta(\omega - \omega'), \frac{da}{dt} = -\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int b_{\text{in}}(\omega) e^{-i(\omega_0 - \omega)t} d\omega = -\frac{1}{2} a + \xi(t),$$

$$b_{\text{out}}(\omega) = -\sqrt{R} b_{\text{in}}(\omega) + \sqrt{2\pi L} \tilde{a}(\omega), a(t) = \int \tilde{a}(\omega) e^{-i(\omega_0 - \omega)t} d\omega$$



3. 再考虑下转换器的存在, $b_{out}(\omega) + b_{out}^\dagger(2\omega_0 - \omega) = \left[\frac{L}{\frac{1}{2} - i(\omega - \omega_0) + \Omega_D} - 1 \right]$

$[b_{in}(\omega) + b_{in}^\dagger(2\omega_0 - \omega)], \frac{[\Delta \chi_{out}(\omega_0)]^2}{[\Delta \chi_{in}(\omega_0)]^2} = \left(\frac{\frac{1}{2} - \Omega_D}{\frac{1}{2} + \Omega_D} \right)^2$ 可以非常好。

物理是可以把噪声抵消掉。

第十一章 原子光学

一. 光的力学效应

1. 原子偏移。认清两种辐射产生的光子的方向的差异性。

利用自发辐射的力 $F = I_{paa} \hbar k$, $F = \hbar k I \frac{\Omega_D^2}{4\Delta^2 + I^2 + 2\Omega_D^2}$ 。

2. 激光冷却。 $F = \hbar k I \frac{\Omega_D^2}{(\Delta + \hbar v)^2 + I^2 + 2\Omega_D^2} \approx -\frac{\hbar^2 T \Omega_D^2}{4\Delta^2 T^2} \left(1 - \frac{8\Delta \hbar v}{4\Delta^2 T^2} \right)$

$= \vec{F}_0 - \beta m \vec{v}$, $\beta > 0$ 要求 $\omega < \omega_{ab}$ 。为了平衡取六束光,

$\vec{F} = \vec{F}_0 - \beta m \vec{v} - \vec{F}_0 - \beta m \vec{v} = -2\beta m \vec{v}$ 。

3. 激光冷却的涨落效应。随机来源于 ① 吸收的光子数

② 辐射的方位角。 $dp_{abs} = n \hbar k$, $dp_{spont} = \sum_{i=1}^6 \hbar k \cos \theta_i$,

$\langle dp^2 \rangle = 4 \hbar^2 k^2 I_{paa} dt$, 代入 Langevin 方程, $\langle v^2 \rangle = \frac{\hbar^2 k^2 I_{paa}}{4\beta m^2}$

$\approx \frac{\hbar}{8m} \cdot \frac{4\Delta^2 + I^2}{\Delta}$ 在 $\Delta = \frac{\pi}{2}$ 时 $= \frac{\hbar I}{2m}$, $T_D = \frac{\hbar I}{2k_B}$, 以上一个方向的。

二. 梯度力

1. $F = -\nabla U$, $H_z(t) = -\frac{1}{2} \hbar \Omega_R (|a\rangle \langle b| + |b\rangle \langle a|)$, $U = \langle H_z(t) \rangle = \frac{2\hbar \Omega_R^2}{4\Delta^2 + I^2 + 2\Omega_R^2}$ 。

2. 遇到了中间亮两边暗的用 $\Delta < 0$, 遇到了类似于圆圈的用 $\Delta > 0$ 。

这样来变成束缚器。