12.4.2 Fourier 变换

假设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续、逐段光滑且绝对可积, 那么

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\big(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x\big)\,d\lambda. \tag{1}$$

成立, 其中

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt,\quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt, \tag{2}$$

将它们代入 (1) 得

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\big(\cos\lambda x\cos\lambda\xi+\sin\lambda x\sin\lambda\xi\big)\,d\xi\right)d\lambda\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,d\xi\right)d\lambda.\end{aligned} \tag{3}$$

此式称为 Fourier **积分公式**. 由于右边括号中关于 λ 是偶函数, 而 $\sin\lambda(x-\xi)$

是 λ 的奇函数, 利用 Euler 公式, 得

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda(\xi-x)}d\xi.$$

将内层积分中与 ξ 无关的量 $e^{i\lambda x}$ 放到外层积分中, 得到

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}d\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi\right). \tag{4}$$

此式称为 Fourier 积分公式的复数表示. 令

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi, \tag{5}$$

则有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda. \tag{6}$$

通常 $F(\lambda)$ 称为 $f(x)$ 的 Fourier **变换** (像函数). 记为

$$\mathscr{F}[f](\lambda) \text{ 或者 } \hat{f}(\lambda).$$

$f(x)$ 称为 $F(\lambda)$ 的逆变换 (本函数或原像函数). 由 $f(x)$ 的象函数 $F(\lambda)$ 回到 $f(x)$ 的公式 (6) 称为 Fourier 变换的反演公式.

当 $f(x)$ 是偶函数时, $f(x)\sin\lambda x$ 是奇函数, 由 (5), 有

$$F(\lambda) = 2\int_0^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi, \tag{7}$$

此式称为 $f(x)$ 的 余弦变换. 因为 $F(\lambda)$ 仍是偶函数, 所以由 (6), 得

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F(\lambda)\cos\lambda x d\lambda. \tag{8}$$

当 $f(x)$ 是奇函数时, $f(x)\sin\lambda x$ 是偶函数, 由 (5), 有

$$F(\lambda) = -2i\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi, \tag{9}$$

令

$$G(\lambda) = iF(\lambda) = 2\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi, \tag{10}$$

此式称为 $f(x)$ 的 正弦变换. 因为 $G(\lambda)$ 仍是奇函数, 所以由 (6), 得

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} G(\lambda)\sin\lambda x d\lambda. \tag{11}$$

例 1 求指数衰减函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ $(\beta > 0)$ 的 Fourier 变换.

解 $f(x)$ 的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi = \int_0^{+\infty} e^{(-i\lambda-\beta)\xi}d\xi \\ &= \frac{-1}{i\lambda+\beta}e^{-(i\lambda+\beta)\xi}\Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} = \frac{1}{\beta+i\lambda} = \frac{\beta-i\lambda}{\beta^2+\lambda^2}. \end{aligned}$$

根据反演公式, 得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-i\lambda}{\beta^2+\lambda^2}e^{i\lambda x}\,d\lambda = \begin{cases} e^{-\beta x}, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

例 2 求函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ 的正弦变换.

解 $f(x)$ 的正弦变换为

$$G(\lambda) = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi}} \sin\lambda\xi d\xi = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}.$$

根据反演公式 (11) 得

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \sin\lambda x d\lambda.$$

即,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda x}{\sqrt{\lambda}} d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

12.4.3 Fourier 变换的性质

记 f 的 Fourier 变换为

$$\mathscr{F}[f] = F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi. \tag{12}$$

以 $\mathscr{F}^{-1}[F] = f(x)$ 表示函数 $F(\lambda)$ 的 Fourier 逆变换.

1° (线性关系) 若 f, g 存在 Fourier 变换, 则对任意常数 α, β, 函数 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ 也存在 Fourier 变换, 且

$$\mathscr{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathscr{F}[f] + \beta\mathscr{F}[g].$$

证明 从 (12) 看这是显然的.

2° (频移特性和时移特性) **若 f 存在** Fourier **变换, 则对任意实数 λ_0, 函数 $f(x)e^{-i\lambda_0 x}$ 也存在** Fourier **变换, 且**

$$\mathscr{F}[f(x)e^{-i\lambda_0 x}] = \mathscr{F}[f](\lambda + \lambda_0).$$

Fourier **逆变换的类似性质称为时移特性, 即,**

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\lambda)e^{ix_0\lambda}] = f(x + x_0).$$

证明

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(x)e^{-i\lambda_0 x}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda_0\xi}e^{-i\lambda\xi}d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i(\lambda+\lambda_0)\xi}d\xi \\ &= \mathscr{F}[f](\lambda + \lambda_0).\end{aligned}$$

类似地, 可以证明时移特性.

3° (本函数微分法) 若当 $|x| \to +\infty$ 时, $f(x)$ 趋于零, 且 $f'(x)$ 的 Fourier 变换存在, 则

$$\mathscr{F}[f'(x)](\lambda) = i\lambda\,\mathscr{F}[f(x)](\lambda).$$

一般地, 若当 $|x| \to +\infty$ 时, $f(x)$ 及前 $k-1$ 阶导函数都趋于零, 并且 $f^{(k)}(x)$ 的 Fourier 变换存在, 则

$$\mathscr{F}[f^{(k)}(x)](\lambda) = (i\lambda)^k\,\mathscr{F}[f(x)](\lambda).$$

证明 分部积分可以得到

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f'(x)](\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi \\ &= f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)(-i\lambda)e^{-i\lambda\xi}d\xi \\ &= i\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi \\ &= i\lambda\,\mathscr{F}[f(x)](\lambda).\end{aligned}$$

4° (像函数微分法) 若函数 $f(x)$ 和 $xf(x)$ 的 Fourier 变换都存在, 则 $f(x)$ 的 Fourier 变换是可微的, 且

$$(\mathscr{F}[f(x)](\lambda))' = \mathscr{F}[-ixf(x)](\lambda).$$

证明 因为

$$\mathscr{F}[f(x)](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi,$$

利用求导与积分的交换性质, 得

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}[f(x)](\lambda))' &= \int_{-\infty}^{+\infty}(-i\xi)f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi \\ &= \mathscr{F}[-ixf(x)](\lambda).\end{aligned}$$

卷积　设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积且平方可积. 称含参变量积分

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt$$

为 f 与 g 的卷积. 易知, 卷积有如下性质:

1)　设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积且平方可积, 则 $f*g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积.

2)　卷积满足通常乘积的三个性质:

$$f*g = g*f \qquad \text{(交换律)}$$

$$(f*g)*h = f*(g*h) \qquad \text{(结合律)}$$

$$(f+g)*h = f*h + g*h \qquad \text{(分配律)}$$

注, 在证明结合率时要交换两个无穷积分号的顺序.

5° (卷积的 Fourier 变换) 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上可积且平方可积, 则有

$$\mathscr{F}[f*g]=\mathscr{F}[f]\cdot\mathscr{F}[g].$$

证明 由定义可知

$$\mathscr{F}[f*g]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)dt\right]e^{-i\lambda x}dx,$$

注意到 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的绝对可积性, 可知积分次序是可交换的, 于是得到

$$\mathscr{F}[f*g]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)e^{-i\lambda x}dx\right]dt.$$

作变量代换 $x=t+\xi$, 就有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f*g]&=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-i\lambda(t+\xi)}d\xi\right]dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{-i\lambda t}dt\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi=\mathscr{F}[f]\cdot\mathscr{F}[g].\end{aligned}$$

6° (Parseval 等式)　设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上可积且平方可积, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathscr{F}[f](\lambda)\right|^2 d\lambda.$$

证明　令

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x+t)dt,$$

它的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[g](\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-i\lambda x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x+t)dt\right)e^{-i\lambda x}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)e^{-i\lambda x}dx\right)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\lambda u}du\right)e^{i\lambda t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda t}dt\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\lambda u}du \\
&= \overline{\mathscr{F}[f](\lambda)}\,\mathscr{F}[f](\lambda) = \left|\mathscr{F}[f](\lambda)\right|^2.
\end{aligned}$$

由逆变换公式知

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathscr{F}[f](\lambda)\right|^2 e^{i\lambda x} d\lambda,$$

取 $x = 0$, 就得到

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot f(0+t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathscr{F}[f](\lambda)\right|^2 e^{i\lambda\cdot 0} d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathscr{F}[f](\lambda)\right|^2 d\lambda. \end{aligned}$$

例 3 设 g, h 是在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上可积且平方可积的已知函数. 求解关于未知函数 f 的积分方程

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t) f(t)\, dt.$$

解 方程可以写为 $f = g + h * f$. 根据 Fourier 变换的性质, 有

$$\mathscr{F}[f] = \mathscr{F}[g] + \mathscr{F}[h] \cdot \mathscr{F}[f].$$

于是

$$\mathscr{F}[f] = \frac{\mathscr{F}[g]}{1 - \mathscr{F}[h]}.$$

根据反演公式, 得

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathscr{F}[g](\lambda)}{1 - \mathscr{F}[h](\lambda)} e^{i\lambda x}\, d\lambda.$$

例 4 计算高斯函数 $f(x) = e^{-ax^2}$ $(a > 0)$ 的 Fourier 变换.

解 因 $f'(x) = -2axf(x)$, 故 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 都在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积, 且当 $|x| \to 0$ 时, $f(x), f'(x)$ 都趋于 0. 因此, 由 Fourier 变换的性质, 得

$$\begin{aligned} i\lambda \mathscr{F}[f(x)](\lambda) &= \mathscr{F}[f'(x)](\lambda) = \mathscr{F}[-2axf(x)](\lambda) \\ &= -2ai\,\mathscr{F}[-ixf(x)](\lambda) = -2ai(\mathscr{F}[f(x)](\lambda))', \end{aligned}$$

即,

$$(\mathscr{F}[f(x)](\lambda))' = -\frac{\lambda}{2a}\mathscr{F}[f(x)](\lambda).$$

解此微分方程, 得

$$\mathscr{F}[f(x)](\lambda) = Ce^{-\frac{\lambda^2}{4a}}.$$

这里 $C = \mathscr{F}[f(x)](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\xi^2}\,d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. 于是

$$\mathscr{F}[f(x)](\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}.$$