

中国科学技术大学
2022—2023学年第二学期考试试卷

考试科目 概率论与数理统计 得分

所在院系 姓名 学号

考试时间: 2023 年 6 月 27 日下午 14:30–16:30; 可使用简单计算器

一、(30分, 每小题3分) 填空题或单选题, 答案可以直接写在试卷上.

- (1) 设 A 和 B 是一随机试验的两个互斥结果, 且 $P(A) = p, P(B) = q, 0 < p + q \leq 1$. 现独立重复这一试验时, 则结果 A 比 B 先出现的概率为 .
- (2) 设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x) = f(2-x)$ 及 $\int_0^2 f(x)dx = 0.3$, 则 $P(X \leq 0) = (\quad)$
(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4
- (3) 设 X 和 Y 分别为离散型和连续型随机变量且相互独立. 则 $X+Y$ 的类型为 (\quad) .
(A) 连续型 (B) 离散型 (C) 非离散型也非连续型 (D) 以上皆有可能
- (4) 掷一枚均匀的骰子, 欲使 1 至 6 点均出现至少一次, 则平均需要掷 次.
- (5) 在单位圆盘上独立地随机取两点 A 和 B , 则以 A 为圆心, 线段 AB 为半径的圆完全落在该单位圆盘内的概率是 (\quad)
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{6}$
- (6) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自指数总体 $\text{Exp}(2)$ 的一组简单随机样本, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 统计量 $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i^2/n$ 依概率收敛到 (\quad)
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) 2 (D) 4
- (7) 设 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 是来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的一组简单随机样本, 若统计量 $T = a(X_1 + X_2)/\sqrt{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}$ 服从 t 分布, 则常数 $a = (\quad)$
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{6}$
- (8) 已知一批零件的长度 X (单位: cm)服从正态分布, 从中随机抽取 25 个零件, 得到样本的平均长度为 36 cm, 样本方差为 4 cm^2 , 则总体均值 EX 的置信水平为 0.95 的置信区间为 (精确到小数点后三位).
- (9) 从电信公司用户每月话费账单中随机抽取 25 张, 算得平均消费为 32.8 元, 标准差为 20.8 元. 设用户每月话费服从均值为 μ 的正态分布, 对假设检验 $H_0: \mu \leq 30 \leftrightarrow H_1: \mu > 30$, 则在显著性水平 $\alpha = 0.5$ 下我们 拒绝原假设 (填“可以”或“不能”).
- (10) 设一总体分布函数为 $F(x; \theta)$, 其中 θ 为一未知参数, 而 θ_0 为一已知常数. 若一假设检验 $H_0: \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta \neq \theta_0$ 在显著性水平 α 下的拒绝域为 $|\bar{X} - \theta_0| > 1$, 这里 \bar{X} 为样本均值, 则 θ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间为 .

二、(20分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为一列独立的随机变量, 且同分布于参数为 λ 的指数分布 $\text{Exp}(\lambda)$. 记 $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

(1) 求 Y 的分布.

(2) 求概率 $P(X_1 = Y)$.

(3) 求随机向量 (X_1, Y) 的联合分布函数 $F(x, y)$.

(4) 对任一实数 $y > 0$, 求条件期望 $E[X_1|Y = y]$.

三、(14分) 设随机变量 X, Y, Z 为相互独立的标准正态随机变量, 且记

$$U = \frac{X - Y}{\sqrt{2}}, \quad V = \frac{X + Y - 2Z}{\sqrt{6}}, \quad W = \frac{X + Y + Z}{\sqrt{3}}.$$

(1) 试求随机向量 (U, V, W) 的联合概率密度函数 $f(u, v, w)$.

(2) 随机变量 U, V, W 是否相互独立? 需说明理由.

四、(21分) 设某种电子器件的寿命 (单位: 小时) T 服从双参数指数分布, 即其概率密度函数为

$$f(t) = \frac{1}{\theta} \exp \left\{ -\frac{t-c}{\theta} \right\} I_{(c, \infty)}(t),$$

其中参数 $\theta, c > 0$. 现自一批这种器件中随机地取 n 件进行寿命试验, 记录它们的失效时间依次为 $t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

(1) 求 θ 和 c 的矩估计值.

(2) 求 θ 和 c 的极大似然估计值.

(3) 若已知参数 $\theta = \frac{1}{2}$, 则 c 的极大似然估计是否无偏? 若是, 证明之; 若否, 修正之.

五、(15分) 某篮球爱好者每天进行 5 组投篮练习, 每组练习均包含 4 次投篮, 完成后他记录下每组投中的次数. 经过 80 天后, 得到如下数据:

投中数	0	1	2	3	4
频数	25	118	139	93	25

结合你所学的统计知识, 我们能否认为该篮球爱好者每组投中的次数服从二项分布 (显著性水平 $\alpha = 0.05$)?

附录 上分位数: $t_{24}(0.025) = 2.064$, $t_{24}(0.05) = 1.711$

$\chi_3^2(0.05) = 7.815$, $\chi_3^2(0.95) = 0.352$, $\chi_4^2(0.05) = 9.488$, $\chi_4^2(0.95) = 0.711$

(完)

参考答案

一、 每小题 3 分.

$\frac{p}{p+q}$; B; A; 14.7; D; A; C; (35.174, 36.826); 不能; $[\bar{X} - 1, \bar{X} + 1]$.

二、 每小题 5 分.

(1) 对任一 $y > 0$, 由 $P(Y > y) = [P(X_1 > y)]^n = e^{-n\lambda y}$, 可知 $Y \sim \text{Exp}(n\lambda)$, 即 Y 服从参数为 $n\lambda$ 的指数分布.

(2) 由对称性可知 $P(X_1 = Y) = \cdots = P(X_n = Y)$, 且各项之和为 1. 从而所求概率为

$$P(X_1 = Y) = \frac{1}{n}.$$

(3) 当 $0 < y < x$ 时, 由独立性可知

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq x, Y > y) &= P(y < X_1 \leq x, X_2 > y, \cdots, X_n > y) \\ &= (e^{-\lambda y} - e^{-\lambda x})e^{-(n-1)\lambda y} \\ &= e^{-n\lambda y} - e^{-\lambda[x+(n-1)\lambda y]}. \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq x, Y \leq y) &= P(X_1 \leq x) - P(X_1 \leq x, Y > y) \\ &= 1 - e^{-\lambda x} - e^{-n\lambda y} + e^{-\lambda[x+(n-1)\lambda y]}. \end{aligned}$$

而当 $0 < x \leq y$ 时, $P(X_1 \leq x, Y \leq y) = P(X_1 \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$. 综上可知, 随机向量 (X_1, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} - e^{-n\lambda y} + e^{-\lambda[x+(n-1)\lambda y]}, & 0 < y < x; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 < x \leq y; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(4) 由 (2) 及指数分布的无记忆性可知

$$E[X_1|Y = y] = y \cdot \frac{1}{n} + \left(y + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{n-1}{n} = y + \frac{n-1}{n\lambda}.$$

三、 每小题 7 分.

(1) 由计算可知 Jacob 行列式绝对值为 1, 且 $u^2 + v^2 + w^2 = x^2 + y^2 + z^2$, 故由密度变换公式可知随机向量 (U, V, W) 的概率密度函数为

$$f(u, v, w) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\right\}.$$

(2) 由上式中的概率密度函数 $f(u, v, w)$ 可分离变量即知随机变量 U, V, W 相互独立.

四、 每小题 7 分.

(1) 首先, 可计算得

$$ET = \theta + c, \quad \text{Var}(T) = \theta^2.$$

然后通过联立方程

$$ET = \bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i, \quad \text{Var}(T) = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2,$$

可得 α 和 c 的矩估计值分别为 $\hat{\theta}_1 = s$, $\hat{c}_1 = \bar{t} - s$.

注: 在本小题中, 可将样本方差 s^2 替换成样本中心二阶矩 $m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2$.

(2) 可得似然函数为

$$L(\theta, c) = \frac{1}{\theta^n} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n (t_i - c) \right\}, \quad c \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n.$$

由于该函数关于 c 单调递增, 可知参数 c 的极大似然估计值为 $\hat{c}_2 = t_1$. 然后, 可求得对数似然函数为

$$l(\alpha, c) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n (t_i - c).$$

故通过令 $\frac{\partial l(\theta, c)}{\partial \theta} = 0$, 可得 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}_2 = \bar{t} - t_1$.

(3) 否. 若 $\theta = 1/2$, 则可求得估计量 $\hat{c}_2 = T_1$ 的概率密度函数为

$$g(t) = 2ne^{-2n(t-c)} I_{(c, \infty)}(t).$$

由此可求得 $E[\hat{c}_2] = c + \frac{1}{2n}$, 从而 \hat{c}_2 不是 c 的无偏估计, 但可修正为 $\hat{c}_2^* = t_1 - \frac{1}{2n}$.

五、 拟合优度检验. 原假设为每组投中的次数服从二项分布 $B(4, p)$, 其中 $0 < p < 1$ 为某个常数. 我们先估计参数 p , 利用极大似然估计或者矩估计, 均有

$$\hat{p} = \frac{1}{80 \times 5 \times 4} (25 + 118 \times 1 + 139 \times 2 + 93 \times 3 + 25 \times 4) = \frac{775}{1600} = 0.4844.$$

由此可计算得出投中次数 0, 1, 2, 3, 4 的理论频数分别为 28.3, 106.2, 149.7, 93.8, 22.0. 从而, 由检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(25 - 28.3)^2}{28.3} + \cdots + \frac{(25 - 22.0)^2}{22.0} = 2.877 < \chi_3^2(0.05) = 7.815,$$

故我们应接受每组投中次数服从二项分布的说法.

步骤分: 估计 p , 5 分; 计算出检验统计量的值, 5 分; 临界值, 3 分; 统计决策, 2 分.