



“十一五”国家重点图书·航天科学与工程系列丛书

ORBITAL DYNAMICS OF SPACECRAFT

航天器轨道动力学

● 赵钧 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



“十一五”国家重点图书·航天科学与工程系列丛书

ORBITAL DYNAMICS OF SPACECRAFT

航天器轨道动力学

● 赵钧 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

航天器轨道动力学是航天工程的基础。轨道设计、轨道确定、轨道控制、轨道拦截、交会对接、编队飞行和再入返回等技术问题都需要以轨道动力学理论为基础。

本书适合从事航天器研究、设计、试验和应用的科技工作者和航空宇航科学与技术学科研究生、高年级本科生阅读。

Abstract

Orbital dynamics of spacecraft is the basis of aerospace engineering. Orbit design, orbit determination, orbit control, orbital intercept, rendezvous and docking, formation flight and re - entry and other technical issues need to return to the track dynamics based on the theory.

This book are suitable for spacecraft research, design, testing and application of scientific and technological workers and aviation aerospace science and technology disciplines graduate students, senior undergraduates to read.

图书在版编目(CIP)数据

航天器轨道动力学/赵钧编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社, 2011.3

(航天科学与工程系列丛书)

ISBN 978 - 7 - 5603 - 3166 - 9

I . ①航… II . ①赵… III . ①航天器轨道-轨道力学
IV . ①V412.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 012891 号

策划编辑 杜 燕

责任编辑 杜 燕

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂

开 本 787mm × 960mm 1/16 印张 11.25 字数 245 千字

版 次 2011 年 3 月第 1 版 2011 年 3 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 3166 - 9

定 价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

前 言

飞向太空是人类千百年来梦想,第一颗人造地球卫星的发射成功把这个梦想变成了现实。半个世纪以来航天技术获得了飞跃性的发展,航天飞行器(Spacecraft)也达到了一个相当高的水平。人类的航天器可以达到更远的宇宙空间,可以航行更长的时间,可以完成更多、更复杂的任务。

航天器轨道动力学(Orbital Dynamics of Spacecraft)是研究航天器在引力场和其他外力作用下质点动力学问题的科学,是航天工程的基础。航天工程中的轨道设计、轨道确定、轨道控制、轨道拦截、交会对接、编队飞行和再入返回等技术问题,都需要有轨道动力学理论的支持。

航天器轨道动力学源于天文学中的天体力学(Celestial Mechanics)。2 000 多年前开始的中国古代的观星记载为描述天体的运动打下了基础,到了近代欧洲的科学家们以数学和力学理论建立了较完整天体力学体系。先是哥白尼(Copernicus)建立了日心说,1609 年开普勒(Kepler)发表了关于行星运动的第一定律和第二定律,1619 年发表了第三定律;68 年后(1687 年)牛顿(Newton)正式提出了万有引力定律,并运用牛顿力学定律证明了开普勒定律。19 世纪末到 20 世纪初,研究太阳系中有关天体运动的定性理论和数值计算方法已日臻完善,计算月球和各大行星星历表的工作已完成。

1957 年伴随着第一个人类制造的飞行器进入太空,研究航天器动力学现象的学科——航天器动力学(Spacecraft Dynamics)也应运而生。航天器动力学沿用了天体力学的核心体系,又根据航天器的特点和相关科学的发展引入了新的内容。航天器轨道动力学作为航天器动力学的主要组成部分研究的是航天器质心在天体(不再是质点,也不只是一个)的引力和其他力作用时的运动规律的科学。它的主要研究内容包括轨道理论和轨道应用两部分。

轨道理论:根据航天器的任务和动力学特性设计它的轨道,使得有效载荷能够正常、有效地工作;根据测量数据确定航天器的真实轨道,包括初轨确定和轨道

改进;根据轨道摄动源的特性研究航天器轨道摄动特性,给出高精度的轨道模型。

轨道应用:实现航天器轨道机动、轨道保持、交会对接和再入与返回任务的轨道控制;实现多个航天器的编队飞行、伴随飞行的相对运动轨道研究;深空探测的飞行轨道。

本书是作者多年从事的航天器动力学领域的科研与教学工作的总结,并参考了国内外代表该领域最新研究成果的优秀论著而悉心完成的。在内容的安排上,由浅入深,通过对航天器物理现象的数学描述和动力学原理的应用,给出航天器轨道运动的动力学本质以及所具有的特性。在基本原理推导时采用了简明的矢量描述方法以方便分析和理解,到了基本理论的工程应用和仿真分析阶段,则将矢量表达式分解到相关的坐标系中,给出分量形式的表达式。

本书从基础知识讲解入手,逐步增加理论分析的深度,同时兼顾介绍相关研究方向的最新进展,使读者既能掌握必需的轨道动力学基础理论知识,又能够对其最新工程应用有必要的了解,保持对航天器轨道动力学研究的前瞻性。在这样的指导思想下对书中的内容作如下安排:第1章是关于航天器运动的时空描述的技术基础、时间和坐标系统介绍;第2章介绍基于两体运动和中心引力场运动的航天器的基本轨道理论;第3章介绍关于航天器的轨道建立与轨道确定及星下点轨迹内容;第4章介绍航天器各种形式的轨道机动应用;第5章介绍有关航天器进行行星际飞行方面的理论和方法;第6章介绍航天器间的相对运动理论和交会对接等方面的应用;第7章介绍各类轨道摄动问题的研究;第8章介绍航天器进入飞行与软着陆过程的应用研究;附录中给出了航天器轨道动力学常用数据和常用理论与公式的推导和证明,供读者在阅读时方便查阅。

本书在编著过程中,参阅和引用了部分航天器动力学领域的相关专著和学术论文的内容,在此向相关作者表示感谢。同时也得到哈尔滨工业大学各相关部门的大力支持和本学科同事及研究生的无私相助,特此致谢。

本书的读者对象是航天器设计及相关专业的科技工作者以及高等院校相关专业的研究生、高年级本科生,对于其他的航天领域的读者也具有参考价值。各种因素所致,书中难免有疏漏与不足之处,恳请读者指正。

作 者

2010年1月于哈尔滨

目 录

第 1 章 航天器运动的确定	(1)
1.1 时间系统	(1)
1.2 坐标系	(3)
1.3 坐标体系	(6)
第 2 章 航天器的基本轨道	(9)
2.1 两体问题	(9)
2.2 中心引力场中的运动	(13)
2.3 圆锥曲线轨道特性	(15)
第 3 章 航天器的轨道建立与确定	(22)
3.1 轨道的建立	(22)
3.2 轨道要素与入轨参数	(25)
3.3 航天器的轨道确定	(28)
3.4 星下点轨迹	(32)
3.5 弹道导弹的射程	(35)
第 4 章 航天器的轨道机动	(37)
4.1 单脉冲机动	(38)
4.2 同平面的轨道过渡	(41)
4.3 航天器的轨道拦截	(46)
4.4 气动力辅助轨道机动	(49)
4.5 连续作用力下的轨道机动	(54)
第 5 章 航天器的星际航行	(58)
5.1 会合周期及发射窗口	(58)
5.2 影响球和圆锥曲线拼合法	(59)
5.3 航天器的引力机动	(62)



5.4	限制性三体问题	(66)
5.5	月球探测	(76)
5.6	行星际飞行	(82)
第 6 章	航天器的相对运动	(88)
6.1	相对运动方程式	(88)
6.2	航天器的交会和对接	(94)
6.3	航天器的编队飞行	(102)
第 7 章	航天器的摄动理论	(107)
7.1	地球引力场的势函数	(107)
7.2	干扰力分量引起的摄动	(113)
7.3	地球卫星的摄动	(121)
第 8 章	航天器的返回与软着陆	(134)
8.1	进入式航天器的分类	(134)
8.2	大气层外的飞行	(136)
8.3	进入式航天器气动飞行动力学	(139)
8.4	进入过程的加热、过载和控制	(141)
8.5	航天器的软着陆	(148)
附 录		(153)
A1	太阳系基本参数	(153)
A2	大气密度	(156)
A3	矢量和矢量运算	(159)
A4	齐奥尔科夫斯基公式	(164)
A5	STK 软件简介	(166)
参考文献		(172)

第 1 章 航天器运动的确定

航天器在空间的运动是相对某个参考方位的时间经历。相同的经历过程,对于不同的参考基准其位置变化和变化率(通常所谓的速度)不尽相同;相同的参考基准,对于不同基准的时间历程位置变化率亦不相同。时间和空间的参考系统是描述航天器运动状态的数学物理基础,只有正确地描述航天器的运动,才能确切得到其在力的作用下所产生的动力学现象。因此,需要有精确、稳定的时间系统和方便、准确的坐标系统。

1.1 时间系统

时间是物质运动过程的持续性和顺序性的表现,是物质存在的基本形式之一。测量时间的基本原理就是确定某种物质运动过程作为计量时间的基准。通常所说的时间计量,包含着不同的但又相互关联的两部分内容:一个是计量时间的间隔,即客观物质运动的两种不同状态经历了多少时间间隔;一个是确定时刻,即客观物质运动某种运动状态是哪个瞬间发生的。

作为时间计量基准的物质运动需要满足以下三个要求:

- (1) 物质运动的规律是已知的,并且运动状态是可描述的;
- (2) 物质运动的某一状态可作为计量时间的起始点;
- (3) 物质运动中的某一过程,可以作为时间计量基准。

由于建立时间计量系统所依据的物质运动不同,相继产生过多种计量时间的系统,根据所参照的物质运动的种类的不同可归结为三大类:以地球自转运动为基准建立的世界时;以行星公转运动为基准建立的历书时;以原子内部电子能级跃迁时辐射电磁波的振荡频率为基准建立的原子时。

1.1.1 世界时(UT, Universal Time) 时间系统

(1) 恒星时(ST, Sidereal Time)

恒星时是以地球自转为基础的,它是由恒星(通常取春分点(Spring Equinox))周日视运动来确定的时间计量系统。恒星周日视运动两次经过测站天子午面的时间间隔称为一个恒星日,恒星日的 $1/24$ 为一个恒星小时。以 60 进制形成恒星分、恒星秒,恒星日、时、分、秒统称为计量时间的恒星时单位。



(2) 太阳时(Solar Time)

太阳中心连续两次到达同一子午圈的时间间隔称为真太阳日,真太阳日的 $1/24$ 为一个真太阳时(True Solar Time),同样以 60 进制形成真太阳分、真太阳秒。真太阳时的起始点是真正午,而人们习惯上把真子夜作为起始点,相差 12 小时。为了和人们习惯一致,把真太阳起始点也改在真子夜。就是真太阳时在数值上等于真太阳的时角加上 12 小时,如果时角大于 12 小时,则把真太阳时减去 24 小时。

由于太阳在黄道上运动,而黄道和赤道不重合以及太阳在黄道上运动的不均匀性,使得真太阳日的长短不等。最长和最短的真太阳日相差达 51 秒。取平均太阳运动(平太阳)构成的太阳时,称为平太阳时(Mean Solar Time),真太阳时和平太阳时之差称为时差,它的变化范围为 -14 分 15 秒到 16 分 25 秒,一年中有 4 次等于 0(2000 年)。

通常把格林尼治(Greenwich)平太阳时称为世界时,为格林尼治平太阳时加上 12 小时。世界时和恒星时不是相互独立的时间系统。从 1956 年起,国际上把世界时分为三种:通过天文观测直接测定的世界时记为 UT0;加以地极位移引起子午圈变位修正得到的世界时记为 UT1;再用经验公式外推得到的地球自转速度变化的影响加以修正得到的较均匀的世界时记为 UT2。

1.1.2 历书时(ET, Ephemeris Time)

由于地球旋转运动的不均匀性,以地球旋转周期为基准的世界时不宜作为时间系统基准,需要选取其他形式的运动作为时间基准。因此就产生了以太阳系内天体公转为基准的均匀时间系统——历书时,在 1960 ~ 1967 年是世界公认的计时标准。其定义为:时刻起算点是 1900 年初太阳几何平黄经为 $279^{\circ}41'48.04''$ 的瞬间,也就是 1900 年 1 月 0 日格林尼治平午的时刻作为历书时 1900 年 1 月 0 日 12 时。它的秒长取回归年秒长 $365.242\ 198\ 778 \times 86\ 400 = 31\ 556\ 925.974\ 7$ 的倒数。某一时刻的历书时可以通过对太阳、月亮或行星的观测来得到,而最有效的方法是观测月亮。

历书时是一种由牛顿力学定律确定的均匀时间,亦称为牛顿时。用运动方程中的时间变量为参数计算出天体的位置,通过观测太阳、月亮和行星的位置获得历书时。由于天体运动理论的缺陷及求解运动微分方程时由实测确定的积分常数包含测量误差,历书时作为一个均匀时间尺度而言其精度是不够的,且要得到这样的时间又很缓慢。因此 1967 年底计时标准转向原子时,它有更高的精度,而且可以随时获得。不过在这期间,历书时仍然作为一个天文常数被保留下来。直到 1984 年,历书时才被原子时完全代替。

1.1.3 国际原子时(TAI, International Atomic Time)

由于原子内部运动的稳定性比天体运动高得多,分布在不同轨道上绕原子核旋转的电子从一个轨道跃迁到另一个轨道上时,会放出(或吸收)具有固定振荡频率的电磁波。对某种元



素的原子,它的电子在两条确定的轨道之间跃迁时,放出的电磁波的振荡频率总是一定的。这种用振荡频率建立起来的时间基准,称为原子时。1967年10月第13届国际度量衡大会决定采用原子秒作为时间的基本单位,以铯原子 Cs^{133} 基态的两个超精细能级间在零磁场下9 192 631 770次跃迁所经历的时间为1秒,称为国际单位秒。取1958年1月1日0时UT1为起点,相应的时间系统称为国际原子时。在初始历元时刻,原子时和世界时非常接近。1976年第16届国际天文学联合会决议,从1984年起天文计算和历表上所用的时间单位,都以原子时秒为基础。

原子时虽然是秒长均匀、稳定度很高的时间系统,但它却与地球运动无关,而有很多问题却涉及到计算地球的瞬时方向和位置,又需要世界时。因此,为了兼顾对原子时秒长和世界时时刻两者的需要建立了一种折衷的时间系统,称为协调世界时(UTC, Universal Time Coordinated System)。秒长与原子时秒长一致,在时刻上则要求尽量与世界时接近,差值保持在0.9秒以内。因两者时刻差距不很大,只需在每年的年中或年底对协调世界时的时刻作1整秒的调整即可,加上一秒叫正跳秒,取消一秒叫负跳秒,由国际时间局提前两个月公布。

1.2 坐标系

坐标系对于描述航天器运动和运动的变化准确性和方便性十分重要,是确定航天器运动状态的基础。坐标系的选用合适与否决定了运动描述、运动分析和运动控制的难易程度。一类常用的坐标系是惯性坐标系(Inertial Coordinate System),因为航天器运动是根据牛顿运动定律在惯性坐标系中建立起来的。实际上理论的惯性坐标系是不存在的,实际应用的惯性坐标系都是不同精度的近似;另一类是与地球固连的坐标系,它对于描述航天器相对于地球的运动较为方便。此外,还有以地面点为原点的地平坐标系和以航天器质心为原点的轨道坐标系、体坐标系和速度坐标系等。

天球(Coelosphere),是指以某点为中心,半径为任意长度的一个假想球体。通常把天体或航天器投影到天球的球面上,并利用相应的坐标系统来表达或研究物体的运动和它们之间的关系。通常是利用天球上的某些点和面(基圈)来建立坐标系。各种天球坐标系的区别只是在基圈与坐标轴方向的选取方法不同而已。常用的有黄道坐标系(Ecliptic Coordinate System)、赤道坐标系(Equatorial Coordinate System)、地平坐标系(Horizontal Coordinate System)和轨道坐标系(Orbital Coordinate System)。

1.2.1 黄道坐标系

基圈为黄道面的各种坐标系,如图1.1所示。

(1) 日心黄道坐标系

坐标原点 O_s 位于太阳的质心, $O_s x_s$ 轴指向春分点, $O_s z_s$ 轴垂直于黄道面,与地球公转同向, $O_s y_s$ 轴构成右手坐标系。

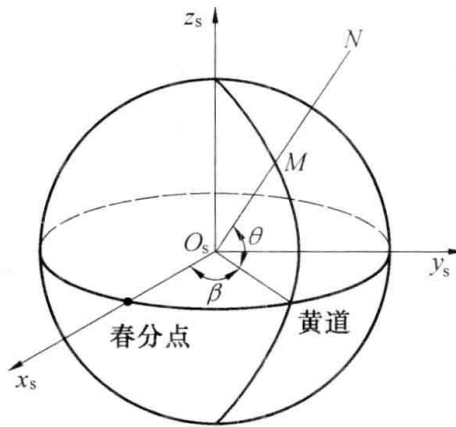


图 1.1 黄道坐标系

(2) 日心黄道球面坐标系

坐标原点 O_s 位于太阳的质心, 点到 O_s 的距离为 M , 黄经为 β , 黄纬为 θ 。

黄经 β 为黄道坐标系的经角, 由春分点方向开始沿逆时针方向计算。黄纬 θ 为黄道坐标系的纬角, 向北黄极为正, 向南黄极为负。日心黄道直角坐标系与日心黄道球面坐标系之间可以很方便地进行转换。

(3) 地心黄道坐标系

坐标原点 O_e 位于地球的质心, $O_e x_e$ 轴在黄道面内指向春分点, $O_e z_e$ 与地球公转轴平行, $O_e y_e$ 轴在黄道面内构成右手坐标系。

1.2.2 赤道坐标系

赤道坐标系的原点位于地球质心, 随地球一起进行轨道运动。与地球固连的坐标系还随地球一起转动, 如图 1.2 所示。

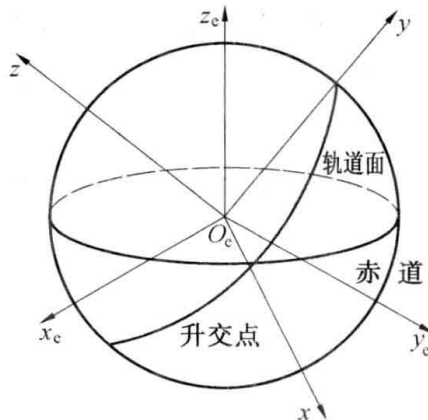


图 1.2 赤 / 轨道坐标系



(1) 地心赤道坐标系

坐标原点 O_e 位于地球的质心, $O_e x_e$ 轴在赤道面内分别指向春分点、格林尼治子午面、升交点, $O_e z_e$ 与地球自转轴重合, $O_e y_e$ 轴在赤道面内构成右手系, 其中 $O_e x_e$ 轴指向格林尼治子午面的坐标系是地球固连坐标系。

(2) 地心固连球面坐标系

坐标原点 O_e 位于地球的质心, 点到地心的距离为 r , 方位角为赤经 λ 和赤纬 φ 。此坐标系亦随地球转动。

(3) 地心固连椭球面坐标系(大地坐标系)

坐标原点 O_e 位于地球的质心, 以参考椭球面为基准面。空间点的位置用大地经度 L , 大地纬度 B 和大地高度 H 表示。参考椭球是一个形状、大小、位置和方向都已确定的椭球面, 该椭球面为与地球水平面吻合度最高的椭球面, 如图 1.3 所示。

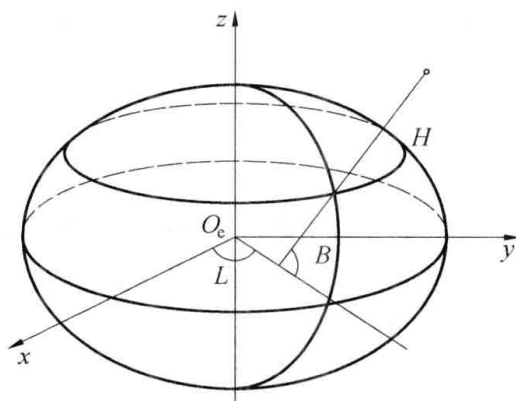


图 1.3 大地坐标系

过空间某点的椭球面法线与椭球赤道面的交角为大地纬度 B ; 包含该法线的大地子午面与起始大地子午面的二面角为该点的大地经度 L ; 沿法线至椭球面的距离为该点的大地高 H 。值得注意的是大地经纬度和天文经纬度是有差别的。

1.2.3 地平坐标系

地平坐标系的纬角 A 称为地平纬度, 又称为地平高度, 从真地平圈向天顶方向度量。地平坐标系的经角 E 为方位角, 从正东点逆时针方向度量, 如图 1.4 所示。

地平坐标系简洁、方便, 容易实现, 坐标量可以通过直接观测获得。但它的明显的地域性也带来许多不便: 不同的原点 O_c 的天顶方向不同; 恒星的地平坐标是变化的。

(1) 地平坐标系

地面点 O_c 为原点, $O_c x_c$ 轴在水平面内正指向正东, $O_c y_c$ 轴在水平面内正指向正北, $O_c z_c$ 轴沿铅垂方向构成右手系。

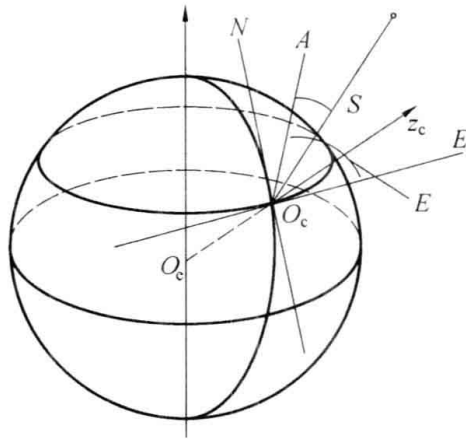


图 1.4 地平坐标系

(2) 地面球面坐标系

地面点 O_c 为原点,由空间点到原点距离为 S ,与正东方的方向角 E ,与水平面的仰角 A 构成。

1.2.4 航天器轨道面坐标系

地心轨道面坐标系原点 O_c 位于地球的质心,基圈位于轨道面内,与赤道面有交角(轨道倾角)。 $O_c x$ 轴在轨道面内分别指向升交点、近地点、卫星方向, $O_c z$ 与轨道面正法线方向平行, $O_c y$ 轴在轨道面内构成右手系。见图 1.2。

1.3 坐标体系

在太阳、月球和其他行星引力的作用下,地球自转所在的赤道平面和地球公转所在的黄道平面乃至春分点都不是一成不变的。赤道、黄道和春分点都有不同程度的相对于深层空间的运动。因而,以它们为基准的坐标系也就在时刻发生着变化,即使是很小的和很缓慢的。这种现象统称为岁差、章动,其对时间、空间基准的影响直接导致对航天器运动的描述的不确定性。基准的变化直接把坐标系和时间系统紧密地连接在一起了,空间的基准必须和时刻同时确定才能够产生应有的作用。

1.3.1 岁差与章动的影响

坐标系的建立是基于地球为均质球体且没有其他天体摄动力影响的假设,即地球的自转轴在空间的方向是固定的,因而春分点在天球上的位置保持不变。实际上地球的形状接近于椭球体,在日、月和其他天体引力的作用下,自转轴的方向改变,使春分点在黄道上产生缓慢的西移的现象称为岁差。考虑岁差造成运动的北天极通常称为瞬时平北天极(简称平北天极),相应



的天球赤道和春分点,称为瞬时天球平赤道和瞬时平春分点。

在岁差的影响下,地球自转轴在空间绕北黄极产生缓慢的旋转。地球自转轴在空间的方向变化,主要是由日、月引力共同作用的结果,其中又以月球的引力影响为最大。太阳的影响不到月球影响的一半,其他行星引力的微小影响可以忽略不计。这个缓慢的旋转,使北天极每年西移约为 $50.371''$,周期大约为 25 800 年。

月球的运行轨道在太阳和其他行星引力的影响下也是不断变化的,所以北天极绕北黄极旋转的轨迹实际上要更复杂些。除了岁差造成的平北天极绕北黄极的较大幅度的、较缓慢的转动外,日、月引力场造成的地球章动运动是要叠加到岁差造成的转动上去的。章动引起北天极(瞬时北天极)产生较小幅度的、较快的绕平北天极的运动,夹角约 $9.2'$,周期为 18.6 年。在岁差和章动的共同影响下,瞬时北天极绕北黄极旋转的轨迹如图 1.5 所示。

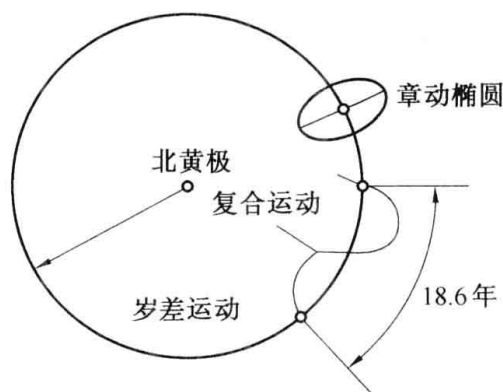


图 1.5 岁差和章动引起的极移

1.3.2 协议坐标系

在某一时刻以瞬时真天极和瞬时真春分点为基准建立的天球坐标系称为瞬时真天球坐标系。以瞬时平天极和瞬时平春分点为基准建立的天球坐标系称为瞬时平天球坐标系。由于岁差和章动的影响,瞬时天球坐标系的方向是不断变化的,是一个非惯性坐标系。在这样的坐标系中,牛顿力学定律是不成立的。

建立一个适合的惯性天球坐标系基准是非常必要的,通常的做法是选择以某一时刻 t_0 的平天极和历元平春分点建立的瞬时平天球坐标系为基准坐标系,只需知道其他历元坐标系相对于基准的变化即可确定其准确的方位。该瞬时平天球坐标系称为标准历元 t_0 协议天球坐标系,亦称为协议惯性坐标系(CIS, Conventional Inertial System),天体和航天器的位置通常都是用该坐标系描述的。国际天文学联合会和国际大地测量委员会定义了 J2000.0 协议天球坐标系——以地球质心为原点,2000 年 1 月 1.5 日的标准历元的平赤道和平春分点为基准的天球坐标系。

瞬时真天球坐标系与 J2000.0 协议天球坐标系间的转换通常分为两步:即首先将协议天球坐标系的坐标转换为瞬时平天球坐标系;然后,再将瞬时平天球坐标系的坐标转换为瞬时真天



球坐标系。

1.3.3 坐标变换

当已知航天器或天体在某个协议坐标系中的参数后,需要得到其在所关心的其他坐标系中的参数时,需要建立两者之间的联系,如黄道坐标系与赤道坐标系中的轨道参数。两坐标系间的坐标转换常用的方法有两种:利用坐标变换求解和利用球面三角公式求解。

实际应用中新、旧两个坐标系之间往往都是基圈和参考点间由于岁差、章动等原因造成的微小的方位角的差别。比如瞬时春分点与瞬时平春分点、瞬时平春分点与某历元春分点。通过确定新、旧两个坐标系坐标轴之间的角度和顺序关系,可以得到不超过3个关于角差的正交变换矩阵,按顺序矩阵相乘可以得到一个新、旧两个坐标系间的坐标变换矩阵,进而实现航天器或天体在两个坐标系中坐标的变换。坐标变换的组合很多,但原理都是一样的,可以根据需要参考相关论著,这里就不再详细介绍了。

第 2 章 航天器的基本轨道

物体在空间的运动是与多个其他物体相互作用的结果,但起主导作用的只有几个或者一个,如太阳对行星,地球对航天器,其他的物体(如其他行星)的影响较小,定性分析时可暂时略去。研究多个物体在相互间的万有引力作用下的运动规律的问题称做 N 体问题。 N 体问题通常无解析解,只能通过数值计算求解。本章首先从最基本的问题——两体问题(Two-body Problem)——开始进行研究。

2.1 两体问题

在惯性空间中只考虑两个互相作用的物体,如太阳与地球,太阳与行星,地球与月球,地球与航天器,双子星等,都是可以满足建立两体系统假设的现实存在。两体问题是源于客观实际的理论分析工作。

2.1.1 动力学方程

在惯性坐标系 $OXYZ$ 中,两个物体 B_1, B_2 可视为质点,其质量分别为 m_1 和 m_2 , C 为两体系统的质心。 B_1, B_2 和质心 C 在惯性空间的位置分别为 r_1, r_2 和 r_c , B_1 相对 B_2 的距离为 r ,其相互间的万有引力分别为 F_1, F_2 。 F 为作用在 B_1 体上的 F_1 以外的力,如图 2.1。由多体系统质心(Center of Mass)的特性有

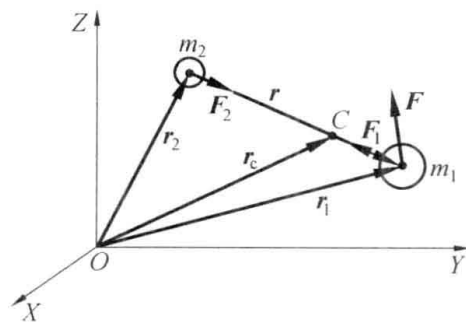


图 2.1 两体系统模型

$$m_1(r_1 - r_c) + m_2(r_2 - r_c) = 0 \quad (2.1)$$

由几何关系

$$r = r_1 - r_2 \quad (2.2)$$

分别从式(2.1),(2.2)中消去 r_1 和 r_2 ,有

$$r_1 = r_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \quad (2.3)$$

$$r_2 = r_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \quad (2.4)$$



由牛顿第二定理有

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1$$

$$\mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2$$

因为两体间的万有引力互为作用力与反作用力,有

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$$

从式(2.3),(2.4)中消去 \mathbf{r} , 并求对时间的二阶导数得

$$m_1 \left(\ddot{\mathbf{r}}_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}} \right) - \mathbf{F} = -m_2 \left(\ddot{\mathbf{r}}_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}} \right) \quad (2.5)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_c (m_1 + m_2) = \mathbf{F}$$

当两体系统只有内力作用, 即 $\mathbf{F} = 0$ 时, 有

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = 0 \quad (2.6)$$

式(2.6)表明, 在没有外力的作用时, 两体系统质心的加速度为零——始终保持静止或匀速直线运动状态。这是符合牛顿第一定律的, 不论每个物体如何运动, 互相间相对位置如何, 其系统质心的加速度始终为零。这一结论也适用于 N 质点系统。

相对于两体及其质心在惯性空间的运动, 更需要关注的是两体间的相对运动。将万有引力表达式 $\mathbf{F}_2 = Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ (G 为万有引力常数) 代入得

$$\mathbf{F}_1 = -Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} = m_1 \left(\ddot{\mathbf{r}}_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}} \right) - \mathbf{F} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{F}_2 = Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} = m_2 \left(\ddot{\mathbf{r}}_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}} \right) \quad (2.8)$$

式(2.8)减去式(2.7)消 \mathbf{r}_c 得

$$G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{f}$$

其中, $\mathbf{f} = \mathbf{F}/m_1$ —— B_1 体上单位质量所施加的外力。

$$\ddot{\mathbf{r}} + G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{f} \quad (2.9)$$

令 $\mu = G(m_1 + m_2)$ ——两体系统的引力常数, 得

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{f} \quad (2.10)$$

式(2.10)为两体系统相对运动的基本动力学方程式, 是分析两体系统运动的基础。其齐次式为保守两体系统的动力学方程。不用求解式(2.10), 通过对其作相关的数学处理亦可得出相对运动的一些特性。当然无外力作用的相对运动基本规律还是需要通过求解齐次微分方程来得到的。



2.1.2 动量矩(Moment of Momentum)

设 $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, 其中 \mathbf{h} 为 B_1 体上单位质量相 B_2 的动量矩, 对上式求时间导数, 得

$$\dot{\mathbf{h}} = \frac{d(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \quad (2.11)$$

因 $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0, \ddot{\mathbf{r}} = -\mu\mathbf{r}/r^3$, 则有 $\dot{\mathbf{h}} = 0$, 即

$$\mathbf{h} = \text{const} \quad (2.12)$$

式(2.12)表明, B_1 体相对 B_2 体的动量矩是守恒的(当然反过来也是成立的), 其大小、方向都是不变的。因 $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, 由矢量叉乘的定义有, \mathbf{h} 垂直于 \mathbf{r} 和 \mathbf{v} , 即垂直于 B_1 体和 B_2 体相对运动的平面。相对动量矩守恒表明两体的相对运动处在一个保持方向不变的平面里, 为通过系统质心的平面运动。这是两体系统相对运动非常重要的特性。

2.1.3 动能(Kinetic Energy)

两体在惯性坐标系中的动能之和是

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2$$

将式(2.3), (2.4) 代入, 得

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_c \cdot \dot{\mathbf{r}}_c + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

而上式中的第二项可以写成

$$\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_c) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_c) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_c) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_c)$$

此式为每个体绕质心 C 转动动能的和, 所以两体系统的动能可以表示为两体质心的动能(平动)和两体绕质心转动动能的和。

2.1.4 动力学方程的解

微分方程降阶:

用 $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ 右侧叉乘式(2.10) 的齐次式形式, 得

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 0$$

应用矢量叉乘变换公式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, 上式的第二项的矢量为

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \frac{d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})}{dt} - r^2 \dot{\mathbf{r}} = r\mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r^2 \dot{\mathbf{r}} = -r^3 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

代回得

$$\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} \times \mathbf{h} - \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = 0$$



考虑到 $\mathbf{h} = \text{const.}$, 对上式积分得

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{c}$$

式中 \mathbf{c} ——积分常矢, 由 $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ 的初始值确定。

上式改写为

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{h} = \mu \left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} \right) \quad (2.13)$$

式中 $\mathbf{e} = \mathbf{c}/\mu$ ——偏心矢量(Eccentric Vector), 其代数值 e 称为偏心率(Eccentricity), 偏心矢量具有重要的物理意义。

用 \mathbf{h} 点乘式(2.13), 有

$$\mathbf{h} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{h} \right) = \mu \left(\mathbf{h} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{e} \right)$$

因 \mathbf{h} 与矢径 \mathbf{r} 和速度 $\dot{\mathbf{r}}$ 是垂直的, 它们间的点乘为零, 因而有

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{e} = 0 \quad (2.14)$$

式(2.14)表明, \mathbf{e} 亦与 \mathbf{h} 垂直, 与 \mathbf{r}, \mathbf{v} 共面, 在轨道平面内。

微分方程求解:

以 \mathbf{r} 点乘式(2.13) 得

$$\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \mu \mathbf{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} \right) = \mu r (1 + e \cos \theta)$$

其中 θ 是矢量 \mathbf{e} 和 \mathbf{r} 之间夹角。

而应用矢量混合叉乘公式 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, 上式为

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) &= \mathbf{h} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = h^2 = \mu r (1 + e \cos \theta) \\ r &= \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \end{aligned} \quad (2.15)$$

此式为相对运动的轨道方程。当 $\theta = 0^\circ$ 时, \mathbf{e} 与 \mathbf{r} 平行时, 有 $r = r_{\min}$, 所以称 θ 为真近(心点)角(True Anomaly)。

式(2.15)描述的 B_1 相对于 B_2 的运动, 是圆锥曲线(Conical Section)的参数方程表达式, 亦代表 B_2 相对于 B_1 的运动形式。也是 B_1 和 B_2 两体在惯性空间的运动 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 的变化规律。

圆锥曲线是由 p, e 两个参数决定大小与形状的平面曲线。根据定义, 圆锥曲线可以按照 e 的取值的不同分为圆轨道(Circle Orbit), 椭圆轨道(Elliptic Orbit), 抛物线轨道(Parabolic Orbit), 双曲线轨道(Hyperbolic Orbit)4种形状, 如表 2.1 所示。

表 2.1 轨道的形状

$e = 0$	圆轨道
$0 < e < 1$	椭圆轨道
$e = 1$	抛物线轨道
$e > 1$	双曲线轨道



图 2.2(a) 和(b) 分别表示 $e = 0.8$ 的两体系统在惯性空间的运动轨迹和相对运动的轨迹。质心 C 点将矢径 r 分割成与 m_1 和 m_2 成反比的线段。 B_1 和 B_2 分别以 C 为一个焦点作偏心率相同的同方向的椭圆运动,质量大的为小椭圆,质量小的为大椭圆。每一时刻,两体和 C 三点共线。 B_1 相对于 B_2 的相对运动轨迹是与绝对运动同类型、同方向的曲线。

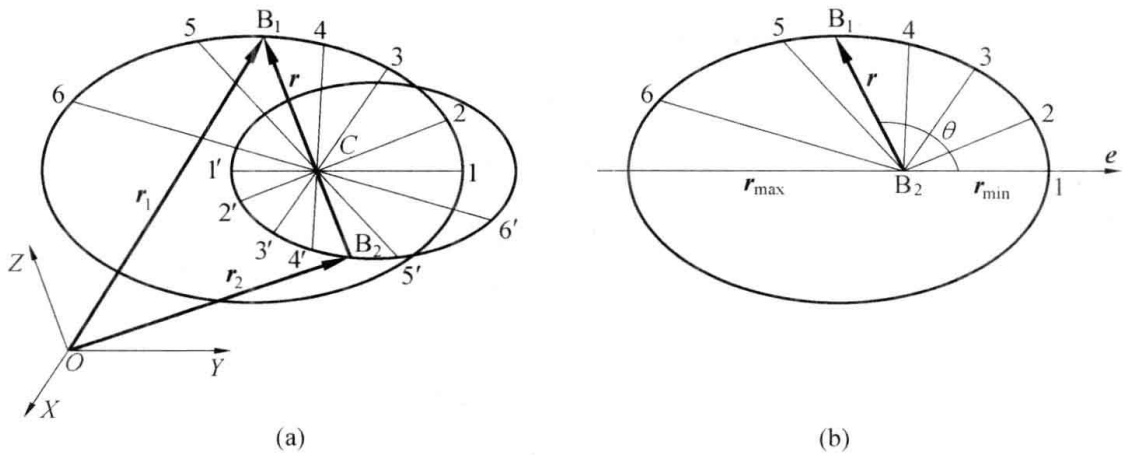


图 2.2 轨迹为椭圆的两体运动

对于地 - 月系统,系统的质心位置距地心 $|r_2 - r_c| = 4\,712.89\text{ km}$ 。显然是小于地球半径的,也就是说地 - 月系统是在绕地心月心连线上的位于地球内部、距离地心 $4\,712.89\text{ km}$ 的两体质心转动的,转动周期为月球绕地球转一周的时间。

2.2 中心引力场中的运动

若两体系统中二者的质量差距悬殊,假设 $m_2 \gg m_1$,则 C 与 B_2 质心重合,有 $\mu = Gm_2$ 和 $r_2 = r_c$,成为 B_1 绕 B_2 的运动。此时, B_2 称为中心引力体, B_1 绕 B_2 的运动称为中心引力场 (Central Gravitational Field) 中的运动。两体系统运动中的特性、结论亦有效,如轨道类型,动量矩,动能等方面。各类不同类型轨道的运动及几何参数也有各自的特点。

由轨道方程 $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$,当 e 取不同数值时,中心引力场中的运动轨道形状如图 2.3, m_2 所在点是圆锥曲线的一个焦点 (Focus)。 $\theta = 90^\circ$ 时,有 $p = r_{90}$,故又称 p 为正半焦弦 (semi-latus rectum)。真近角 $\theta = 0^\circ$ 时,有 $r_p = r_{\min}$, $\theta = 180^\circ$ 时, $r_a = r_{\max}$,所以 p 点称为近心点 (Perigee), a 点称为远心点 (Apogee)。

圆锥曲线轨道的能量方程

以 $2\dot{r}$ 点乘式(2.10)的齐次式,得

$$2\dot{r} \cdot \ddot{r} + 2 \frac{\mu}{r^3} \dot{r} \cdot r = \frac{d}{dt}(\dot{r} \cdot \dot{r}) + \frac{\mu}{r^3} \frac{d}{dt}(r \cdot r) = \frac{d}{dt}(v^2) + \frac{\mu}{r^3} \frac{d}{dt}(r^2) =$$



$$\frac{d}{dt}(v^2) - 2\mu \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \quad (2.16)$$

积分得

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \epsilon_e \quad (2.17)$$

为 B_1 (可视为航天器) 单位质量的动能与势能之和。

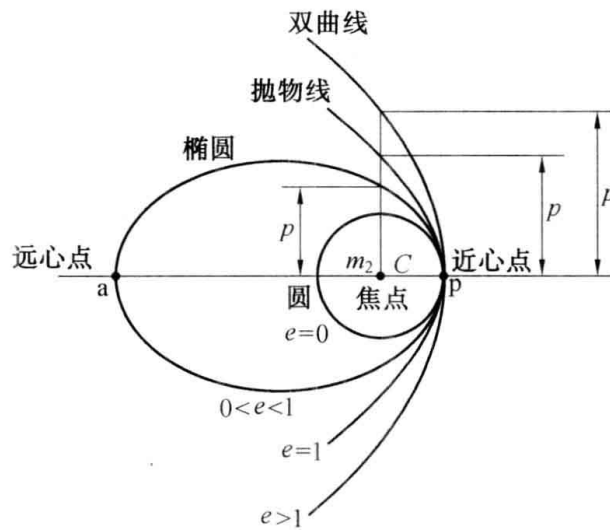


图 2.3 圆锥曲线轨道

$-\mu/r$ ——引力势能(Potential Energy),表示引力在 r 位置所具有的做功的能力。引力将单位质量从 r_1 移动到 r_2 作的功为两位置的势能之差 $(-\mu/r_1) - (-\mu/r_2)$,无穷远处势能定义为零。

式(2.17) 表示航天器在轨道任意点的动能与势能之和为常数,这就是能量守恒(Conservation of Energy)。

由于航天器的速度在地心轨道面坐标系中只有面内的分量,其水平速度与径向速度分量分别为 $r\dot{\theta}$ 和 \dot{r} ,则能量方程还可以表示为

$$\frac{1}{2}(\dot{r} + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\mu}{r} = \epsilon_e \quad (2.18)$$

而 $h = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = rv \sin(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = r^2\dot{\theta}$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} = \epsilon_e \quad (2.19)$$

确定 ϵ_e :

取 $\theta = 0^\circ$ (或 180°),此时 $\dot{r} = 0$

$p = \frac{h^2}{\mu} = r_p(1 + e)$,式(2.19) 为



$$\epsilon_e = \frac{h^2}{2r_p^2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{p\mu}{2r_p^2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{\mu(1+e) - 2\mu}{2r_p} = -\frac{1-e^2}{2p}\mu \quad (2.20)$$

当 $e = 1$ 时, 抛物线轨道 $\epsilon_e = 0$

当 $e \neq 1$, 设 $a = p/(1 - e^2)$, 则能量方程可以写成

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (2.21)$$

此式为中心引力场中圆锥曲线运动能量方程的一般形式。

2.3 圆锥曲线轨道特性

2.3.1 圆轨道

当运动参数满足 $e = 0$ 时, 航天器绕中心引力体的运行轨道为圆轨道。

$$r = \frac{h^2}{\mu} = p = a = \text{const}$$

其轨道参数 p 、 a 等于轨道半径 r , $h = \sqrt{\mu r}$ 。

运行速度 v_c 显然只有水平方向的分量, 径向速度为零。

$$v_c = |\mathbf{v}_c| = |\dot{\mathbf{r}} + r\dot{\boldsymbol{\theta}}| = |r\dot{\boldsymbol{\theta}}| = r\omega \quad (2.22)$$

ω 为 r 绕 C 的角速度。

动量矩为 $h = rv_c$, 而 $h = \sqrt{\mu r}$, 所以有 $r = h^2/\mu = r^2 v_c^2/\mu$, 解得

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (2.23)$$

如以地球参数代入, $v_1 = 7.9 \text{ km/s}$ ——第一宇宙速度(First Cosmic Velocity), 是航天器沿地表绕地球飞行成为地球卫星的最小理论速度。

圆轨道运动的周期

$$T = \frac{2\pi r}{v_c} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}} \quad (2.24)$$

运行周期随着轨道半径的增大而增加, 对于绕地航天器 $T \geq 84.5 \text{ min}$ 。

圆周运动时航天器的能量方程

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2r} < 0 \quad (2.25)$$

在引力场的范围内, 轨道上各点的动能小于势能, 总的能量恒负, 所以圆轨道航天器不能脱离引力场飞行, 轨道半径越大, 飞行速度越慢而已。

2.3.2 椭圆轨道

当运动参数满足 $0 < e < 1$ 时, 航天器绕中心引力体的运行轨道为以中心引力体为一个焦



点的椭圆轨道。

(1) 几何关系

直角坐标系中,有长半轴(Semi-Major Axis) a ,短半轴(Semi-Minor Axis) b ,偏心率 e 等量(图 2.4)。

对于近、远心点矢径 r_p, r_a

$$r_p = \frac{p}{1 + e} = a(1 - e) \quad (2.26)$$

$$r_a = \frac{p}{1 - e} = a(1 + e) \quad (2.27)$$

显然 $p = a(1 - e^2)$; $a = \frac{p}{1 - e^2}$ 与能量方程中的 a 为相同的量。

由式(2.26) 和式(2.27) 解得

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (2.28)$$

椭圆的焦距

$$c = ea = \sqrt{a^2 - b^2}$$

椭圆的面积

$$A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

偏近(心点)角(Eccentric Anomaly)

真近角 θ 对于描述航天器或天体在轨道上的运动很方便、直观,物理意义明确。但对于中心对称的椭圆轨道, θ 只能反映出椭圆关于长轴的对称性,而不能体现出椭圆关于短轴的对称性。引入变量偏近(心点)角 ψ ,为过航天器与长轴垂直的直线与半径为 a 的辅助圆交点到椭圆中心点连线与长轴的夹角。它具有良好的数学特性,如图 2.5 所示。

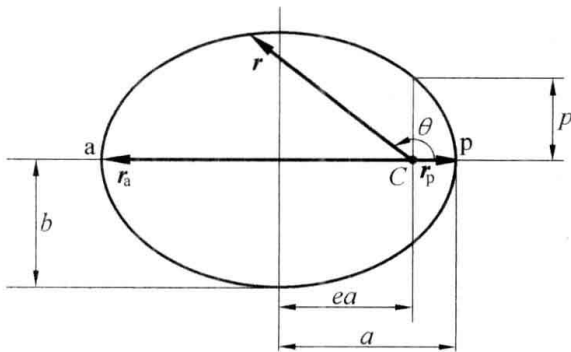


图 2.4 椭圆轨道的几何关系

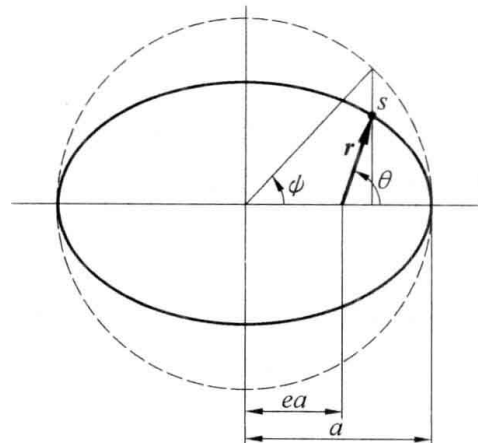


图 2.5 真近角与偏近角



真近角 θ 和偏近角 ψ 的关系为

$$\cos \psi = \frac{ea + r \cos \theta}{a} \quad (2.29)$$

或

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\psi}{2} \quad (2.30)$$

(2) 能量方程

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (2.31)$$

由于 a 为正值,椭圆轨道的总能量 ϵ_e 亦为负,且与 b 或 e 无关。圆轨道和椭圆轨道均为中心引力场中的封闭、循环轨道。

(3) 时间方程

由定义 $p = h^2/\mu = r^4\dot{\theta}^2/\mu$, 改写为

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} dt = \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta \quad (2.32)$$

上式右侧不易直接积分,引入偏近角 ψ 。轨道方程改写为

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

将真近角 θ 和偏近角 ψ 的关系代入,则

$$r = a(1 - e \cos \psi) \quad (2.33)$$

上式为用偏近角 ψ 表示的轨道方程。对时间求导得

$$\dot{r} = a e \sin \psi \dot{\psi} \quad (2.34)$$

将其和 $h^2 = \mu a(1 - e^2)$ 代入式(2.19)

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

解得 $\dot{\psi}^2 = \mu/ar^2$, 代入 r 得

$$(1 - e \cos \psi) d\psi = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} dt \quad (2.35)$$

以 $t = 0, \psi = \theta = 0^\circ$ (即近地点) 为起点积分

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} t_p = n t_p = \psi - e \sin \psi \quad (2.36)$$

式中 t_p ——以近地点为时间零点的飞行时间;

n ——平均角速度, $n = \sqrt{\mu/a^3}$ 。

式(2.36)亦称为开普勒时间方程。

考虑偏近角 ψ 和真近角 θ 的关系,可求得用真近角表示的时间方程。



$$t_p = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left[2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta} \right] \quad (2.37)$$

(4) 运行周期与速度

面积速度是位置矢径扫过面积的速率,或者是位置矢径单位时间扫过的面积。

由定义 $dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$, 所以

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{h}{2}$$

为常值,即开普勒第二定律:行星在椭圆轨道运动时,矢径所扫过面积与经过的时间成正比,即面积速度守恒。

由上式,运行一周的时间为

$$T = \frac{A}{\dot{A}} = \frac{2A}{h} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (2.38)$$

此式与式(2.37)将 θ 代入 360° 的结果是一致的,它又被称为开普勒第三定律。

航天器在椭圆轨道上运行的周期只与半长轴有关,即与能量大小有关,与形状无关。显然,式(2.24)是式(2.38)的特例。

由能量方程可得运动速度与距离的关系

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}}$$

对在 r_p 和 r_a , 分别有最大速度 v_p 和最小速度 v_a , 即

$$v_p = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r_p} (1+e)} = \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_p} \frac{2r_a}{r_a + r_p}} > \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \quad (2.39)$$

$$v_a = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r_a} (1-e)} = \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{1-e}{1+e}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_a} \frac{2r_p}{r_a + r_p}} < \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} \quad (2.40)$$

2.3.3 抛物线轨道

当运动参数满足 $e = 1$ 时,绕中心引力体的运行轨道为抛物线轨道。轨道方程变为

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta} \quad (2.41)$$

能量方程为

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \epsilon_e = -\frac{1-e^2}{2p} = 0 \quad (a \rightarrow \infty)$$

运行速度为

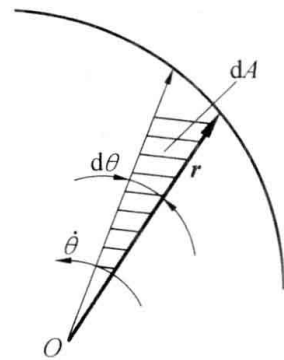


图 2.6 面积速度



$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{2}v_c \quad (2.42)$$

在与引力中心距离相同处抛物线轨道上的速度为圆轨道上的 $\sqrt{2}$ 倍。代入地球参数, $v_2 = \sqrt{2}v_1 = 11.2 \text{ km/s}$, 为第二宇宙速度——脱离地球引力场的最小理论速度。

时间方程

因 $e = 1$, 式(2.32)可积, 改写为

$$dt = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^2}$$

如以近心点 p 处时间为零时刻, 则有

$$t_p = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \left(\frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{6} \tan^3 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.43)$$

航天器从 r_1 处运行到 r_2 处的时间 Δt

由公式 $1 + \cos \theta = 2\cos^2 \frac{\theta}{2}$, 得

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{p}{2r}, \quad \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{p}{2r}$$

并考虑到 $p = 2r_p$, 所以有

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{r}{r_p} - 1} \quad (2.44)$$

$$\Delta t = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2r_p^3}{\mu}} \left[\sqrt{\left(\frac{r_2}{r_p} - 1\right)\left(1 + \frac{r_2}{2r_p}\right)} - \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_p} - 1\right)\left(1 + \frac{r_1}{2r_p}\right)} \right] \quad (2.45)$$

2.3.4 双曲线轨道

当运动参数满足 $e > 1$ 时, 航天器的运行轨道为以中心引力体为焦点的抛物线轨道。

$$r_p = a(1 - e)$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2} < 0, \text{ 为虚轴}$$

当 $r_a = \infty$, 对应的 θ_∞ 有 $\cos \theta_\infty = -1/e$, 即

$$\theta_\infty = \arccos(-1/e) \quad (2.46)$$

航天器的真近角的幅值不会超过 θ_∞ 。当航天器自无穷远处沿渐近线飞近, 沿双曲线转过中心星体后, 会沿着另一条渐近线飞出, 其进入速度与飞出速度大小相等, 但方向转过 δ 角, 因

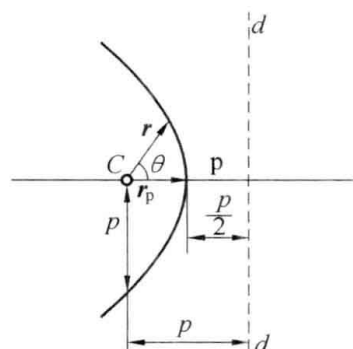


图 2.7 抛物线轨道

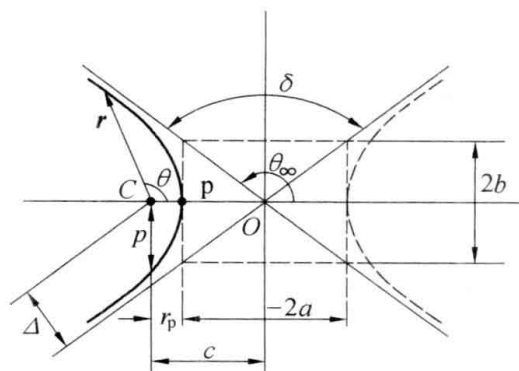


图 2.8 双曲线轨道



$$\theta_{\infty} = \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} \quad (2.47)$$

则
$$\delta = 2\arcsin\left(\frac{1}{e}\right) \quad (2.48)$$

能量方程

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} > 0 \quad (2.49)$$

抛物线轨道上动能总是大于势能的,即使到了所谓的无穷远——引力场的边界。所以抛物线轨道不是个封闭的循环轨道,航天器只能是从引力场一飞而去,或者是匆匆而绕的过客。

由能量方程得

$$v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{\mu}{a}\right)} \quad v_{\infty} = \sqrt{-\frac{\mu}{a}}$$

则

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} + v_{\infty}^2} > \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = v_2 \quad (2.50)$$

引力中心与渐近线的距离是 Δ , 则动量矩为

$$h = \Delta \cdot v_{\infty} \quad (2.51)$$

e 的表达式

$$h = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} = \Delta \sqrt{-\frac{\mu}{a}}$$

$$\Delta = \sqrt{a^2(e^2 - 1)} = -a \sqrt{(e^2 - 1)} = \frac{\mu}{v_{\infty}^2} \sqrt{e^2 - 1} \quad (2.52)$$

$$e^2 = 1 + \frac{v_{\infty}^4 \Delta^2}{\mu^2} \quad (2.53)$$

e 的另一种表达形式

$$a = -\frac{\mu}{v_{\infty}^2} = \frac{r_p}{1 - e}$$

$$e = 1 + \frac{r_p v_{\infty}^2}{\mu} \quad (2.54)$$

时间方程

因 $\int_0^{\theta} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta$ 在 $e > 1$ 时可积, 则有

$$t_p = \sqrt{\frac{-a^3}{\mu}} \left[\frac{e \sqrt{e^2 - 1} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} - \ln \left(\frac{\sqrt{e + 1} + \sqrt{e - 1} \tan \frac{\theta}{2}}{\sqrt{e + 1} - \sqrt{e - 1} \tan \frac{\theta}{2}} \right) \right] \quad (2.55)$$



t_p 为从近心点 p 为起始时间的运行时间。

中心引力场中的圆锥曲线运动是航天器或天体在引力作用下的基本运动形式,是理想状态下的数学推导。现实中的运行轨道是以此为基础的更为复杂运动,需要考虑更多的实际影响因素才能够准确地描述。但在轨道设计、轨道确定、轨道机动等方面的应用不作特别说明的时候还都是按照中心引力场中的轨道特性来进行研究的,因为它毕竟是引力作用下的运动的主体,能够有较好的准确度。

第 3 章 航天器的轨道建立与确定

航天器的轨道类型取决于其发射入轨或机动变轨时的运动状态,一个由任务确定的轨道由什么样的关机参数来实现是轨道建立的问题;运行中的航天器的轨道参数是什么,通过其运动状态测量数据来进行轨道参数的计算是轨道确定问题,也就是常说的定轨。轨道除了形状参数外,还需要确定轨道面的方位。所以某个时刻航天器在轨道上的位置需要更多的参数来确定。轨道参数与运动状态之间的关系也是需要在本章解决的问题。

3.1 轨道的建立

本节首先研究航天器的运动状态与轨道形状的关系问题。运载器或星载发动机关机时刻,航天器的运动状态可以在轨道面内描述为 v_0, r_0, β_0 。这样的运动状态与所建立轨道的参数如 p, e 之间的关系是如何的呢?

如图 3.1,在 A 点以 v_0, r_0, β_0 状态所建立的轨道的形状参数为 e 和 p 。设此刻航天器的真近角为 θ_0 ,因为 $p = r_0(1 + e \cos \theta_0)$, θ_0, e 亦可确定航天器的轨道形状。圆锥曲线作为平面二次曲线,只有两个独立的变量。需要建立二个方程式来求解轨道方程。

动量矩可以写为

$$h = rv \cos \beta \quad (3.1)$$

由轨道方程得

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = \frac{r^2 v^2 \cos^2 \beta}{\mu(1 + e \cos \theta)} \quad (3.2)$$

求导得

$$\dot{r} = \frac{p e \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \dot{\theta} = \frac{r^2 e \sin \theta}{p} \dot{\theta} = \frac{\mu e \sin \theta}{h} = \frac{\mu e \sin \theta}{r v \cos \beta} \quad (3.3)$$

而

$$\dot{r} = v \sin \beta \quad (3.4)$$

由式(3.2) ~ (3.4) 整理得

$$e \sin \theta = (rv^2/\mu) \sin \beta \cos \beta \quad (3.5)$$

$$e \cos \theta = (rv^2/\mu) \cos^2 \beta - 1 \quad (3.6)$$

先将上两式相除,再将它们平方相加,代入初始状态

$$\tan \theta_0 = \frac{(r_0 v_0^2/\mu) \sin \beta_0 \cos \beta_0}{(r_0 v_0^2/\mu) \cos^2 \beta_0 - 1} \quad (3.7)$$

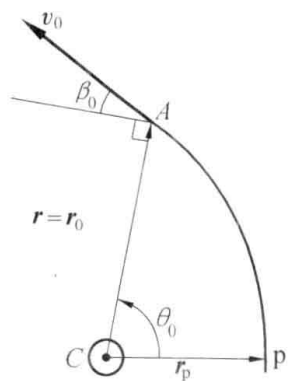


图 3.1 航天器的运动状态



$$e^2 = [(r_0 v_0^2 / \mu) - 1]^2 \cos^2 \beta_0 + \sin^2 \beta_0 \quad (3.8)$$

由上两式可以得到 θ_0 和 e , 换算成 p 和 e 便可得到由 v_0, r_0, β_0 确定的轨道方程了。轨道的半长轴 a 由能量方程得

$$a = \frac{r_0}{2 - r_0 v_0^2 / \mu} \quad (3.9)$$

$a > 0$, 为椭圆轨道; $a < 0$, 为双曲线轨道; $r_0 v_0^2 / \mu = 2$, 为抛物线轨道。

式(3.7)、(3.8)的应用分析

(1) 速度与水平面的夹角 β_0 的作用

$\beta_0 = 0$ 为建立圆轨道的必要条件, $\beta_0 \neq 0$, 则 $e > 0$ 为非圆轨道。

$\beta_0 = 0$, 且 $v_0 = \sqrt{\mu/r_0}$ 时, $e = 0$, 为圆轨道。

$\beta_0 = 0$, 且 $v_0 = \sqrt{2\mu/r_0}$ 时, $e = 1$, 为抛物线轨道。 $r_p = r_0$ 。

(2) 式(3.7)和式(3.8)为超越方程式, 当要求精度不高时, 可以采用图解方法。方程的图形表现为在 $(r_0 v_0^2 / \mu) - \beta$ 平面上的 e, θ 的两族曲线。图3.2为其椭圆轨道, 图3.3为其双曲线轨道。两个方程式实际上是对 $\beta, r_0 v_0^2 / \mu$ (无因次量), e 和 θ 四个量的两个约束, 若已知其中两个, 可在图中求得另外两个参数。

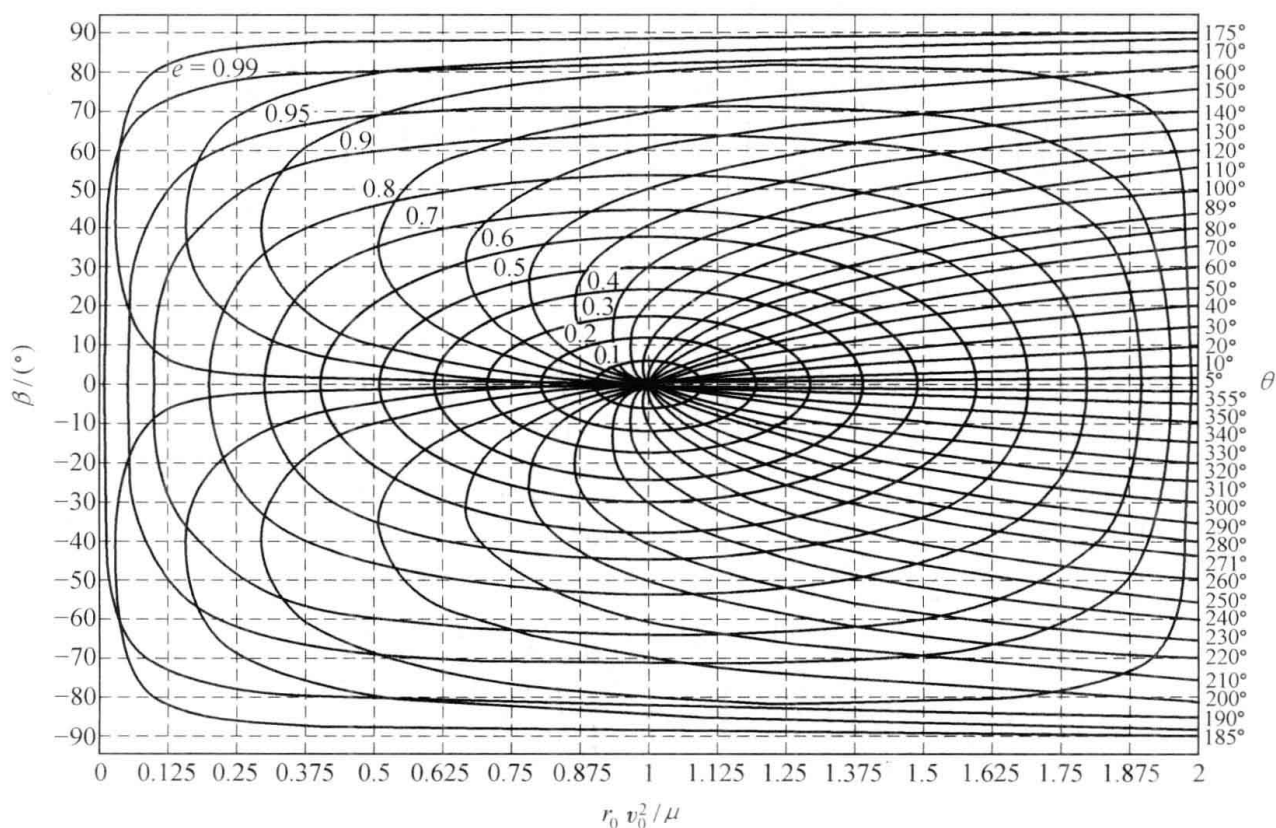


图 3.2 椭圆轨道以 e, θ 为参变量的 $(r_0 v_0^2 / \mu)$ 与 β 关系图

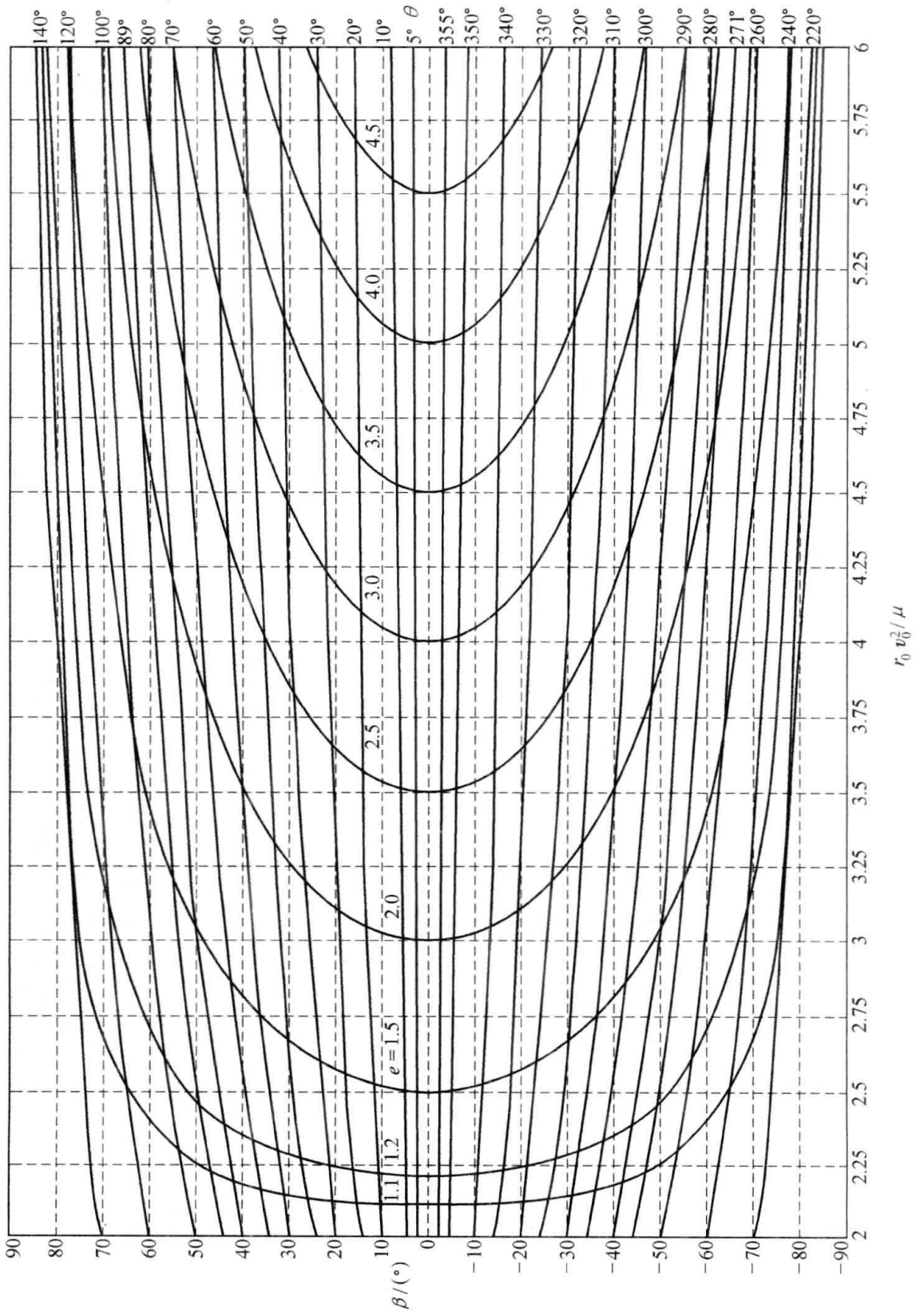


图 3.3 双曲线轨道以 e, θ 为参变量的 $(r_0 v_0^2 / \mu)$ 与 β 关系图



3.2 轨道要素与人轨参数

3.2.1 轨道要素

轨道要素又称轨道根数,通过它们可以确定轨道平面在空间的方位,轨道在轨道平面中的方位,轨道的形状和航天器在轨道上的位置。轨道要素共有六个,即轨道半长轴 a 、偏心率 e 、真近角 θ 、轨道倾角 (Inclination) i 、升交点 (或降交点) 经度 (Longitude of the Ascending (or Descending) Node) Ω 、近心点角距 (Argument of Perigee) ω , 见图 3.4。

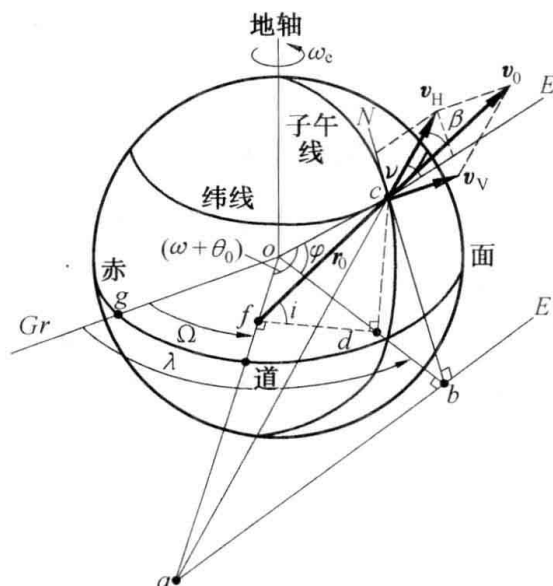


图 3.4 要素与参数的几何关系

轨道倾角: 轨道平面与地球赤道面的夹角。取轨道面法线 (按运行方向的右手定则确定) 与地球北天极之间的夹角度量, $0 \leq i \leq \pi$ 。

升交点经度: 地球零子午面与赤道交线到轨道面与赤道面交线 (升交点与降交点的连线——节线) 升交点方向的角度。升交点则是航天器自南半球飞向北半球时与赤道面的交点, 降交点反之, $0 \leq \Omega < 2\pi$ 。

近心点角距: 它是近心点矢径与节线升交点方向间的夹角, $0 \leq \omega < 2\pi$ 。

六个轨道要素中确定轨道形状和航天器在轨道上的位置的参数 a 、 e 和 θ 的初值可由航天器的运动状态 v_0 、 r_0 、 β_0 确定。而 i 、 Ω 和 ω , 则取决于发射入轨或机动变轨点的地理位置和速度 v_0 在空间的方向。

3.2.2 入轨参数

航天器的轨道一般在地心惯性坐标系中描述。坐标系的原点 O 位于地球的质心, OX 轴指



向历元平春分点, OZ 轴指向历元平北天极, OY 轴与它们构成右手系; 涉及地面位置时则采用常见的地心固连球面坐标系的坐标给出。坐标原点 O 位于地球的质心, 空间点到地心的距离为 r , r 的方位角为赤经 λ 和赤纬 φ 。

当运载器或星载变轨发动机关机时, 入轨参数除了航天器的位置矢量和速度矢量外, 还应包括入轨 / 变轨点 c 的地理位置: 经度 λ , 纬度 φ 。这样才能够确定航天器的轨道面的方位, 即另外的三个轨道要素: i , Ω 和 ω 。

速度的方位: 在入轨 / 变轨点 c 处的地平坐标系中航天器速度的纬角(地平纬度、地平高度)为 β , 即速度矢量与 c 点的当地水平面的夹角; 速度的经角为 ν , 即速度矢量与正东方向的夹角(偏北为正)。

入轨 / 变轨点的位置: 在地心固连球面坐标系中, c 点的坐标为 (r, λ, φ) , 即 c 点到地心的距离为 r , r 的方位角为经度 λ , 纬度 φ 。

3.2.3 轨道要素与入轨参数的几何关系

如图 3.4 所示, 过 c 点的天球上作 c 点的切面, 即当地水平面。该面与赤道面相交于 ab 直线, 为东西方向的。显然有 $ab \perp bc$ 和 $ab \perp ob$ 。 v_H, v_V 为入轨 / 变轨速度 v 的水平 and 铅垂分量。显然 v_H 在水平面内且与东向 E 成 ν 角, 其延长线交 ab 线于 a 点, 则 oac 三点所确定的平面就是轨道平面, oa 在节线上。过 c 点作赤道面的垂线交赤道面于 d , cd 在经度为 λ 的子午面内。过 cd 作垂直于 oa 的平面, 交 oa 于 f 。 cdf 三点所确定的平面同时垂直于赤道面和赤道面内直线 oa 。

轨道要素与入轨参数描述

c 点的经度 λ —— c 点所在子午圈与零子午圈的夹角, 为 $\angle bog$ 和 $\angle dog$;

c 点的纬度 φ —— oc 与赤道面的夹角, 为 $\angle cob$ 和 $\angle cod$;

轨道倾角 i ——平面 aoc 与赤道面的夹角, 为 $\angle cfd$;

升交点经度 Ω ——节线与格林尼治方向的夹角, 为 $\angle aog$ 和 $\angle fog$;

节线偏差角 $\Delta\lambda$ —— λ 子午面与节线的夹角, 为 $\angle aob$ 和 $\angle dof$, 等于 $(\lambda - \Omega)$;

纬度角 u ——位置矢量与节线的夹角, 为 $\angle cof$ 和 $\angle aoc$, 等于 $(\omega + \theta)$ 。

3.2.4 求解 Ω, i, ω

由 $\triangle abo$ 、 $\triangle abc$ 和 $\triangle bco$ 可以写出关系式

$$\tan \Delta\lambda = \frac{ab}{ob} \quad \tan \nu = \frac{cb}{ab} \quad \sin \varphi = \frac{cb}{ob}$$

将上三式化简得

$$\begin{aligned} \tan \Delta\lambda \cdot \tan \nu &= \sin \varphi \\ \tan \Delta\lambda &= \cot \nu \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.10)$$



($\nu = 0$ 时, 则 $\Delta\lambda = \pm \pi/2$)

则升交点经度为

$$\Omega = \begin{cases} \lambda - \Delta\lambda & (\nu < 0, \text{偏南}) \\ \lambda - \Delta\lambda + \pi & (\nu > 0, \text{偏北}) \end{cases} \quad (3.11)$$

由 $\triangle cdo$ 、 $\triangle cdf$ 和 $\triangle dfo$ 可以写出关系式

$$\tan \varphi = \frac{cd}{do} \quad \tan i = \frac{cd}{df} \quad \sin \Delta\lambda = \frac{df}{do}$$

则

$$\tan i = \frac{\tan \varphi}{\sin \Delta\lambda} = \sqrt{\tan^2 \varphi + \frac{\tan^2 \nu}{\cos^2 \varphi}} \geq \tan \varphi \quad (\nu = 0 \text{ 时等号成立}) \quad (3.12)$$

($\nu = \pm \pi/2, \Delta\lambda = 0$, 则 $i = \pi/2$)

$$i = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\tan \varphi}{\sin \Delta\lambda}\right) & \left(\frac{\tan \varphi}{\sin \Delta\lambda}\right) \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{\tan \varphi}{\sin \Delta\lambda}\right) & \left(\frac{\tan \varphi}{\sin \Delta\lambda}\right) < 0 \end{cases}$$

($0 \leq i \leq \pi$) ($-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$)

当 $0 \leq i < \pi/2$ 时, 航天器的轨道面与地球赤道面夹角锐角, 运行方向与地球自转方向相同, 称为顺行轨道(Prograde Orbit); 当 $\pi/2 < i \leq \pi$ 时, 航天器的轨道面与地球赤道面夹角钝角, 运行方向与地球自转方向相反, 称为逆行轨道(Retrograde Orbit); 当 $i = \pi/2$ 时, 航天器的轨道面与地球赤道面垂直, 称为极轨道(Polar Orbit)。

由 $\triangle cfo$ 、 $\triangle cdo$ 和 $\triangle cdf$ 可以有

$$\sin(\omega + \theta_0) = \frac{cf}{co} \quad \sin \varphi = \frac{cd}{co} \quad \sin i = \frac{cd}{cf}$$

将上三式化简得

$$\sin(\omega + \theta) = \frac{\sin \varphi}{\sin i} \quad (3.13)$$

$$\omega = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{\sin \varphi}{\sin i}\right) - \theta_0, & \nu \geq 0 \\ \pi + \arcsin\left(\frac{\sin \varphi}{\sin i}\right) - \theta_0, & \nu < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

特性分析

- (1) 当入轨点的纬度角为 φ 时, ν 越大, i 就越大;
- (2) 轨道倾角 i 或 $(\pi - i)$ 不小于 $|\varphi|$ ($\nu = 0, \pi$ 时相等)。若发射轨道倾角 i 或 $(\pi - i)$ 小于 $|\varphi|$ 的航天器, 即高纬度入轨时, 不能一次入轨。
- (3) 当 $\nu = \pm \pi/2$, 即向正北或正南发射, $i = \pi/2$, 为极轨道。



3.2.5 星历表计算

已知 t 时刻的六个轨道根数, 计算卫星在相应坐标系中的空间位置 \mathbf{r} 和速度 \mathbf{v} 表达式的工作叫星历表计算。

由定义和几何关系有

$$r \cos \theta = a(\cos \psi - e) \quad r \sin \theta = a \sqrt{1 - e^2} \sin \psi$$

轨道面坐标系中, $\mathbf{e}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{h}_0$ 为三个坐标轴的单位矢量。坐标系的原点为中心引力体质心, 基圈为轨道平面, 三个坐标轴的方向分别为偏心矢量方向(长轴)、正半焦弦方向和轨道面法线方向。

将 \mathbf{r}, \mathbf{v} 在轨道面坐标系中表示为

$$\mathbf{r} = a(\cos \psi - e)\mathbf{e}_0 + a \sqrt{1 - e^2} \sin \psi \mathbf{p}_0 \quad (3.15)$$

$$\mathbf{v} = -\frac{a^2 n}{r} \sin \psi \mathbf{e}_0 + \frac{a^2 n}{r} \sqrt{1 - e^2} \cos \psi \mathbf{p}_0 \quad (3.16)$$

而 $\mathbf{e}_0, \mathbf{p}_0$ 在惯性坐标系中的分量为

$$\mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i \\ \sin \omega \sin i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i \\ -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i \\ \cos \omega \sin i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

代入式(3.15), (3.16), 可以得到 t 时刻的星历表。

3.3 航天器的轨道确定

航天器轨道确定简称定轨, 又称为初轨计算, 就是根据实测数据来确定其两体问题意义下的轨道要素。最早的轨道确定问题在 300 多年前科学家观测彗星轨道时就涉及了。实际上, 航天器的轨道要素是随时间变化的, 不同时刻的观测数据对应不同的轨道。因此在二体问题基础上确定的某一时刻的轨道, 只是实际轨道的一个近似, 通常称它为初始轨道。轨道确定的任务就是应用少量的观测数据, 快速确定航天器一个初步的飞行轨道的过程。轨道确定不包括复杂的摄动计算, 这部分工作需要较多的观测数据, 称为轨道改进, 也称精密定轨。本节只研究轨道确定问题。

观测数据由于测站的多少(单一、多个)的不同、测量量的属性(位置、速度、角度)的差别, 相应地有不同的轨道确定方法。



3.3.1 两个时刻的位置矢量和速度矢量的关系

已知 t_0 时刻的航天器的位置矢量 \mathbf{r}_0 和速度矢量 \mathbf{v}_0 , 求运行到 t 时刻的位置矢量 \mathbf{r} 和速度矢量 \mathbf{v} 。设 t_0 时刻的偏近角为 ψ_0 , 将 \mathbf{r}_0 和 \mathbf{v}_0 代入式(3.15), (3.16) 得

$$\mathbf{r}_0 = a(\cos \psi_0 - e)\mathbf{e}_0 + \sqrt{ap}\sin \psi_0\mathbf{p}_0$$

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{\sqrt{\mu a}}{r_0}\sin \psi_0\mathbf{e}_0 + \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0}\cos \psi_0\mathbf{p}_0$$

求解得

$$\mathbf{e}_0 = \frac{\cos \psi_0}{r_0}\mathbf{r}_0 - \sqrt{\frac{a}{\mu}}\sin \psi_0\mathbf{v}_0 \quad (3.17)$$

$$\mathbf{p}_0 = \sqrt{\frac{a}{p}}\frac{\sin \psi_0}{r_0}\mathbf{r}_0 + \frac{a}{\sqrt{\mu p}}(\cos \psi_0 - e)\dot{\mathbf{r}}_0 \quad (3.18)$$

代入式(3.15), (3.16) 得

$$\mathbf{r} = \frac{a}{r_0}[\cos(\psi - \psi_0) - e\cos \psi_0]\mathbf{r}_0 + \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}[\sin(\psi - \psi_0) - e(\sin \psi - \sin \psi_0)]\mathbf{v}_0 \quad (3.19)$$

$$\mathbf{v} = -\frac{\sqrt{\mu a}}{rr_0}\sin(\psi - \psi_0)\mathbf{r}_0 + \frac{a}{r}[\cos(\psi - \psi_0) - e\cos \psi]\mathbf{v}_0 \quad (3.20)$$

由 $e\cos \psi_0 = 1 - r_0/a$, $e\sin \psi_0 = \mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0 / \sqrt{\mu a}$, ψ_0 可以唯一确定。

由开普勒时间方程 $\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_0) = (\psi - \psi_0) - e(\sin \psi - \sin \psi_0)$ 可以解得 ψ 。

3.3.2 由 \mathbf{r}, \mathbf{v} 确定轨道根数

已知某时刻 t 的航天器在地球惯性坐标系中的位置矢量 \mathbf{r} 和速度矢量 \mathbf{v} 值, 计算其轨道根数的轨道确定方法步骤如下。

(1) i, Ω 的计算

由定义

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = h_x\mathbf{i} + h_y\mathbf{j} + h_z\mathbf{k} \quad (3.21)$$

$$h = |\mathbf{h}| = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}$$

从轨道坐标系到惯性坐标系的变换, 有

$$[h_x \quad h_y \quad h_z]^T = [h \sin \Omega \sin i \quad -h \cos \Omega \sin i \quad h \cos i]^T$$

$$\cos i = h_z/h \quad (3.22)$$

$$\tan \Omega = h_x/(-h_y) \quad (3.23)$$



(2) \mathbf{e} 的计算

由式(3.13)得

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{v} \times \mathbf{h}) - \frac{\mathbf{r}}{r} = e_x \mathbf{i} + e_y \mathbf{j} + e_z \mathbf{k} \quad (3.24)$$

$$e = |\mathbf{e}| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}$$

(3) ω 的计算

$$\tan \omega = \frac{e_z}{(e_y \sin \Omega + e_x \cos \Omega) \sin i} \quad (3.25)$$

(4) a, θ 的计算

$$a = p/(1 - e^2) = h^2/\mu(1 - e^2) \quad (3.26)$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}}{re} \quad (3.27)$$

或者

$$\tan(\omega + \theta) = \frac{r_z}{(r_y \sin \Omega + r_x \cos \Omega) \sin i} \quad (3.28)$$

3.3.3 由 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 和飞行时间确定轨道根数

已知在 t_1, t_2 时刻航天器在轨道上的位置矢量 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, 求解轨道要素。这是经典的高斯问题, 由两个定点和一个飞行时间来确定航天器轨道的方法是非常重要的轨道应用。高斯问题有很多解法, 最一般的解法则是通过建立 \mathbf{r}_1 与 \mathbf{r}_2 的关系, 求解出某个点的 \mathbf{r}, \mathbf{v} , 进而转化为上述的 \mathbf{r}, \mathbf{v} 定轨方法。

(1) $F - G$ 函数

在 \mathbf{r}_0 处按照 $\tau = (t - t_0)$ 将 \mathbf{r} 用泰勒级数展开, 因 \mathbf{r}, \mathbf{v} 共面, \mathbf{r} 亦可表示为 $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$ 的线性组合。

$$\mathbf{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n \mathbf{r}}{dt^n} \right)_{t_0} \tau^n = F(r_0, v_0, \tau) \mathbf{r}_0 + G(r_0, v_0, \tau) \mathbf{v}_0 \quad (3.29)$$

因为 \mathbf{r} 描述的是轨道运动, 故有

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}$$

则

$$\frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3} = 3 \frac{\mu}{r^4} \dot{r} \mathbf{r} - \frac{\mu}{r^3} \dot{\mathbf{r}}$$

$$\frac{d^4 \mathbf{r}}{dt^4} = -\frac{\mu}{r^4} (12 \frac{\dot{r}^2}{r} - 3\ddot{r} - \frac{\mu}{r^2}) \mathbf{r} + 6 \frac{\mu}{r^4} \dot{r} \dot{\mathbf{r}}$$

而 $\dot{r} = \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r}$, 求导得 $\ddot{r} = \frac{1}{r} (v^2 - \dot{r}^2) - \frac{\mu}{r^2}$, 代入 $\frac{d^4 \mathbf{r}}{dt^4}$ 有



$$\frac{d^4 \mathbf{r}}{dt^4} = -\frac{\mu}{r^5} (15\dot{r}^2 - 3v^2 + 2\frac{\mu}{r}) \mathbf{r} + 6\frac{\mu}{r^4} \dot{r} \mathbf{v} \quad (3.30)$$

\mathbf{r} 更高阶的导数形式与上式类似,均可以表示成 \mathbf{r}, \mathbf{v} 的函数,可以由数值算法给出。因而有

$$F(r_0, v_0, \tau) = 1 - \frac{1}{2} \frac{\mu}{r_0^3} \tau^2 + \frac{1}{2} \frac{\mu}{r_0^4} \dot{r}_0 \tau^3 - \frac{1}{24} \frac{\mu^2}{r_0^6} \left[2 - 3 \frac{r_0}{\mu} (v_0^2 - 5\dot{r}_0^2) \right] \tau^4 + \dots \quad (3.31)$$

$$G(r_0, v_0, \tau) = \tau - \frac{1}{6} \frac{\mu}{r_0^3} \tau^3 + \frac{1}{4} \frac{\mu}{r_0^4} \dot{r}_0 \tau^4 - \frac{1}{120} \frac{\mu^2}{r_0^6} \left[8 - 3 \frac{r_0}{\mu} (3v_0^2 - 15\dot{r}_0^2) \right] \tau^5 + \dots \quad (3.32)$$

F, G 函数满足 $F \cdot (dG/dt) - G \cdot (dF/dt) = 1$, 可供校验使用。

F 和 G 函数既可以用来进行轨道确定和预报,也可以用来解决轨道交会问题。其最大优点是它的普遍性,即可适用于所有类型的圆锥曲线。

(2) 高斯问题的 $F - G$ 函数解

若两次测量间的时间间隔不大,可以用 F, G 函数来解高斯问题。这一方法的优点是没有其他方法中出现的象限不确定性。已知时刻 t_1 和 t_2 的位置 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 , 则 \mathbf{v}_1 可以由式

$$\mathbf{r}_2 = F(r_1, v_1, \tau) \mathbf{r}_1 + G(r_1, v_1, \tau) \mathbf{v}_1 \quad (3.33)$$

$$\text{得} \quad \mathbf{v}_1 = [\mathbf{r}_2 - F(r_1, v_1, \tau) \mathbf{r}_1] / G(r_1, v_1, \tau) \quad (3.34)$$

式中, $\tau = t_2 - t_1$ 。

先假定一个 \mathbf{v}_1 值,则可计算出 F, G , 然后可用上式得到一个新的 \mathbf{v}_1 , 继续计算新的 F, G , 循环迭代下去直至 \mathbf{v}_1 满足精度要求时停止。 τ 不太大时迭代收敛得很快,再由 $\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1$ 计算轨道要素。

3.3.4 由 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ 的方位定轨

光学观测设备可以给出精确的航天器或天体的方位信息。在没有速度信息的情况下,通过3次轨道观测值亦可确定轨道。3个方位测量定轨方法亦称为拉普拉斯问题。

在地心赤道坐标系中,测站位置 (R, λ, φ) , 航天器 S 的测角为 A, B (方位角与俯仰角), 如图3.5所示。已知 $t_j, A_j, B_j (j = 1, 2, 3)$, 求解航天器 S 的轨道要素。

几何关系:

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{R}_j + \boldsymbol{\rho}_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.35)$$

观测矢量:

$$\boldsymbol{\rho}_j = \rho_j \boldsymbol{\rho}_{j0} \quad (j = 1, 2, 3)$$

而

$$\boldsymbol{\rho}_{j0} = [u_j \quad v_j \quad w_j]^T = [\cos B_j \cos A_j \quad \cos B_j \sin A_j \quad \sin B_j]^T$$

测站矢量:

$$\mathbf{R}_j = [X_j \quad Y_j \quad Z_j]^T \quad (\text{测站可以是 } 1 \sim 3 \text{ 个})$$

利用方程(3.35)的 z 分量消除 ρ_j , 得

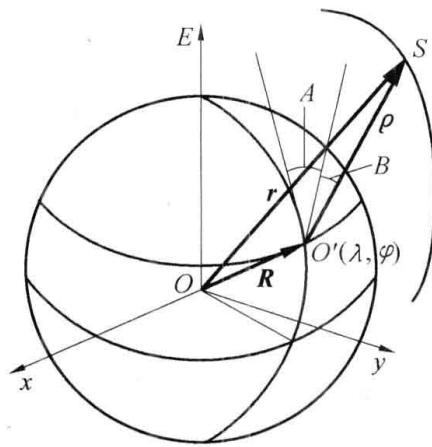


图 3.5 航天器的方位

$$\begin{cases} w_j x_j - u_j z_j = P_j \\ w_j y_j - v_j z_j = Q_j \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.36)$$

其中

$$\begin{cases} P_j = w_j X_j - u_j Z_j \\ Q_j = w_j Y_j - v_j Z_j \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3)$$

该方程组有 9 个未知数, 3 次观测 6 个测值, 还需要两体运动的方程式 $\ddot{\mathbf{r}}_j = (-\mu/r^3)\mathbf{r}_j$, 动力学方程为二阶矢量微分方程, 不易处理, 通常采用其他形式的表达式。

改进的拉普拉斯方法

设 t_0 为 t_1 到 t_3 间的某一时刻, 则观测段航天器的位置 \mathbf{r} 可以由 \mathbf{r}_0 和 $\dot{\mathbf{r}}_0$ 确定。应用 \mathbf{r} 的 $F - G$ 函数表达式为

$$\mathbf{r} = F\mathbf{r}_0 + G\dot{\mathbf{r}}_0$$

$$\mathbf{r}_j = f_j \mathbf{r}_0 + g_j \dot{\mathbf{r}}_0 = [f_j x_0 + g_j \dot{x}_0 \quad f_j y_0 + g_j \dot{y}_0 \quad f_j z_0 + g_j \dot{z}_0] [\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}]^T \quad (j = 1, 2, 3)$$

将上式代入式(3.36), 得

$$\begin{cases} (w_j f_j) x_0 - (u_j f_j) z_0 + (w_j g_j) \dot{x}_0 - (u_j g_j) \dot{z}_0 = P_j \\ (w_j f_j) y_0 - (v_j f_j) z_0 + (w_j g_j) \dot{y}_0 - (v_j g_j) \dot{z}_0 = Q_j \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.37)$$

迭代求解: 给定初始 $\mathbf{r}_0(x_0 \ y_0 \ z_0)$, $\mathbf{v}_0(\dot{x}_0 \ \dot{y}_0 \ \dot{z}_0)$, 计算 f_j, g_j , 解式(3.36) 和式(3.37), 然后用解得的新的 $\mathbf{r}_0(x_0 \ y_0 \ z_0)$, $\mathbf{v}_0(\dot{x}_0 \ \dot{y}_0 \ \dot{z}_0)$ 计算 f_j, g_j , 再解式(3.36) 和式(3.37), 至 $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$ 满足精度要求。用获得 $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$ 可以得到轨道根数。

3.4 星下点轨迹

星下点是指航天器与地心连线和地面的交点, 星下点轨迹则是航天器的运动使星下点在地面形成的连续曲线。

如果把图 3.4 中的 c 点视为航天器在任意时刻的位置, 该图还可以用来计算星下点轨迹。如令地球在某时刻为静止的, 此时星下点位置为 (λ, φ) 。从 $\triangle cfo$, $\triangle cdf$ 和 $\triangle ofd$, 可写出



$$\tan(\omega + \theta) = \frac{cf}{fo} \quad \cos i = \frac{df}{cf} \quad \tan(\lambda - \Omega) = \frac{df}{fo}$$

$$\tan(\lambda - \Omega) = \cos i \cdot \tan(\omega + \theta)$$

$$\text{即} \quad \lambda = \arctan[\cos i \tan(\omega + \theta)] + \Omega \quad (3.38)$$

由(3.13)可得

$$\varphi = \arcsin[\sin i \sin(\omega + \theta)] \quad (3.39)$$

应用式(3.38), (3.39), 只要知道了 i, ω, Ω 和航天器的真近角 θ , 求出该时刻航天器星下点对应的经度 λ 和纬度 φ 。

然而, 当考虑地球自传时, Ω 将发生变化。设 t_p^* 时刻(如入轨点或某计算点)对应的升交点经度为 Ω^* , 其后任意时刻 t_p (恒星时), 升交点经度应是

$$\Omega = \Omega^* - \omega_e(t_p - t_p^*) \quad (3.40)$$

其中, ω_e 是地球自转角速度, 一般取为每恒星日转一圈($15^\circ/\text{恒星时}$)。所以式(3.38)将被修正为

$$\lambda = \arctan[\cos i \tan(\omega + \theta)] + \Omega^* - \omega_e(t_p - t_p^*) \quad (3.41)$$

其中 t_p 为

$$t_p = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (\psi - e \sin \psi) \quad (3.42)$$

而

$$\psi = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2}\right) \quad (3.43)$$

回归轨道与准回归轨道

卫星连续两次通过升交点称为卫星运行一圈。以恒星时为时间单位, 卫星轨道周期为 T 小时, 由于地球旋转使升交点西移 $15 T(^\circ)/\text{h}$ 。设存在互质数 D 和 N , 且 $360D = 15TN$, 即 $T = 24D/N$ 。

N 和 D 分别为实现星下点轨迹重复所需的最少圈数和恒星日数。

$D = 1$ 时, 称为回归轨道(Recursive Orbit); $D > 1$ 时, 星下点轨迹间隔 D 恒星日后重复, 称为准回归轨道。

星下点轨迹的特性

星下点附近一定宽度内的区域都是可观测区(由航天器上观察地面的区域和地上可以观测卫星的地域)。公式分析表明, 星下点轨迹可达到的南北半球的极限范围是纬度 φ 等于航天器的轨道倾角 i (或 $\pi - i$)。对于顺行轨道, 航天器的星下点轨迹有时是从西南向东北, 有时又是从西北向东南; 而对于逆行轨道则是为自东南向西北和自东北飞向西南的星下点轨迹。如果航天器的角速度变化较大时, 星下点轨迹(顺行轨道)的方向将不都是自西向东的走向了, 局部会因为相对转速小于地球的自转速度, 产生自东向西走向的星下点轨迹。

图 3.6 给出了在倾角为 60° , 周期为 3 h 的圆轨道上运行的航天器的星下点轨迹。如果地球



不旋转,其星下点轨迹为图上的虚线所示。而地球每小时自西向东转过 15° ,当航天器飞行一周回到起点时,地球已向东转过 45° ,相当于星下点向西移动了相同的距离,所以曲线 c 变成了实线 1,以后卫星每转一周星下点都向西平移 45° ,如图中 2、3、4 等曲线,直至第八周之后,地球已转过 $45 \times 8 = 360^\circ$,星下点轨迹又从曲线 1 重复扫描。 $D = 1, N = 8$ 。

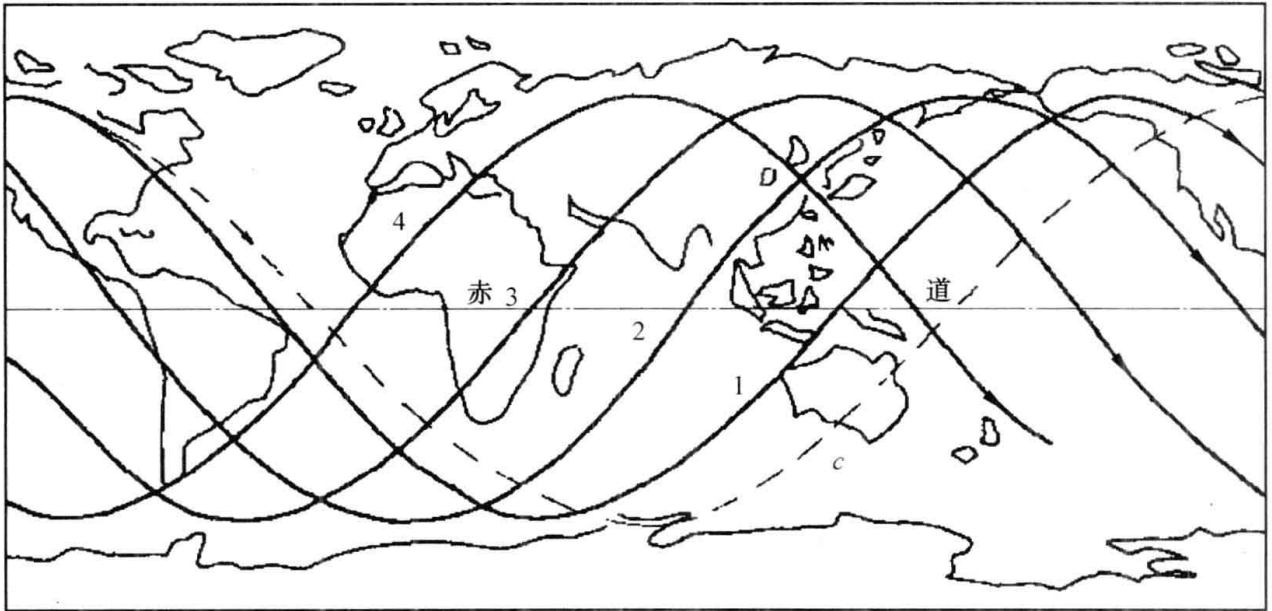


图 3.6 倾角为 60° 圆轨道的星下点轨迹

图 3.7 是一个轨道倾角为 63.4° 的大椭圆轨道航天器的星下点轨迹,轨道的远地点高度为 $40\,000\text{ km}$,在北半球,近地点高为 500 km ,在南半球,运行周期为 12 h 。它的星下点轨迹由两段

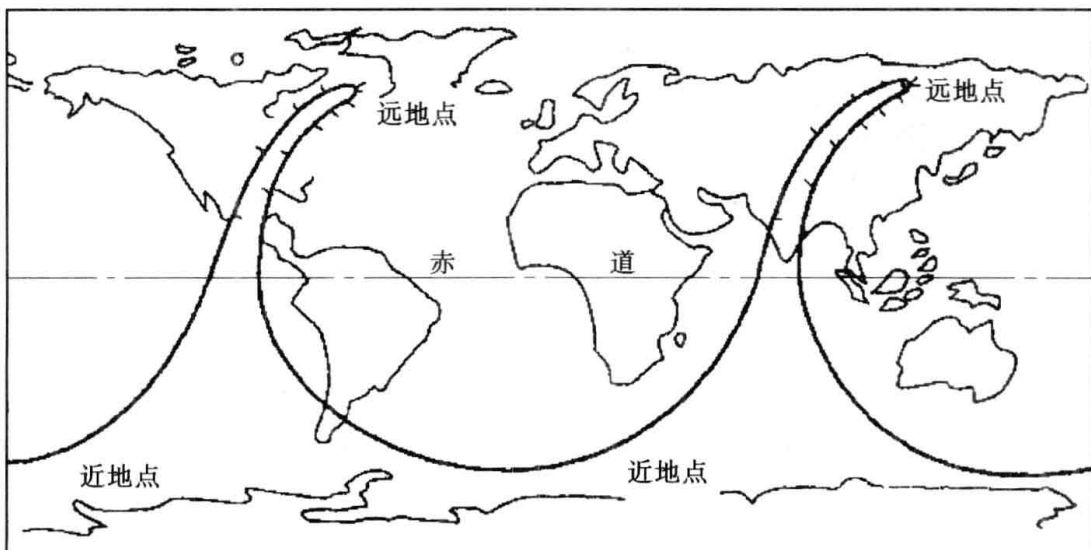


图 3.7 周期为 12 h 的大椭圆轨道的星下点轨迹



相同的曲线组成,这是由于地球旋转一周,航天器恰好飞行两圈的缘故。星下点轨迹上的标点
是时间刻度,每两点之间卫星要运行一小时,可见卫星运行的绝大部分时间是停留在北半球。
在北半球高纬度地区的航天应用比较便利,特别是有多颗按时间均布的共轨航天器时。 $D =$
 $1, N = 2$ 。

对于轨道倾角为零,即轨道平面与赤道平面重合的赤道轨道航天器,如果轨道周期为 24
h(相当于轨道高度 35 800 km),则其环绕地球飞行的角速度将与地球自转角速度相同,其星下
点会一直处于赤道上某处,相对地球静止。这种轨道的航天器又称地球同步(或静止)卫星,其
用途十分广阔。如果同步轨道倾角产生误差,为某一不为零的小角度,而其他参数准确时,则星
下点轨迹变成如图 3.8 所示的了(图中为了清晰表达,没有按比例绘图)。星下点每天以定轨点
为中心南北振荡一次,振幅为倾角误差 i 。

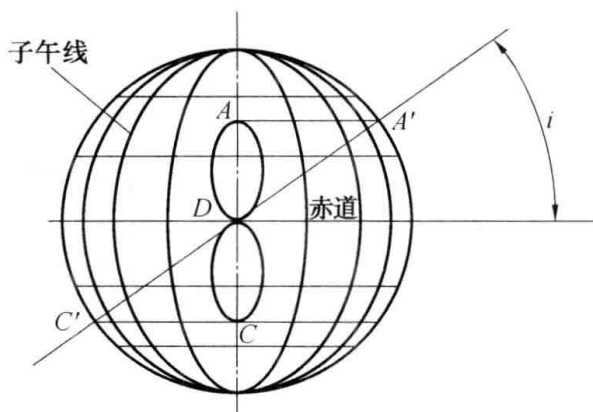


图 3.8 倾角有误差的同步轨道

3.5 弹道导弹的射程

远程弹道式导弹,大部分时间是在稠密大气层以外飞行的,可以作为航天器利用式(3.7)
和式(3.8)近似计算它的弹道——一段不完整的椭圆轨道。弹道平面为由发射点、弹着点和地
心三点确定的平面,发射点、弹着点之间的中心角为 Φ ,等价于弹道导弹的射程。发射点、弹着
点关于椭圆轨道长轴对称,发射点的近心角为 θ_0 (见图 3.9),根据式(3.7),式(3.8)算出所需的
 β_0, v_0 ,就可以实现使导弹从发射点飞至弹着点。当然还可以算出偏心率和远地点高度等其他弹
道参数。由弹道的对称性,故有 $\Phi/2 = 180^\circ - \theta_0$ 或 $\tan \theta_0 = -\tan(\Phi/2)$,由式(3.7)可得 β_0 。

$$\tan \frac{\theta_0}{2} = \frac{(r_0 v_0^2 / \mu) \sin \beta_0 \cos \beta_0}{(r_0 v_0^2 / \mu) \cos^2 \beta_0 - 1} \quad (3.44)$$

由式(3.8)可得 e

$$e^2 = [(r_0 v_0^2 / \mu) - 1]^2 \cos^2 \beta_0 + \sin^2 \beta_0 \quad (3.45)$$

给定 Φ 和 e 即可求得所需的 β_0 和 v_0 。不同的 e 将对应不同的弹道高度和飞行时间,当导弹运载



末级关机速度为定值时, 亦可通过调整弹道高度(改变 e) 达到使导弹保持射程不变。

弹道导弹通常关心的是以一定的末速度 v_0 使射程 Φ 为最大值。对式(3.44) 求导数, 求解其极值点, 即

$$\cos\beta_0 = \sqrt{\frac{1}{2 - (R_{\oplus} v_0^2/\mu)}} \quad (3.46)$$

由式(3.44) 计算的 Φ 与 β_0 的曲线和由式(3.46) 计算的 β_0 最佳的曲线见图 3.10。

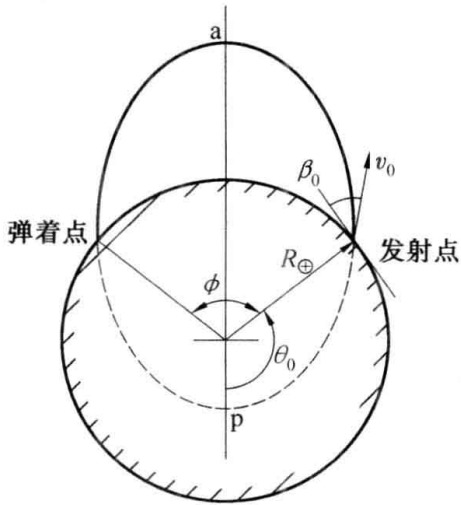


图 3.9 弹道导弹的弹道

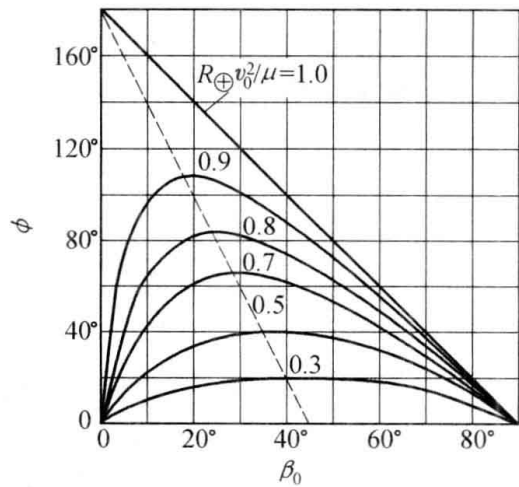


图 3.10 β_0 与 Φ 的关系

把 $\theta_0 = 180^\circ - \Phi/2$ 及 $r = R_{\oplus}$ 代入轨道方程式可求得 p , 即

$$p = R_{\oplus} (1 + e \cos(180^\circ - \Phi/2))$$

再用 p 与 a 的关系式求得

$$\frac{a}{R_{\oplus}} = \frac{1 - e \cos \frac{\varphi}{2}}{1 - e^2} \quad (3.47)$$

导弹从发射点到弹着点的飞行时间 T_m 可以按椭圆轨道运行一周的时间减去 2 倍的从近地点 p 至发射点的时间(见图 3.9) 计算。据此, 应用式(3.38) 和式(3.37) 得

$$T_m = 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left[\pi - 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{e \sqrt{1-e^2} \sin \theta_0}{1 + e \cos \theta_0} \right] \quad (3.48)$$

第 4 章 航天器的轨道机动

轨道机动——航天器主动改变原来轨道的运动状态的过程,或者是改变原来两体意义下轨道的根数的过程。根据任务的要求,航天器轨道需要进行一次性或连续不断的改变,即在轨道控制系统的控制下应用航天器自身的动力系统或者借助外力从旧轨道变成新轨道的过程。因为任务的千差万别、机动动力的大小不一、机动时间的长短不同,轨道机动亦有多种多样的类型。

轨道机动从动力学角度可以分为:(1) 轨道过渡机动,又称变轨,这是改变轨道参数以便从初始轨道过渡到中间轨道或最终轨道的过程。相当于以旧的轨道为基础,建立新的轨道;(2) 轨道修正机动,又称轨道修正,其目的是修正轨道参数中的误差或由各类干扰因素引起的偏差,它与轨道过渡的不同点在于它不过渡到其他轨道上去,相当于修旧如旧;(3) 接近机动,这是两航天器在接近和对接过程中以控制相对运动为目的的轨道机动,需要同时考虑一个以上的航天器。本章是研究第一种机动,即轨道过渡机动的特性及实现。

如果按照不同的准则去分,航天器的轨道机动可以有更多的类型的分类,如表 4.1 所列。以动力学特征分类,自主动力轨道机动就是利用航天器上的星载发动机产生的冲量机动。根据发动机工作时间的长短还可分为脉冲机动和连续作用机动。脉冲机动就是发动机短时工作情况下的轨道机动,由于发动机工作的时间比轨道飞行周期短得多,因而可以视为是脉冲作用;连续作用机动又称小推力机动,与前者相比,连续作用机动过程中推力比一般火箭发动机小很多,作用时间也长很多。例如电火箭发动机、太阳帆等,其推力只有千分之几牛至数牛,其工作时间与过渡时间可长达数年。外力机动的动力则是来自航天器之外的其他力,如大气和其他天体引力等。需要对航天器的运动状态进行控制以达到合理利用外作用力的目的。

表 4.1 轨道机动的分类

分类准则	轨道机动分类				
新、旧轨道面的关系	同平面过渡			异平面过渡	
新、旧轨道的形状	圆、椭圆、抛物线、双曲线同类轨道之间的过渡			圆、椭圆、抛物线、双曲线轨道之间的过渡	
所需的动力源	自主动力机动			外力动力机动	
	脉冲机动		连续作用机动		气动力
	单脉冲	多脉冲	小推力火箭		
					光辐射



4.1 单脉冲机动

当作用力的作用时间与航天器的运动过程相比甚小,在力作用期间航天器的位置改变量 Δr 与其至中心星体的距离 r 相比可以忽略时,则可将作用力视为脉冲——原地、瞬间发生速度改变 Δv 。 Δv 相当于航天器单位质量上作用力瞬时产生的冲量值。

单脉冲机动——以单个脉冲的作用,改变轨道上运动的航天器的速度(大小、方向),使其轨道发生改变的过程。

4.1.1 同平面单脉冲机动

轨道机动的实质就是重新建立轨道,轨道建立所得公式也适用于轨道机动的计算,计算新的 v, β , 进而得到所需的轨道面内的速度脉冲 Δv 。

重写式(3.7), (3.8) 和(3.9), 略去下标, 则有

$$\tan \theta = \frac{\left(\frac{rv^2}{\mu}\right) \sin \beta \cos \beta}{\left(\frac{rv^2}{\mu}\right) \cos^2 \beta - 1} \quad (4.1)$$

$$e^2 = (rv^2/\mu - 1)^2 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \quad (4.2)$$

$$a = \frac{r}{2 - rv^2/\mu} \quad (4.3)$$

通常是给出新、旧轨道的形状参数和变轨点(对于单脉冲机动,必然是两轨道的交点)的位置。根据新轨道的要求计算变轨点的 v, β , 然后得到所需的变轨速度脉冲 Δv 。

如图4.1, 已知旧轨道(1)的参数为 (a_1, e_1) , 新轨道(2)的参数为 (a_2, e_2) , 变轨点 S 在两个轨道上的真近角分别为 θ_1 和 θ_2 。当不需要改变轨道长轴方向时, 有 $\theta_1 = \theta_2$ 。变轨点的位置也可以直接给出 $r_1 = r_2 = r$ 来, 由于圆锥曲线的对称性, 需要指出是哪一个 r 。

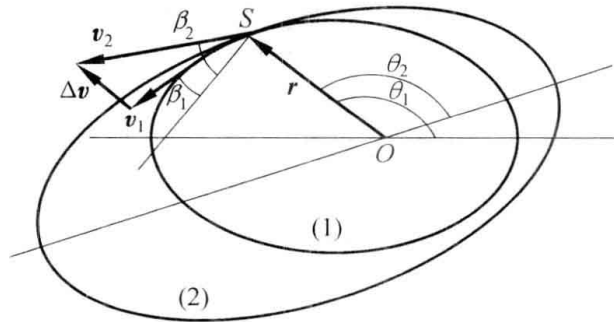


图 4.1 同平面单脉冲机动



由式(4.3)可以直接解得变轨点 S 处的速度 v_1, v_2 , 再由式(4.1) 和式(4.2) 解得 β_1 和 β_2 , 多解时根据题意去掉不合理的解。由余弦定理, 变轨所需速度脉冲 Δv 为

$$\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos(\beta_2 - \beta_1)} \quad (4.4)$$

而 Δv 与 v_1 的夹角 α 为

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{v_1^2 + \Delta v^2 - v_2^2}{2v_1\Delta v} \quad (4.5)$$

对于轨道修正的脉冲机动, 由于脉冲幅值较小, 可以利用对式(4.2) 和式(4.3) 的微分求得 Δv 与 $\Delta a, \Delta e$ 的关系式, 直接得到脉冲机动对 a, e 的作用效果。

4.1.2 异面轨道间的单脉冲机动

当新、旧两轨道不共面时, 两轨道平面必有一过引力中心的交线(图 4.2), 则实现单脉冲轨道机动的作用点只能出现在交线上、引力中心两侧的地方——轨道交点。若新、旧两轨道形状不变, 只改变轨道面的方向, 则可以以单脉冲的方式完成轨道面转向的机动。

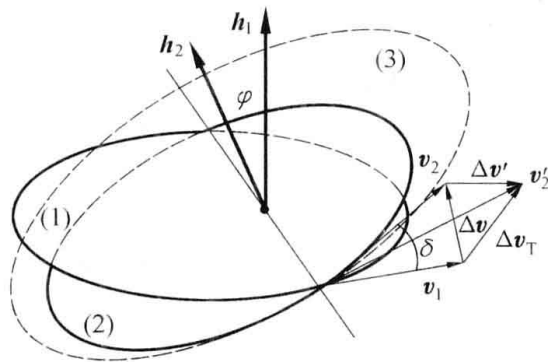


图 4.2 轨道面的过渡

设旧轨道(1) 与新轨道(2) 间的夹角为 φ , 则变轨速度脉冲应该在两轨道交点处将航天器的速度由 v_1 改变成为 v_2 , 因为 $|v_1| = |v_2| = v$, v_1 与 v_2 的夹角为 δ , $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ 。所需的速度脉冲增量应是

$$\Delta v = v_2 - v_1 \quad (4.6)$$

因
$$\sin \frac{\delta}{2} = \cos \beta \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \quad (4.7)$$

$$\Delta v = 2v \sin \frac{\delta}{2} = 2v \cos \beta \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \quad (4.8)$$

转角
$$\alpha = 90^\circ + \frac{\delta}{2} \quad (4.9)$$



由式(4.8)易知,正比于 $v_1 \cos \beta$ ——水平速度,从节能的角度考虑,变轨应在水平速度最小的点进行,在交线上则应该选择航天器与中心星体距离远的点。因 $h = r v \cos \beta = \text{const}$,则 r 最大时, $v \cos \beta$ 最小。

改变轨道面后,若在变轨点存在可以改变轨道形状的脉冲 $\Delta v'$,则可以使用 $\Delta v_T = \Delta v + \Delta v'$ 一次脉冲完成,称为复合机动,见图 4.2 中的虚线轨道(3)。

当轨道 r_c 为半径较小的圆轨道,且 φ 较大时, Δv 也很大,此时可采用三个单脉冲法改变轨道面以节省能量,如图 4.3。先由 Δv_1 把轨道变为椭圆轨道 E_1 ,在远心点 r_a , Δv_2 将椭圆轨道绕长轴转过 φ ,当航天器沿椭圆轨道 E_2 返回近心点时,再由 Δv_3 将轨道变为圆轨道,则 $\Delta v_\Sigma = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3$,若有 $\Delta v_\Sigma \leq 2v_c \sin(\varphi/2)$,则需 $\varphi > 38.94^\circ$,极值条件为

$$\bar{r} = (2\bar{r} + 1)\sin(\varphi/2) \quad \bar{r} = r_a/r_c$$

单脉冲与三脉冲机动的能耗与转角之间的关系见图 4.4。

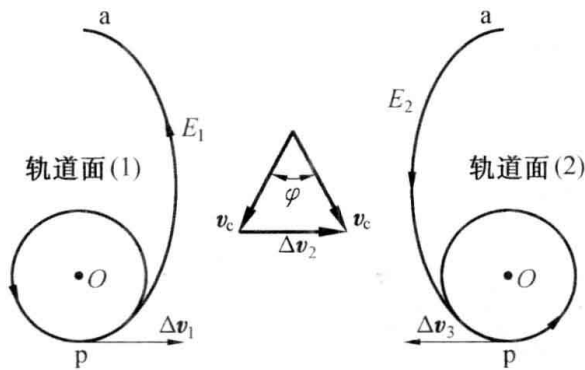


图 4.3 单脉冲机动与三脉冲机动

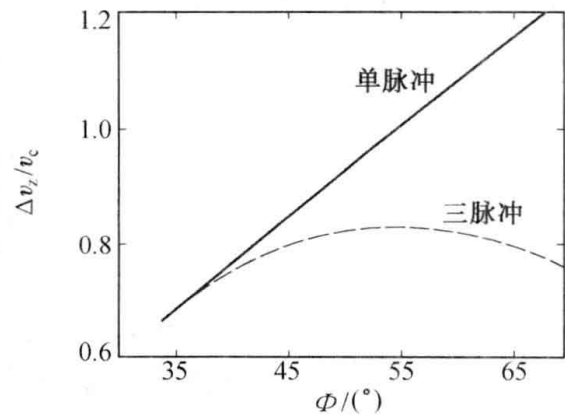


图 4.4 脉冲能耗图

4.1.3 脉冲机动的能量消耗

由齐奥尔科夫斯基公式(见附录 A4)

$$v_k = w \ln(m_0/m_k)$$

取 $\Delta v = v_k, m_0 = m_k + \Delta m$

$$\Delta v = w \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \Delta m}\right)$$

或

$$\Delta m = m_0(1 - e^{-\frac{\Delta v}{w}}) \tag{4.10}$$

式(4.10)表明, Δv 越大, Δm 就越大。



4.2 同平面的轨道过渡

4.2.1 霍曼过渡

在同一轨道平面中,两不相交轨道之间的过渡,由于新、旧轨道不相交,轨道过渡需由一个以上的速度脉冲来实现。而两圆轨道间的过渡最为简单,因霍曼(Hohmann)提出了这种过渡的最佳方案,故称同平面两圆轨道间的能量最佳的过渡为 Hohmann 过渡。

霍曼过渡轨道是一条外切于小圆轨道,内切于大圆轨道的椭圆轨道。由两次脉冲来实现,如图 4.5 所示。过渡轨道的参数为

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} \quad (4.11)$$

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (4.12)$$

$$v_p = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r_p} \frac{2r_a}{r_a + r_p}} > \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} = v_1 \quad (4.13)$$

$$v_a = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r_a} \frac{2r_p}{r_a + r_p}} < \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} = v_2 \quad (4.14)$$

v_1, v_2 分别是航天器在半径为 r_p, r_a 圆轨道上运行时的速度。

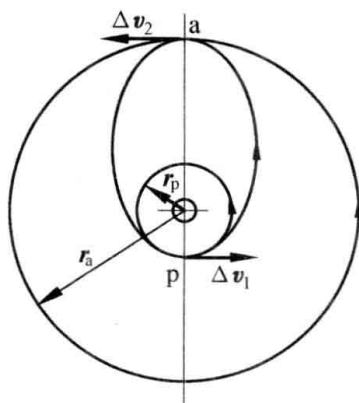


图 4.5 霍曼过渡

机动的两个脉冲的大小为

$$\Delta v_1 = v_p - v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \left(\sqrt{\frac{2r_a}{r_a + r_p}} - 1 \right) \quad (4.15)$$

$$\Delta v_2 = v_2 - v_a = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_p}{r_a + r_p}} \right) \quad (4.16)$$

总的速度增量是



$$\Delta v_T = \Delta v_1 + \Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \left[\sqrt{\frac{2r_a}{r_a + r_p}} \left(1 - \frac{r_p}{r_a} \right) + \sqrt{\frac{r_p}{r_a} - 1} \right] \quad (4.17)$$

霍曼过渡总能量是否为两圆轨道间最小? 现证明如下。如图 4.6, 一条与小圆轨道非相切的椭圆过渡轨道, 其远心点 a 还是与大圆相切的。设椭圆过渡轨道与小圆轨道交于 b 点, 从小圆轨道变为椭圆过渡轨道的速度脉冲为 Δv_1^* , 不与小圆轨道相切。过渡椭圆轨道在 b 点的速度 v_b 的径向分量为 v_r , 横向分量为 v_θ 。小圆轨道的速度为 v_p , 由图示的几何关系得

$$\Delta v_1^{*2} = v_r^2 + (v_\theta - v_p)^2$$

其中, $v_\theta = h/r_p$, $v_p = \sqrt{\mu/r_p}$ 。上式为

$$\Delta v_1^{*2} = v_r^2 + \left(\frac{h}{r_p} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \right)^2 \quad (4.18)$$

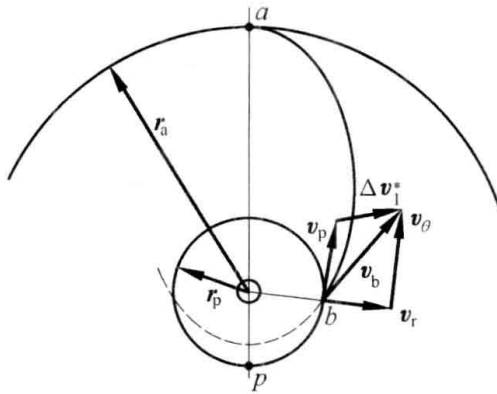


图 4.6 霍曼过渡证明

在椭圆轨道上应该满足能量守恒, 将 a, b 两点带入能量方程得

$$\frac{1}{2} \left(v_r^2 + \frac{h^2}{r_p^2} \right) - \frac{\mu}{r_p} = \frac{h^2}{2r_a^2} - \frac{\mu}{r_a} \quad (4.19)$$

由此式得

$$h^2 = \frac{r_a^2 r_p^2}{r_a^2 - r_p^2} \left(2\mu \frac{r_a - r_p}{r_a r_p} - v_r^2 \right) \quad (4.20)$$

因 $h^2 \geq 0$, 显然有

$$v_r \leq \sqrt{2\mu \frac{r_a - r_p}{r_a r_p}} = v_{r\max}$$

即 v_r 为有限值。

将式(4.20)代入式(4.18)

$$\Delta v_1^{*2} = v_r^2 + \left(\frac{r_a}{\sqrt{r_a^2 - r_p^2}} \sqrt{2\mu \frac{r_a - r_p}{r_a r_p} - v_r^2} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \right)^2 \quad (4.21)$$

式(4.21)对 v_r 求导得



$$\frac{d(\Delta v_1^{*2})}{dv_r} = 2v_r - 2v_r \left(\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_p^2} - \frac{\sqrt{\frac{\mu}{r_p} \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_p^2}}}{\sqrt{2\mu \frac{r_a - r_p}{r_a r_p} - v_r^2}} \right) \quad (4.22)$$

令 $d(\Delta v_1^{*2})/dv_r = 0$, 当 $v_r \leq v_{r\max}$ 时, 只有 $v_r = 0$ 为极值点, 且 $d^2(\Delta v_1^{*2})/dv_r^2 |_{v_r=0} > 0$ 。

$$(\Delta v_1^{*2})_{\min} = \left(\sqrt{\frac{\mu}{r_p} \frac{2r_a}{r_a + r_p}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \right)^2 \quad (4.23)$$

上式与式(4.15)的结果相同, v_b 与 v_p 同向, b 点为 v_b 与小圆的切点。

同样的方法还可以证明如果从小圆轨道相切点出发的椭圆过渡轨道, 在与大圆轨道相切时所需速度脉冲是最少的。这就证明: 霍曼过渡是两圆轨道间以两脉冲进行过渡能量最省的方法。如果允许用两个以上的速度脉冲, 结论将有所改变。

两脉冲变轨的特性

为了便于特性分析, 将相关量无量纲化, 设

$$\begin{aligned} \bar{r} &= r_a/r_p \quad v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \quad \bar{v}_1 = \Delta v_1/v_c \quad \bar{v}_2 = \Delta v_2/v_c \\ \Delta \bar{v}_T &= \frac{\Delta v_T}{v_c} = \sqrt{\frac{2\bar{r}}{1+\bar{r}}} \left(1 - \frac{1}{\bar{r}} \right) + \left(\sqrt{\frac{1}{\bar{r}}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

为两脉冲霍曼过渡所需能量的相对值与相对半径 \bar{r} 的关系, 见图 4.7。

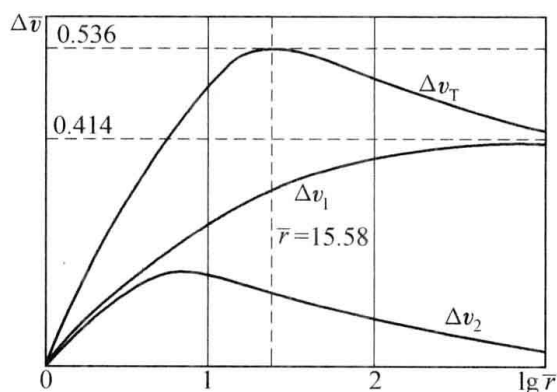


图 4.7 二脉冲过渡的能量

$\Delta \bar{v}_1$ 是单调地上升的, 趋近于 $0.414(\sqrt{2} - 1)$, 有上界。因为最大的椭圆就是抛物线了; 而 $\Delta \bar{v}_2$ 却在 $\bar{r} = 5.88$ 时, 有极大值 $(\Delta \bar{v}_2)_{\max}$ 。之后随着 \bar{r} 的增大 $\Delta \bar{v}_2$ 逐渐减小, 因为很大的椭圆与相切的大圆轨道在切点的速度差已经很小了。所以能够看到 $\Delta \bar{v}_T$ 是个随 \bar{r} 的增大先升后降再稳定的过程。在 $\bar{r} = 15.58$ 时, 有 $(\Delta \bar{v}_T)_{\max} = 0.536$ 。之后随着 \bar{r} 的增大 $\Delta \bar{v}_T$ 逐渐下降, 趋近于 0.414。从 $\Delta \bar{v}_T$ 的变化曲线看, 存在用多个 ($n > 2$) 速度脉冲完成两圆轨道间的变轨, 而总的能耗小于二脉冲霍曼过渡的可能。



深入的研究表明,不是所有的两圆轨道间过渡都是以霍曼过渡为能量最佳的。二脉冲和多脉冲哪个更节能与 \bar{r} 的大小和脉冲施加方式有关。结论如下:

(1) 当 $r_a/r_p < 11.94$ 时霍曼过渡为能量最省的;

(2) 当 $r_a/r_p > 15.58$ 时三脉冲(双椭圆)过渡(图 4.8)比二脉冲过渡能量最省,要求中间轨道 $r_c > r_a$,且越大越省;

(3) 当 $11.94 < r_a/r_p < 15.58$ 时二、三脉冲哪个最省不定,需考察 r_c 的具体情况。

在 (r_a/r_p) 与 (r_c/r_p) 构成的平面上,每个点对应的是一个三脉冲的两圆轨道间过渡过程。当点处在 $(r_a/r_p) = (r_c/r_p)$ 的直线上时,过渡过程蜕化为两脉冲的霍曼过渡。如图 4.9,平面被由一条超越函数曲线 C 和霍曼过渡直线构成的曲线分成了 I, II 两个区域。相同的 (r_a/r_p) ,在 I 区域(包括 C 线上)的过渡为三脉冲过渡最优,在 II 区域的过渡为两脉冲过渡最优。如果按照 (r_a/r_p) 轴横向区分,11.94 和 15.58 两条直线把平面分为三个区域,分别对于上述的三个结论。其中(1),(2)两个结论比较清晰,(1)条件的过渡都属于 II 区域,以二脉冲的霍曼过渡为最优;(2)条件的过渡分属 I、II 两个区域,由 r_a 与 r_c 的大小这样的简单关系决定二、三脉冲哪个是最优的;(3)条件的过渡也分属 I、II 两个区域,界限为一 r_a 与 r_c 的超越函数,其部分函数值见表 4.2。

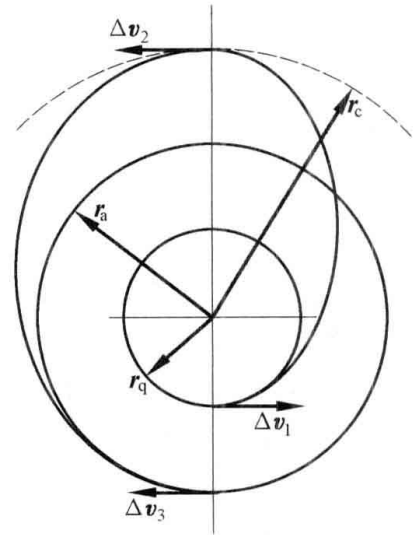


图 4.8 三脉冲过渡

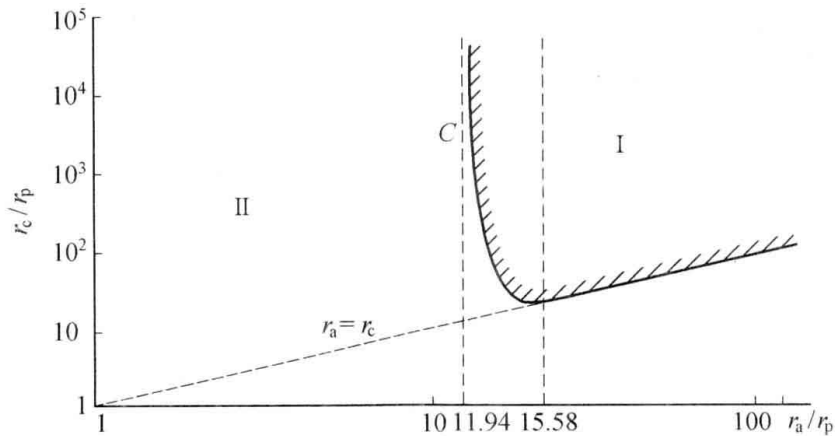


图 4.9 最优区域的划分

表 4.2 C 曲线的部分参数

r_a/r_p	11.94	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0	15.5	15.58
r_c/r_p	39 812	816.0	91.6	49.1	34.1	26.4	21.6	18.4	16.1	15.58



当然,霍曼过渡也可以从大圆轨道向小圆轨道过渡,此时 Δv_i 方向与轨道速度方向相反, Δv_T 不变。最优的结论也和从小圆轨道向大圆轨道过渡相同。

4.2.2 同轴椭圆轨道之间的过渡(同向)

由于近心点施加速度脉冲,对改变轨道的长半轴和偏心率效果最佳,且不改变长轴的方向,故亦采用类似霍曼过渡的方式,即在内部轨道的近心点加 Δv_1 ,在外部椭圆的远心点,再加 Δv_2 ,是能量最省的过渡。

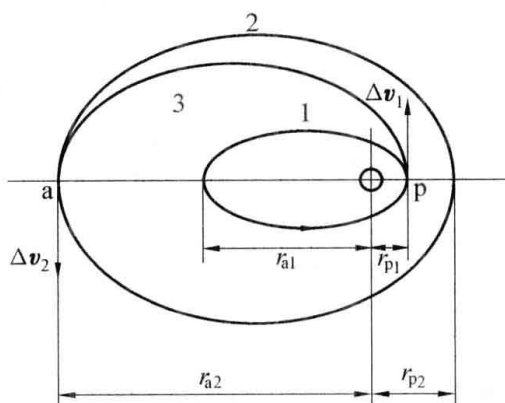


图 4.10 同轴同向椭圆轨道的过渡

对于 1,2 轨道有

$$v_{p1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{p1}} \frac{2r_{a1}}{r_{a1} + r_{p1}}} \quad (4.25)$$

$$v_{a2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{a2}} \frac{2r_{p2}}{r_{a2} + r_{p2}}} \quad (4.26)$$

对于过渡轨道 3 有 $a = (r_{p1} + r_{a2})/2$; $e = (r_{a2} - r_{p1})/(r_{a2} + r_{p1})$

$$v_p = \sqrt{\frac{\mu}{r_{p1}} \frac{2r_{a2}}{r_{a2} + r_{p1}}} \quad (4.27)$$

$$v_a = \sqrt{\frac{\mu}{r_{a2}} \frac{2r_{p1}}{r_{a2} + r_{p1}}} \quad (4.28)$$

在 p 和 a 点的速度增量是

$$\Delta v_1 = v_p - v_{p1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{p1}}} \left(\sqrt{\frac{2r_{a2}}{r_{a2} + r_{p1}}} - \sqrt{\frac{2r_{a1}}{r_{a1} + r_{p1}}} \right) \quad (4.29)$$

$$\Delta v_2 = v_{a2} - v_a = \sqrt{\frac{\mu}{r_{a2}}} \left(\sqrt{\frac{2r_{p2}}{r_{a2} + r_{p2}}} - \sqrt{\frac{2r_{p1}}{r_{a2} + r_{p1}}} \right) \quad (4.30)$$

所需的总速度增量是

$$\Delta v_T = \Delta v_1 + \Delta v_2 \quad (4.31)$$



当然,亦可由小椭圆轨道的远心点向大椭圆轨道的近点过渡,与上述的过渡方法的差别会因过多的参数组合变得没有一般性了。

最一般情况是两个不相交的椭圆大小和长轴方向都不相同,在原始轨道的变轨点和目标轨道的进入点的位置都会影响到变轨过渡椭圆轨道的参数确定,使得过渡脉冲的确定也不具有规律性。这样的轨道机动需要具体问题具体分析了,这里就不再详细讨论了。

4.3 航天器的轨道拦截

拦截:使追踪航天器在目标航天器运行的轨道上的某一位置上与之相遇的过程。两轨道相交时的相对速度大小和方向没有要求——区别于交会对接。两航天器可以是在同一轨道平面内,也可以是相同的轨道;也可能是不同轨道面上的不同轨道。

过程通常为由追踪航天器通过在 r_0 处施加速度冲量 Δv ,使航天器的速度矢量 r_0 变为 v_1 ,并进入一条新的轨道(称为拦截轨道),于指定时刻到达预定的空间位置 r_f 与目标航天器相遇。

4.3.1 圆轨道上的拦截

两航天器在同一圆轨道上运行(图 4.11),目标航天器在 B 点,追踪航天器在 A 点,两者之间相对于圆轨道的中心有一角距 Φ_{AB} ,如欲使追踪航天器在 C 点追上目标航天器,应沿什么轨道飞行便是下面要研究的问题。

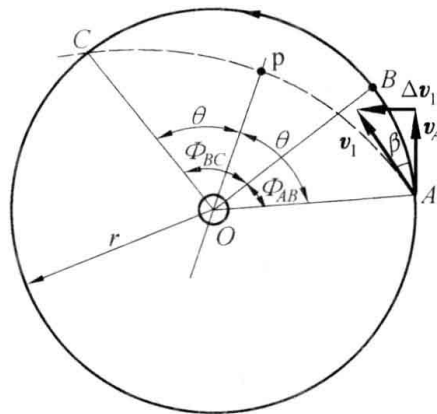


图 4.11 圆轨道上的拦截

由于是圆轨道上运动,目标航天器自 B 点飞至 C 点的时间为

$$t_{BC} = \frac{\Phi_{BC}}{n} = \Phi_{BC} \sqrt{\frac{r^3}{\mu}} \quad (4.32)$$

显然,追踪航天器也应该在同样的时间内从 A 点运动到 C 点,两者才能在 C 点交会,为特殊的高斯问题。然而 A 至 C 的距离远于 B 至 C ,追踪航天器必须进入一条具有更大能量的拦截



轨道——椭圆、双曲线或抛物线——上飞行才能按时达到。由于近心点附近平均速度较大,利于追赶,无论是沿何种轨道追踪,拦截轨道的近心点可以取在角 $(\Phi_{AB} + \Phi_{BC})$ 的平分线 OP 上。由此可知,从经 A 到 C 点的飞行时间应等于从 p 到 C (或从 A 到 p)时间的两倍。因为 A 点和 C 点的距离相等,且关于拦截轨道对称,不需采用高斯问题通常的解决办法。由于已知拦截轨道起始点的位置(真近角),可以建立其轨道方程,通过迭代的方法确定满足条件的拦截轨道的要素。

从椭圆轨道或双曲线轨道时间方程(开普勒时间方程)可以计算出飞行时间。两个位置和飞行时间可以确定拦截轨道的参数。椭圆或双曲线轨道的偏心率 e ,半长轴 a 可以通过迭代计算求得,最后的 e 和 a 应使飞行时间等于 t_{BC} 。求出 v_1 ,使得 $\Delta v = v_1 - v_A$ 。

计算流程图见图 4.12,如用椭圆轨道的时间方程,不能满足拦截条件,改用双曲线时间方程,以相同的方法进行求解。

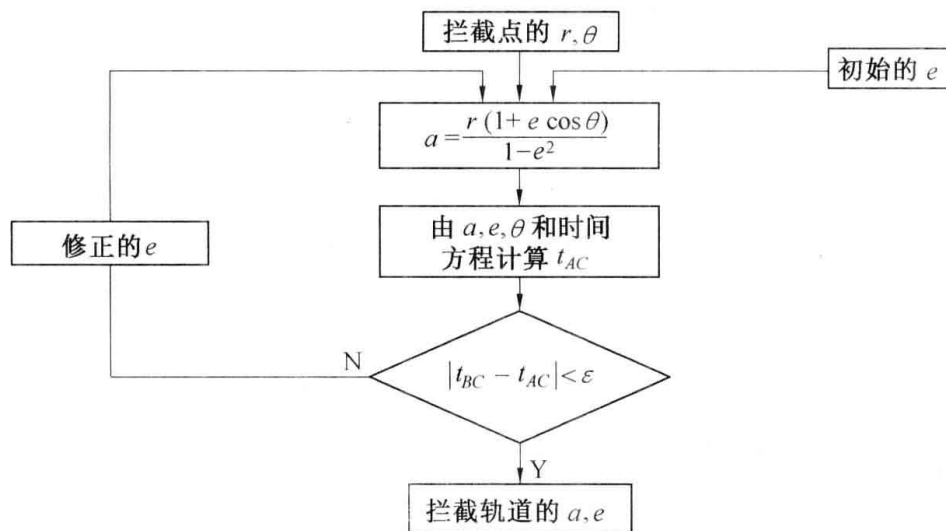


图 4.12 圆轨道上的拦截计算流程图

4.3.2 椭圆轨道上的拦截

两航天器在同一椭圆轨道(1)上运行(图 4.13),目标航天器在 B 点,追踪航天器在 A 点,两者之间有一角距 Φ_{AB} ,如欲使追踪航天器在 C 点追上目标航天器,应沿什么样的拦截轨道飞行呢?欲在 C 点实施拦截。拦截轨道应为椭圆或双曲线轨道(2),且以相同的时间到达 C 点。与同一圆轨道上的拦截情况不同的是拦截点不是关于某过 O 点直线为对称的,即 $r_A \neq r_C$,因此拦截轨道近心点不在 Φ_{AC} 的平分线上。设它在某个 p 点,那么 A 点和 C 点的真近角为未知量。拦截的过程计算如下。

- (1) 首先利用 Φ_{BC} 和(1)轨道参数 a_1, e_1 ,计算目标航天器由 B 点飞到 C 点所需的时间 t_{BC} ;
- (2) 再设拦截轨道为偏心率为 e_2 的椭圆。由轨道方程得

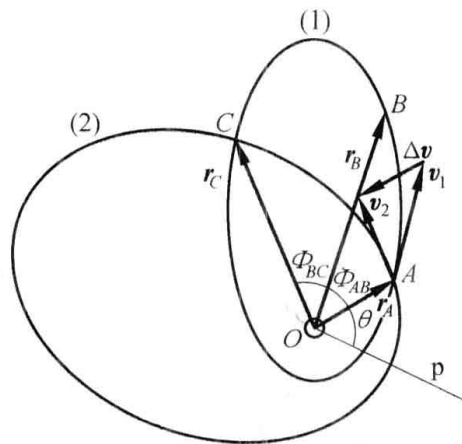


图 4.13 椭圆轨道上的拦截

$$r_A = \frac{p_2}{1 + e_2 \cos \theta}, \quad r_C = \frac{p_2}{1 + e_2 \cos(\theta + \Phi_{AC})}$$

解得

$$e_2 = \frac{(r_C/r_A) - 1}{\cos \theta - (r_C/r_A) \cos(\Phi_{AC} + \theta)}$$

(3) 迭代求解:类似于圆轨道拦截,先给定某个 p 点为近心点,即有个 A 点初始的 θ ,再由上式计算 e_2, t_{AC} 。根据 t_{AC} 与 t_{BC} 的差别修改 θ ,循环至 $|t_{AC} - t_{BC}| < \epsilon$,最后求得 e_2, θ ,即拦截轨道的轨道参数 a_2, e_2 。

同圆轨道拦截,用椭圆轨道的时间方程式,不能满足拦截条件时,改用双曲线时间方程。

4.3.3 异面轨道的拦截

目标航天器和拦截航天器分别在 T_1 平面的(1)轨道和 T_2 平面的(2)轨道上飞行(图 4.14),如不改变轨道平面拦截航天器,则拦截点只有 T_1 平面和 T_2 平面的交线处两轨道的交点 C ,为平面拦截问题。

如交线上无交点(图 4.15),且希望拦截航天器在两平面交线以外的 C_1 点拦截,那么拦截轨道将在一个既不在 T_1 平面,也不在 T_2 平面的新平面上。

拦截轨道面的确定方法:延长 r_A, r_C 得过 O 点的 ae 和 bd 两条直线,它们分别在 T_2 和 T_1 平面上,同时也必然在拦截轨道平面上,分别是 T_2 和 T_1 平面与拦截轨道面的交线。连 $abde$ 四点即为由 r_A, r_C 两矢量(ae 与 bd 两条相交于 O 点的直线)确定的拦截轨道(3)的轨道面 T_3 ,其法线 n_3 同时垂直于 r_A, r_C 。在 T_3 平面内做过 A, C_1 两点的椭圆或双曲线便是可能的拦截轨道,如果已知拦截时间,经过和前面类似的迭代,将可求得满足 $t_{AC_1} = t_{BC_1}$ 条件的真实拦截轨道。由 r_A, r_C, t_{BC_1} 定轨为典型的高斯问题。

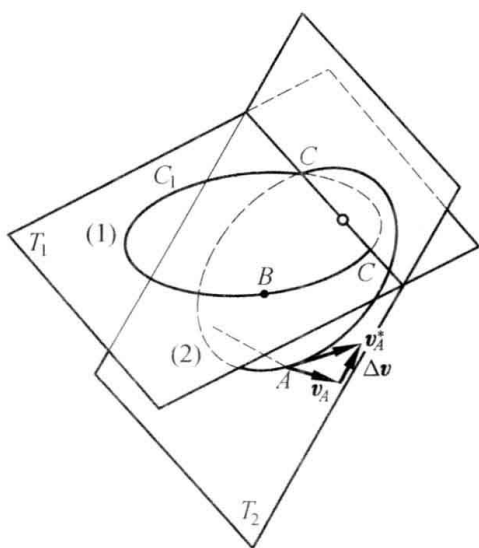


图 4.14 异平面轨道拦截

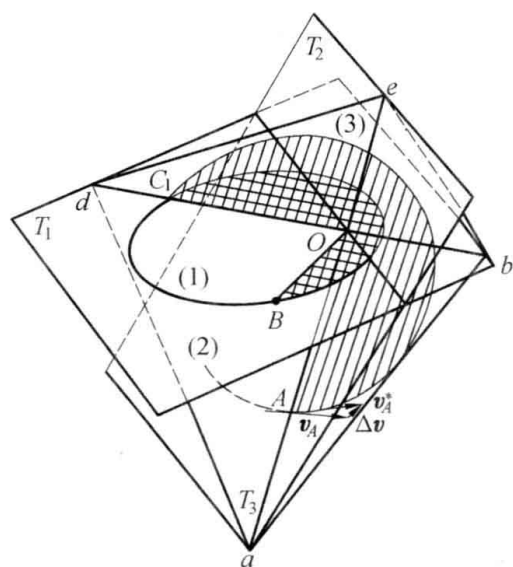


图 4.15 异平面拦截的轨道面

4.4 气动力辅助轨道机动

所谓气动力辅助轨道过渡,就是利用引力体周围大气层产生的空气动力进行轨道机动的方法。

由于利用气体动力机动,需要变轨的航天器应该有相应的气动外形来产生所需的气动力。通常为升力体或是带有翼面装置(如类似于航天飞机的航天器)的结构形式,应具有一定数值的升力阻力比 C_y/C_x ,还应该可以有效地调节飞行姿态,以获得机动所需要的升力、侧力及阻力,用来有效的调节飞行状态。此外,由于航天器要以轨道速度进出大气层,即使是很稀薄的,它必须具有良好的防热结构或防热层,以防航天器被烧毁。基于这个因素,利用气动变轨的航天器通常是带有防热结构的返回式航天器,或者是没有专门的防热结构只能利用不至于产生很大气动加热的较小的气动阻力减速变轨的航天器。

航天器在中心引力场中考虑气动力的动力学方程式本质上与式(2.10)没有差别。因气动力的表达与运动状态关系密切,最好是在航天器质心速度坐标系中研究。图 4.16 中以 O 为心的圆是中心星体,当航天器运行到 A 点时,它的速度 v 与切线 τ 重合,阻力 F_x 和它方向相反,升力 F_y 沿法线 n 的方向,向外为正。 v 可以写成

$$v = v\tau$$

其中, τ 为切线 τ 的单位矢量。对上式求时间导数应有

$$\dot{v} = \dot{v}\tau + v\omega \times \tau \tag{4.33}$$

式中, ω 是 τ 或矢径 r 在惯性空间的旋转角速度,在图 4.16 中显然它是垂直轨道平面的,所以有



$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k} \quad (4.34)$$

式中, \mathbf{k} 是垂直于轨道平面指向上方的单位矢量; $\omega = \dot{\theta}$ 。

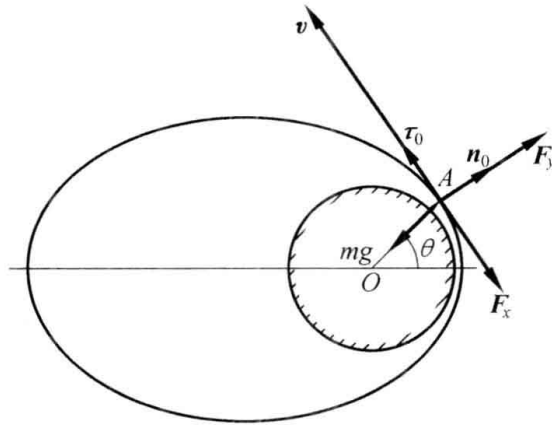


图 4.16 气动力的分量

当航天器在 A 点时, 有速度 \mathbf{v} , 与当地水平线成 β 角, 如图 4.17。经 Δt 时间后, 航天器飞至 A' 点, 其速度变为 $(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v})$, 与当地水平的夹角成为 $(\beta + \Delta \beta)$, 而此时水平线则旋转了 $\Delta \theta$ 角, 所以速度相对绝对空间(中心星体)转过的角度 $\Delta \delta$ 是

$$\Delta \delta = \left(\frac{\pi}{2} - \beta - \Delta \beta \right) - \left[\left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) - \Delta \theta \right] = -\Delta \beta + \Delta \theta$$

因此

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta t} = -\frac{d\beta}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \quad (4.35)$$

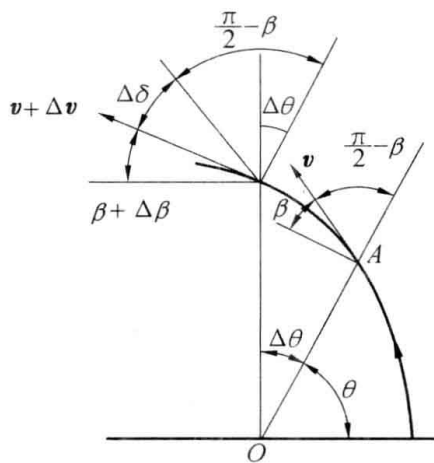


图 4.17 几何关系

把式(4.35)代入式(4.33), 应用单位矢量叉乘的法则, 并考虑到

$$\dot{\theta} = \frac{r\dot{\theta}}{r} = \frac{v \cos \beta}{r}$$



便有

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + \left(v \frac{d\beta}{dt} - \frac{v^2 \cos \beta}{r} \right) \mathbf{n} \quad (4.36)$$

从(4.36) 求出 $\boldsymbol{\tau}$ 和 \mathbf{n} 方向的加速度分量,再从图 4.16 求出这两方向上的气动力及引力分量,然后应用牛顿第二定理将它们联系起来,即得航天器在大气内飞行时运动方程式,在切向和法线方向的分量形式为

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{F_x}{m} - \frac{\mu}{r^2} \sin \beta \quad (4.37)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{F_y}{mv} + \left(\frac{v}{r} - \frac{\mu}{r^2 v} \right) \cos \beta \quad (4.38)$$

运动学关系为

$$\frac{dr}{dt} = v \sin \beta \quad (4.39)$$

式(4.37) ~ (4.39) 共三个方程式,自变量亦为三个(v, r, β),方程封闭可解。

下面以从大圆轨道向小圆轨道过渡为例,说明气动力辅助变轨的实质和特点。

航天器原始轨道是半径为 r_a 的大圆轨道,欲使它过渡到半径为 r_p 的小圆轨道(图 4.18)。当航天器运动到 a 点时朝速度的反向加一速度脉冲 Δv_1 ,使它沿椭圆轨道降至地球大气层边界 b 点(一般认为地球大气边界高度为 150 ~ 200 km 左右)。然后航天器利用调节升力 F_y 的大小控制航天器在大气层内的飞行,并使之在 c 点冲出大气。同时在 c 点再施加第二个脉冲速度 Δv_2 ,则航天器将沿另一椭圆轨道运动到半径为 r_p 的小圆轨道,再加第三个速度脉冲 Δv_3 ,便完成了全部过渡。上述飞行过程中,如在 c 点航天器有足够的速度,可以达到 r_p 圆的高度, Δv_2 也可以不施加。整个飞行过程中,进入 b 点时的速度大小和 β 角数值是重要的参数,选择不当甚至会使航天器因消耗能量过多而不能再次冲出大气。因此,在 b 至 c 的大气飞行过程中,选择

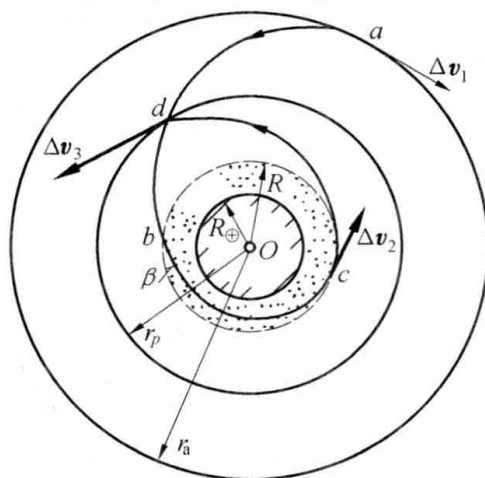


图 4.18 气动辅助变轨的过程



升力控制方案,使航天器合理消耗动能,最大可能地节约燃料,则是气动力辅助变轨中最为核心的问题,这里需要应用最优化技术。

下面通过一简单情况,或称理想情况,对比气动辅助变轨和霍曼过渡所需燃料的多少(图 4.19)。所谓理想情况,即设大气层处在以 R 为半径的圆内,当航天器从 r_a 圆轨道降至 R 圆时,速度为 v_b , β 角为零。在大气中消耗能量后从 c 点再次以 $\beta = 0^\circ$ 冲出大气,其速度 v_c 刚够沿椭圆轨道达到 r_p 为半径的圆轨道,远地点恰在该圆轨道上。对于这种理想情况只需要两个速度脉冲,即在 a 点的 Δv_1 和 d 点的 Δv_2 。

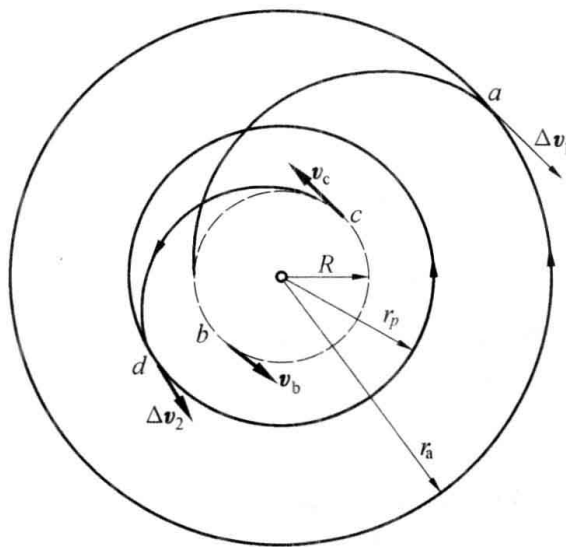


图 4.19 气动变轨的理想状态

根据霍曼过渡的原理,欲使航天器在 b 点以 $\beta = 0$ 的角度进入大气,则 Δv_1 应满足

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_a} \frac{2}{1 + \left(\frac{r_a}{R}\right)}}$$

同理,可以求得 d 点的第二个速度脉冲

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p} \frac{2}{1 + \left(\frac{r_p}{R}\right)}}$$

所以,总的速度脉冲为

$$\Delta v_T = \Delta v_1 + \Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} + \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_a} \frac{2}{1 + \left(\frac{r_a}{R}\right)}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p} \frac{2}{1 + \left(\frac{r_p}{R}\right)}} \quad (4.40)$$

如果以霍曼过渡方式,直接从大圆向小圆过渡,则在 a 和 d 两点所需的速度脉冲为

$$\Delta v_{1H} = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_a} \frac{2r_p}{r_a + r_p}}$$



$$\Delta v_{2H} = \sqrt{\frac{\mu}{r_p} \frac{2r_a}{r_a + r_p}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}}$$

两者之和为

$$\Delta v_{TH} = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} + \sqrt{\frac{\mu}{r_p} \frac{2r_a}{r_a + r_p}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_a} \frac{2r_p}{r_a + r_p}} \quad (4.41)$$

为比较式(4.40)和式(4.41)的大小,令

$$\bar{r}_a = \frac{r_a}{R} \quad \bar{r}_p = \frac{r_p}{R} \quad (4.42)$$

则(4.40)和(4.41)可改写为

$$\Delta v_T = \sqrt{\frac{\mu}{R}} \left[\sqrt{\frac{1}{\bar{r}_a}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1 + \bar{r}_a}} \right) + \sqrt{\frac{1}{\bar{r}_p}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1 + \bar{r}_p}} \right) \right] \quad (4.43)$$

$$\Delta v_{TH} = \sqrt{\frac{\mu}{R}} \left[\sqrt{\frac{1}{\bar{r}_a}} \left(1 - \sqrt{\frac{2\bar{r}_p}{\bar{r}_a + \bar{r}_p}} \right) + \sqrt{\frac{1}{\bar{r}_p}} \left(\sqrt{\frac{2\bar{r}_a}{\bar{r}_a + \bar{r}_p}} - 1 \right) \right] \quad (4.44)$$

如令式(4.43)与式(4.44)相等,便可绘制出一条以 \bar{r}_a 和 \bar{r}_p 为变量的曲线,见图4.20。表明在这条曲线上两种变轨方式具有相同的能耗。而在曲线的上方有 $\Delta v_T > \Delta v_{TH}$,即在该区霍曼过渡所需能量少于气动力辅助变轨的;而在曲线下方,因 $\Delta v_T > \Delta v_{TH}$,以气动力辅助变轨为最佳。据[1]的计算,从地球静止轨道向 $r_p = 6728 \text{ km}$ 轨道过渡,其 Δv_T 比霍曼过渡少59.86%。从图4.20显见,大圆轨道越大,气动力辅助变轨越有利;而且这个结论只对从大圆向小圆轨道过渡才正确,从小圆轨道向大圆轨道过渡则以霍曼过渡为佳。

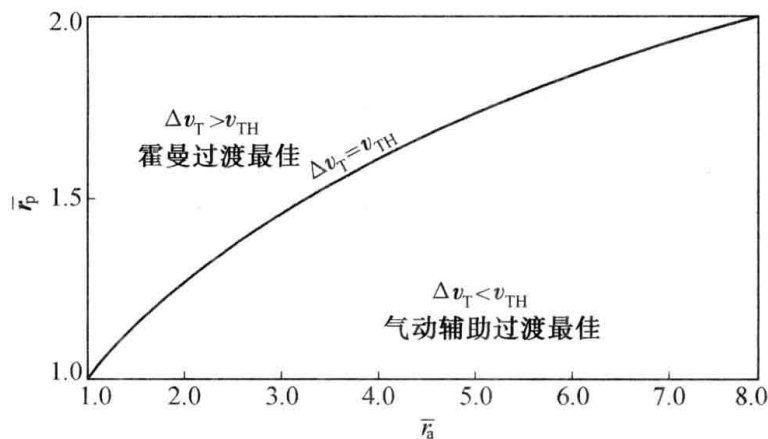


图 4.20 两种过渡方式的能耗比较

上面计算的是理想情况,而真实情况,因大气上层空气稀薄难以获得必要的减速,需更深入大气层才行,这就要求多一些的能量,所以理想情况是节省能量的上限。

至于真实情况,航天器在大圆轨道上飞行的速度为 $v_a = \sqrt{\mu/r_a}$,若航天器进入大气时的速度和角度分别为 v_b 和 β_b ,则根据角动量守恒原理,可以写出 $r_a(v_a - \Delta v_1) = Rv_b \cos \beta_b$,其中 Δv_1 是在大圆 a 点施加的速度冲量,因此有



$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} - \frac{R}{r_a} v_b \cos \beta_b$$

同理,还可以写出航天器冲出大气时的速度 v_c 和角度 β_c 与到达小圆轨道时应施加的速度增量的关系

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} - \frac{R}{r_p} v_c \cos \beta_c$$

为了使燃料消耗最省,因此目标函数取

$$J = \Delta v_1 + \Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} + \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} - \frac{R}{r_a} v_b \cos \beta_b - \frac{R}{r_p} v_c \cos \beta_c \quad (4.45)$$

具体地说,就是计算出动力学方程式中的 $= F_y(t)$ 函数,以便得到这样的 v_b, v_c 和 β_b, β_c ,它们使 J 达到最小值。而为了达到这个目的,还应添加两个条件,即进入和冲出大气的轨道能量守恒的条件

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\mu}{r_a}} - \Delta v_1 \right)^2 - \frac{\mu}{r_a} = \frac{v_b^2}{2} - \frac{\mu}{R} \quad (4.46)$$

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\mu}{r_p}} - \Delta v_2 \right)^2 - \frac{\mu}{r_p} = \frac{v_c^2}{2} - \frac{\mu}{R} \quad (4.47)$$

应用最优化原理进行优化,可以得到 J 达到最小值的 F_y 控制律。

利用上述原理计算从地球同步轨道向 $r_p = 6\,558$ km 圆轨道的气动辅助过渡,结果表明气动辅助变轨所需的总速度增量 $\Delta v_T = \Delta v_1 + \Delta v_2$ 是霍曼过渡的 38.48%。当然,在计算时未计入为变更 F_y 而消耗的能量。

4.5 连续作用力下的轨道机动

通常连续作用的推力装置的推力都很小,它们在千分之几牛至数牛顿之间。为了产生足够的轨道机动冲量,小推力的作用下进行轨道机动所需时间是极长的,因此对机动过程进行优化是十分必要的。本节先给出基于轨道动力学模型的优化理论,然后针对连续作用力的轨道机动进行优化。

设航天器飞行过程以状态方程式

$$\dot{X} = f[X(t), u(t), t] \quad (4.48)$$

($X(t_0)$ 为已知, $t_0 \leq t \leq t_f$)

描述,其中, $X(t) \in R^{n \times 1}$, n 维的状态变量; $u(t) \in R^{m \times 1}$, m 维的控制向量。

如果要求在 $t = t_f$ 终点时刻,状态变量 $X(t_f)$ 满足 q 维的约束条件

$$\phi[X(t_f), t_f] = 0 \quad (4.49)$$

并使目标函数在终端时刻 $t = t_f$

$$J = \phi[X(t_f), t_f] \quad (4.50)$$



达到极值(极大或极小)。

为导出优化的条件,先把目标函数式(4.50)改写成

$$J = \phi[X(t_f), t_f] + \nu^T \psi[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T (f - \dot{X}) dt \quad (4.51)$$

由于增添的均为零值,目标函数并未改变。其中 $\nu = \nu(t) \in R^{q \times 1}$, $\lambda = \lambda(t) \in R^{n \times 1}$ 分别是约束条件(4.49)及状态方程式(4.48)的待定因子。经推导, J 有极值的必要条件是

$$\dot{\lambda} = - \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right)^T \lambda \quad (4.52)$$

$$\lambda_k(t_0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^T \lambda = 0 \quad (4.53)$$

$$\lambda^T(t_f) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial X} \right)_{t=t_f} \quad (4.54)$$

再计入式(4.48)和(4.49),最优化的问题便可求解了。其中式(4.48)和(4.52)共 $2n$ 个微分方程式,式(4.54)和 $\lambda_k(t_0) = 0$ (或为 $X(t_0)$ 给定值)是解这 $2n$ 个方程的边界条件,式(4.53)则用以求得 m 维控制 $u(t)$ 。

用上述原理推导同平面两圆轨道间的过渡(图 4.21),有如下结果:若有一航天器与从轨道 $r(0)$ 过渡到 $r(t_f)$,变轨发动机推力为 P ,其姿态角为 ϕ ,航天器在铅锤方向(径向)及水平方向的速度分量分别是 v_r 和 v_θ ,如果航天器的瞬时质量为 $m(t)$,燃料耗量为 $\dot{m} = \text{const}$,则航天器的运动方程式,可参考式(2.10)写成

$$\ddot{\mathbf{r}} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \frac{\mathbf{P}}{m(t_0) - \dot{m}t} \quad (4.55)$$

其中,推力 P 分解为

$$\mathbf{P} = P \sin \phi \mathbf{r}_0 + P \cos \phi \boldsymbol{\theta}_0 \quad (4.56)$$

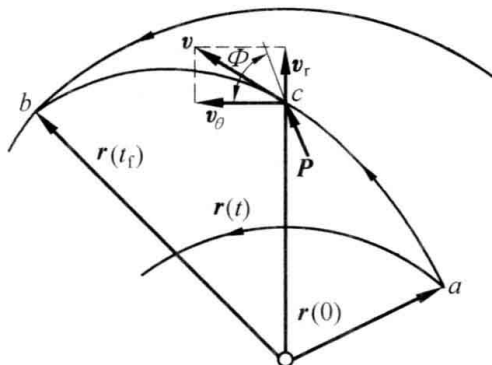


图 4.21 连续推力过渡

$\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\theta}_0$ 分别是矢径 \mathbf{r} 方向和与运动平面内水平方向的单位矢量。再添加与轨道平面垂直的单位矢量 \mathbf{k}_0 ,以它们作为三个基矢构成一运动坐标系——轨道坐标系。轨道坐标系固连在航天器



质心上,随其绕中心引力体运动。在轨道坐标系中,矢径 \boldsymbol{r} 和速度 \boldsymbol{v} 的分量形式是

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{r}_0 \quad (4.57)$$

$$\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{r}_0 + v_\theta\boldsymbol{\theta}_0 \quad (4.58)$$

利用单位矢量在动坐标系内求导的公式,可求得加速度

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{v}_r\boldsymbol{r}_0 + \dot{v}_\theta\boldsymbol{\theta}_0 + v_r\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_0 + v_\theta\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta}_0$$

这里 $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}_0$ 或 $\boldsymbol{\omega} = \frac{v_\theta}{r}\boldsymbol{k}_0$,代入上式,并考虑到单位矢量的叉乘法,有

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \left(\dot{v}_r - \frac{v_\theta^2}{r}\right)\boldsymbol{r}_0 + \left(\dot{v}_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r}\right)\boldsymbol{\theta}_0 \quad (4.59)$$

把式(4.56),(4.57)第一式和式(4.59)代入式(4.55),可求得航天器运动状态方程式

$$\dot{x}_1 = \dot{r} = v_r \quad (4.60)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{v}_r = \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{P \sin \phi}{m(t_0) - mt} \quad (4.61)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{v}_\theta = -\frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{P \cos \phi}{m(t_0) - mt} \quad (4.62)$$

显然, r, v_r 和 v_θ 分别是状态变量 x_1, x_2 和 x_3 ,其初始条件是

$$r(t_0) = r(0) \quad (4.63)$$

$$v_r(t_0) = 0 \quad (4.64)$$

$$v_\theta(t_0) = \sqrt{\frac{\mu}{r(0)}} \quad (4.65)$$

而 $t = t_f$ 时的约束是

$$\psi_1 = v_r(t_f) = 0 \quad (4.66)$$

$$\psi_2 = v_\theta(t_f) - \sqrt{\frac{\mu}{r(t_f)}} = 0 \quad (4.67)$$

如果希望在规定时间内($t_f - t_0$)之内,将航天器运送到半径 $r(t_f)$ 尽可能大的圆形轨道上去,目标函数可取为

$$J = r(t_f) \quad (4.68)$$

因 m 为常值,故 P 为常值,则控制变量便只有 $\phi = \phi(t)$ 了。

应用式(4.52)、(4.53)和(4.54),得

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_r = -\lambda_{v_r} \left(-\frac{v_\theta^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r^3}\right) - \lambda_{v_\theta} \frac{v_r v_\theta}{r^2} \\ \dot{\lambda}_{v_r} = -\lambda_r + \lambda_{v_\theta} \frac{v_\theta}{r} \\ \dot{\lambda}_{v_\theta} = -\lambda_{v_r} \frac{2v_\theta}{r} + \lambda_{v_\theta} \frac{v_r}{r} \end{cases} \quad (4.69)$$



$$(\lambda_{v_r} \cos \phi - \lambda_{v_\theta} \sin \phi) \frac{P}{m(t_0) - \dot{m}t} = 0$$

后式还可写成为

$$\tan \phi = \frac{\lambda_{v_r}}{\lambda_{v_\theta}} \quad (4.70)$$

$$\begin{cases} \lambda_r(t_f) = 1 + \nu_2 \frac{\sqrt{\mu}}{2[r(t_f)]^{\frac{3}{2}}} \\ \lambda_{v_r}(t_f) = \nu_1 \\ \lambda_{v_\theta}(t_f) = \nu_2 \end{cases} \quad (4.71)$$

六个微分方程式(4.60) ~ (4.62)和(4.69)的解,需籍助式(4.63) ~ (4.65)和(4.71)六个边界条件。前三个是初值条件,故是两点边值问题。所决定的 ν_1 和 ν_2 还应满足式(4.66)和(4.67),其控制变量由式(4.70)求出。

对于

$$\frac{P}{m(t_0)} = 0.1405, \quad \frac{\dot{m}\sqrt{\frac{\mu}{r(0)}}}{P} = 0.533, \quad \frac{t_f}{\sqrt{\frac{r^3(0)}{\mu}}} = 3.32$$

的情况,Kopp和McGill曾进行了计算^[2],他们计算了地球轨道至火星轨道,若推力 $P = 3.782 \text{ N}$,燃料消耗 $\dot{m} = 5.851 \text{ kg/day}$,则飞行日期为193天,其推力矢量方向的变化,如图4.22所示,即在前半程作加速运动,后半程为减速。值得指出的是,如用霍曼过渡,自地球飞行火星,需时258.9天(见附录A1),比连续推力情况还长些。

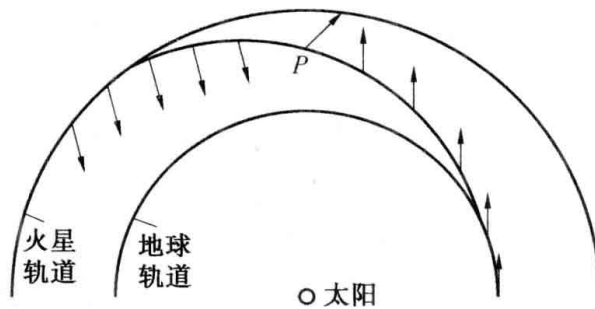


图 4.22 连续推力向火星轨道过渡

第 5 章 航天器的星际航行

太阳系的半径通常认为有 50 AU (Astronomical Unit, 天文单位, $1 \text{ AU} = 1.495\,978\,7 \times 10^8 \text{ km}$), 因为冥王星的平均轨道半径为 39.5 AU。以太阳风能到达的范围计算, 太阳系的半径可达 100 AU; 如以太阳和太阳系的引力范围计算, 太阳系的半径可达 4 500 AU; 如以围绕太阳系的稳定带计算, 太阳系的半径可达 10 万 AU; 如按彗星的活动范围计算, 太阳系的半径达 23 万 AU。

而目前人类的航天活动只是局限在行星意义下的太阳系内, 也就是半径不超过 50 AU 的空间。这样的太阳系, 阳光还要走几个小时才能从中心到达边缘, 而离地球最近的半人马星座的恒星距离是 4.22 l.y. (light-year, 光年, $1 \text{ l.y.} = 9.460\,730 \times 10^{12} \text{ km} = 63\,240 \text{ AU}$), 目前航天器的速度也就是几十千米每秒, 太阳系内的星际航行也需要十几年。通常所说的星际航行实际上就是指太阳系中行星际 (Interplanetary) 的探测活动, 恒星际航行只有待高性能的动力和全新的理论产生时才能实现。

5.1 会合周期及发射窗口

在星际航行中因无法补充常规燃料, 节能成为最重要的指标。以节能的方式 (如霍曼过渡) 飞行, 由于飞行轨道的长度单位都是以天文单位 (AU) 计算的, 所以运行的时间都是漫长的, 从地球轨道到某个行星轨道的过渡时间也是固定的。通常希望航天器到达该行星轨道时目标行星也刚好到达这里, 这就要求航天器从地球轨道出发时, 只能选择地球和该行星处于周向某固定相对位置的时刻 (见图 5.1)。否则, 即使到达目标行星的轨道, 也与其存在角距, 达不到与之会合的目的。

发射窗口: 为实现某项飞行任务航天器比较合适的发射时间范围。

发射窗口分日计、月计、年计的发射窗口, 分别是指相应时间段内适合发射航天器的子区间。如年计的发射窗口是指一年内适合发射的月份。某些特殊的任务需要同时考虑日计、月计和年计的发射窗口, 甚至更长的时间单位, 如对排列在近似一条直线上的 6 ~ 7 颗行星 (九星连珠) 进行探

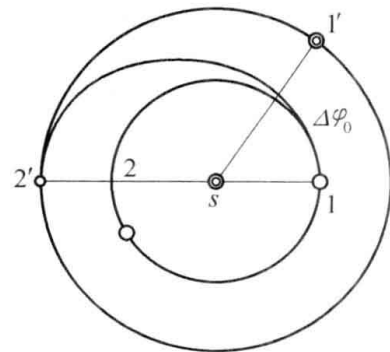


图 5.1 发射窗口



测。而一般的近地航天器的发射一天内可以有几个窗口,而且是可以每天都能发射。

会合周期:两个发射窗口间的时间间隔。

由于各行星绕太阳运行的周期和轨道速度互不相同,与地球的相对角速度也各不相同。设发射窗口时刻地球与某行星(不妨为居多的地外行星)间的角度是 $\Delta\varphi_0$,之后的角距为

$$\Delta\varphi = \left| \int_0^t (\omega_1 - \omega_2) dt \right| + \Delta\varphi_0$$

显然当 $\left| \int_0^t (\omega_1 - \omega_2) dt \right|$ 达到 2π 时,地球与行星的相对位置又回到初始状态,出现了下一次发射机会。

假如认为 ω_1 和 ω_2 都是常值,会合周期为 T ,则由 $\left| \int_0^T (\omega_1 - \omega_2) dt \right| = 2\pi$ 得

$$T = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} \quad (5.1)$$

以 T_1 和 T_2 代替 ω_1 和 ω_2 ,则有

$$T = \frac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|} \quad (5.2)$$

附录 A1 中给出了各行星与地球的会合周期、过渡时间等数据。可以看出,与地球的相对速度越小,会合周期就越长,地球与火星的会合周期最长,为 779.94 d;与地球的相对速度越大,会合周期就越短,地球与远方行星的会合周期只比一年多一点。这是因为远方行星运行周期比地球长很多,可以近似地认为它们不动,则地球与其相遇的周期就基本等于一年了。但到达远方行星的过渡时间也很长,如从地球轨道以霍曼过渡方式到达冥王星轨道需要 45 年多的时间,直接过渡飞行不适合,既耗时、又耗能,需采取加速措施来缩短飞行时间。

5.2 影响球和圆锥曲线拼合法

航天器星际飞行时会受到多个引力体的作用,准确的分析航天器的星际航行需要应用 N 体问题的理论,即考虑空间有关的星体共同作用下的航天器运动,通常 N 体问题无解析解。基于二体运动的中心引力场中的运动是航天器动力学的经典方法,对于航天器的星际航行却不能很好地进行描述,因为航天器距离中心引力体越远时动力学方程的误差就越大。所以需要解决这样的矛盾,既使用熟知的中心引力场中的运动方程,又能较好的描述航天器在多个引力体间的飞行过程。

圆锥曲线拼合(Patched Conic)法:将航天器的运动划分成若干段,每段确定一个起主导作用的中心引力体,在相应的范围内航天器以圆锥曲线方式运动,整个轨道为数个圆锥曲线的组合。起主导作用的引力体的作用范围称为该星体的影响球(SOI, Sphere of Influence)。作星际航行的初步设计或精度要求不高的轨道计算时经常采用此方法,关键在于如何确定主导引力体



的影响范围——影响球。

影响球的确定

设由星体 P_1 、航天器 P_2 和星体 P_3 组成的系统, P_2 绕 P_1 作中心引力场中的运动, P_3 的作用视为干扰, P_1 在 P_3 的引力场中, 如图 5.2 所示。

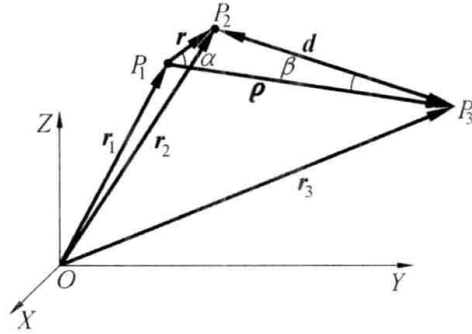


图 5.2 星体系统模型

P_1 体的运动为(略去 P_2 的影响)

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = G \frac{m_3}{\rho^3} \boldsymbol{\rho} \quad (5.3)$$

P_2 体的运动是

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \left(\frac{m_1}{r^3} \mathbf{r} + \frac{m_3}{d^3} \mathbf{d} \right) \quad (5.4)$$

P_2 体对 P_1 体的运动是

$$\ddot{\mathbf{i}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G \left[m_1 \frac{\mathbf{r}}{r^3} + m_3 \left(\frac{\mathbf{d}}{d^3} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \right) \right] \quad (5.5)$$

其中第一项是产生圆锥曲线运动的中心引力, 第二项是对圆锥曲线运动的干扰力, 其幅值分别记为 $F_{引1}$, $F_{干1}$ 。

$$F_{引1} = \frac{Gm_1}{r^2}$$

而

$$F_{干1} = Gm_3 \left[\left(\frac{\mathbf{d}}{d^3} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{d}}{d^3} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \right) \right]^{1/2} = Gm_3 \left(\frac{1}{d^4} + \frac{1}{\rho^4} + 2 \frac{\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\rho}}{d^3 \rho^3} \right)^{1/2} \quad (5.6)$$

由图 5.2, 因 P_1 体在 P_3 体的引力场中, P_2 距 P_1 体较近, 有 $d \approx \rho$, 而

$$\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\rho} = -d\rho \cos \beta, \quad d \cos \beta + r \cos \alpha = \rho$$

$$\cos \beta = \frac{\rho - r \cos \alpha}{d} \approx 1 - \frac{r}{d} \cos \alpha$$

由余弦定理 $d^2 = \rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \alpha$ 得



$$\cos \alpha = \frac{\rho^2 + r^2 - d^2}{2r\rho} \approx \frac{r}{2\rho}$$

因此

$$F_{\mp 1} = Gm_3 \left[\frac{1}{d^4} + \frac{1}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2 d^2} \left(1 - \frac{r^2}{2\rho^2} \right) \right]^{1/2} = Gm_3 \frac{r}{\rho^3}$$

则航天器受到的干扰力与中心星体对其的引力之比是

$$\frac{F_{\mp 1}}{F_{\mp 11}} = \frac{m_3}{m_1} \left(\frac{r}{\rho} \right)^3 \quad (5.7)$$

同理,还可以求得把 P_3 体视为中心星体而 P_1 体视为干扰源,这时 P_2 航天器相对 P_3 体的运动方程式为

$$\ddot{\mathbf{d}} = -G \left[m_3 \frac{\mathbf{d}}{d^3} + m_1 \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \right) \right] \quad (5.8)$$

再经与上面类似的推导,并略去 ρ/r 的高次方项,得

$$\frac{F_{\mp 2}}{F_{\mp 12}} = \frac{m_1}{m_3} \left(\frac{d}{r} \right)^2 \approx \frac{m_1}{m_3} \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 \quad (5.9)$$

以航天器绕 P_1 体作圆锥曲线运动时干扰相对中心引力的比例与绕 P_3 体作圆锥曲线运动时干扰相对中心引力的比例的相等为条件来确定 P_1 体相对于 P_3 体引力场的影响球大小。

$$\frac{F_{\mp 1}}{F_{\mp 11}} = \frac{F_{\mp 2}}{F_{\mp 12}}$$

有

$$r_s = \rho \left(\frac{m_1}{m_3} \right)^{2/5} \quad (5.10)$$

r_s 为 P_1 体相对 P_3 体的作用半径,在 P_1 体周围形成的区域称为影响球。航天器在 r_s 内时,为围绕 P_1 体的中心引力场中的运动;航天器在 r_s 外时,为围绕 P_3 体的中心引力场中的运动。应注意的是,变换中心引力体时,运动参数的相对关系也需进行相应的变化。

由于需要界定的是圆锥曲线运动的有效范围,所以采用上述的界定方法,而不是直接找到两引力体中间的引力平衡点。以日-地系统为例,由式(5.10)计算地球的影响球半径为 9.29×10^5 km,而日地连线上的引力平衡点可以直接解得为距地心 257 000 km。考虑问题的出发点不一样,得到的结论差距就比较大。而后者也不是一个静止点,虽然受到太阳和地球的万有引力的大小相等,方向相反,但处在此点的物体还是不能静止不动的。因为日-地系统本身是运动的。

利用式(5.10)对太阳系各行星及月球的影响球半径计算结果见附录一中的表 A1.1,示意图见图 5.3。图中影响球最小的是月球相对地球的影响球,若航天器在此区内,就可以用月球为中心引力体的中心力场中运动处理,认为其他星体的引力都是干扰;若航天器超出月球影响区,则进入地球相对于太阳的影响球之内,则认为航天器只受地球引力的影响;同理,如航天器超出地球影响球,便是进入到太阳的影响球内了,此时只需考虑太阳的作用,略去其他星体的



影响。若航天器在太阳系中遇到某颗行星,距离小于其相对于太阳的影响球半径,则成为以中心引力场方式绕该行星飞行的航天器。如果距离小于该行星的某颗卫星相对于行星的影响球半径的话,航天器将有机会成为行星卫星的卫星。

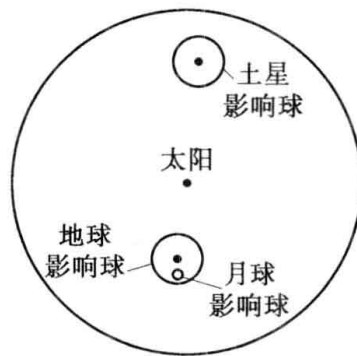


图 5.3 太阳系中的影响球

利用影响球的概念分析从地球向土星的飞行,航天器从地球(或停泊轨道)出发时应按地球为中心力场的二体问题,使航天器获得至少比逃逸速度大的速度,让它能够飞出地球影响球;控制航天器飞出地球影响球的方向使它在飞出时具有的相对于太阳的速度能使其成为以太阳为中心力场的二体系统中圆锥曲线轨道,并能够到达土星轨道的影响球范围与之会合;当航天器到达土星影响球之后,控制航天器进入土星影响球的角度使它得到需要的能够成为以土星为中心力场的二体问题的相对速度;选择制动点,使航天器在土星的影响球中成为环绕轨道飞行的土星卫星。如果还要继续探测土星的卫星可以以此类推。从土星返回地球和从地球出发过程类似,不再重复。

上述的过程是把航天器的完整飞行划分为几段,在每段飞行中,地球、太阳和土星分别作为中心引力场的唯一引力源,另外两个则被当作干扰略去,因而简化了计算。各段轨道之间是以前一段的终点状态为下段飞行的初始状态来进行过渡的。

5.3 航天器的引力机动

引力机动是指航天器穿越其他星体的影响球飞行时,由于星体引力的作用产生的对原来运行轨道的改变。由于穿越飞行前,航天器和被穿越星体都是在同一个引力场中运动,穿越运动使得航天器的动量和能量发生改变,形成了变轨机动。穿越飞行产生的引力机动可以形成新的轨道,达到间接变轨的目的,实现星际飞行多样化的轨道。比如利用引力机动加速向远方飞行,或者返回地球前进行减速,以减少进入大气时的动力制动量达到节约燃料、简化结构的目的。

航天器穿越星体引力场的飞行对于星体来说都是双曲线轨道的运动,因为影响球的大小是有限的,即使航天器在星体影响球边界相对于星体的速度为零,由于引力势能的存在,极小的向内的扰动都会使航天器沿近似于抛物线的双曲线轨道飞向星体。而绝大多数情况都是航



天器到达影响球时相对星体有一个不指向其质心的速度,所以能够形成双曲线的相对运动轨道,并在绕飞星体后飞离影响球。穿越飞行涉及到两个中心引力体,所说的速度应该明确是相对于哪个引力中心的。两种速度之间的关系取决于被穿越星体相对于它的中心引力体的速度。

穿越飞行轨道的近心点位置与星体运动方向的关系决定了穿越飞行的形式,近心点在星体与其中心引力体连线星体运动方向一侧时称为前侧穿越;近心点在星体与其中心引力体连线星体运动反方向一侧时称为后侧穿越。航天器以同样参数的双曲线轨道从星体的前侧、后侧穿越飞行时,引起的速度变化是有本质差别的。下面将分别加以研究。

5.3.1 加速绕飞

当航天器从某星体的后侧穿越飞行后,其速度矢量的改变量与穿越前的速度矢量夹角为锐角,而穿越后的速度为两者的矢量和,其值大于穿越前的速度值,为加速穿越,如图 5.4。

设航天器穿越飞行前、后的相对于原中心引力体的速度为 v_1 、 v_2 ,速度改变量为 Δv 。被穿越星体相对同一中心引力体的速度为 v_B ,则航天器将以 $v_{\infty/B}^- = v_1 - v_B$ 的相对速度形成双曲线。绕飞后以 $v_{\infty/B}^+ = v_2 - v_B$ 的速度飞离星体的影响球。需要进行控制的是确保相对速度 $v_{\infty/B}^-$ 与星体质心的距离为设计值 Δ ,且近心点位于星体的后侧。由双曲线轨道的性质,有 $|v_{\infty/B}^-| = |v_{\infty/B}^+|$ 。 $v_{\infty/B}^+$ 的方向相对于 $v_{\infty/B}^-$ 的方向顺时针转过 δ 角。因 $|v_2| - |v_1| > 0$,航天器为加速绕飞。

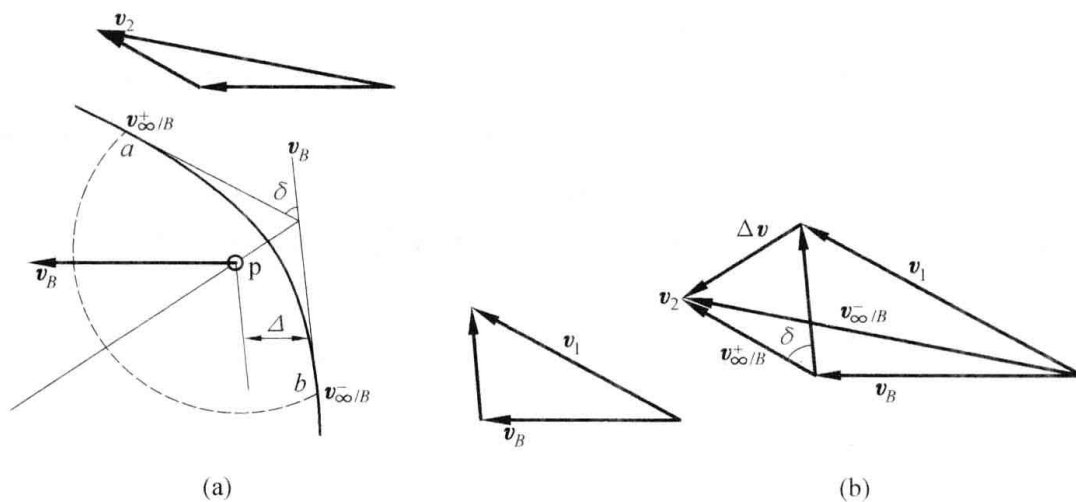


图 5.4 从星体后侧绕飞

5.3.2 减速绕飞

当航天器从某星体的前侧穿越飞行后,其速度矢量的改变量与穿越前的速度矢量夹角为钝角,而穿越后的速度为两者的矢量和,其值小于穿越前的速度值,为减速穿越,如图 5.5。

设航天器穿越飞行前、后的相对于原中心引力体的速度为 v_1 、 v_2 ,速度改变量为 Δv 。被穿



越星体相对其中心引力体的速度为 v_B , 则航天器将以 $v_{\infty/B}^- = v_1 - v_B$ 的相对速度形成双曲线。绕飞后以 $v_{\infty/B}^+ = v_2 - v_B$ 的速度飞离星体的影响球。需要进行控制的仍是确保相对速度 $v_{\infty/B}$ 与星体质心的距离为设计值 Δ , 且近心点位于星体的前侧。由双曲线轨道的性质, 仍有 $|v_{\infty/B}^-| = |v_{\infty/B}^+|$ 。而 $v_{\infty/B}^+$ 的方向相对于 $v_{\infty/B}^-$ 的方向逆时针转过 δ 角。因 $|v_2| - |v_1| < 0$, 航天器为减速绕飞。

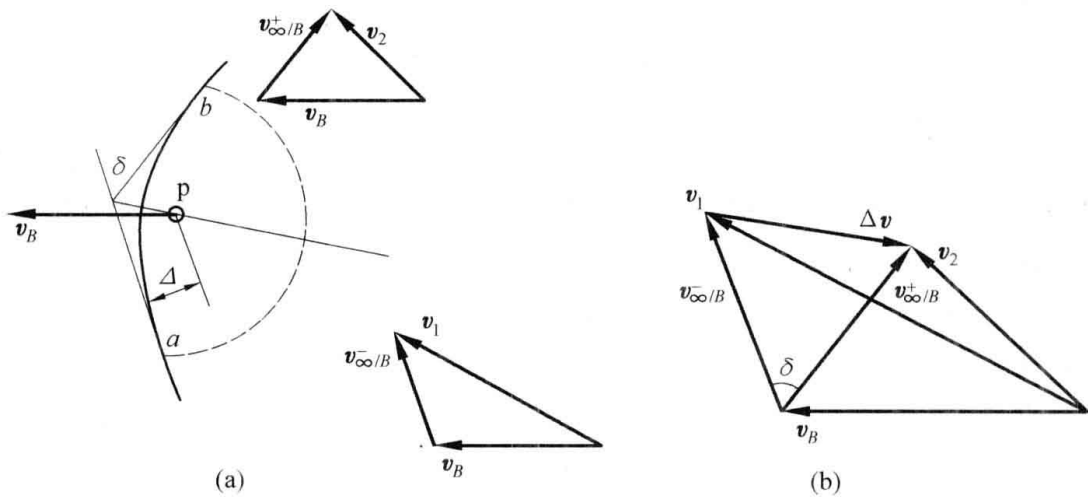


图 5.5 从星体前侧绕飞

5.3.3 绕飞后的速度改变量

由图 5.4 和图 5.5 可以看出, 不管是后侧的加速绕飞, 还是前侧的减速绕飞, 只要双曲线参数相同, 即 (e, p) 值或是 $(v_{\infty/B}^-, \Delta)$ 值相同, 则产生的 $|v_{\infty/B}^+ - v_{\infty/B}^-|$ 也必然相等。而

$$\Delta v = v_2 - v_1 = (v_{\infty/B}^+ + v_B) - (v_{\infty/B}^- + v_B) = v_{\infty/B}^+ - v_{\infty/B}^-$$

加速还是减速绕飞取决于双曲线轨道近心点相对星体运动的方位, 速度改变量 Δv 的大小则与进入影响球时的状态 $v_{\infty/B}^-, \Delta$ 密切相关。由矢量关系有

$$\Delta v = |v_2 - v_1| = |v_{\infty/B}^+ - v_{\infty/B}^-| = 2v_{\infty/B} \cdot \sin \frac{\delta}{2} \quad (5.11)$$

对于双曲线有

$$\begin{aligned} \sin \frac{\delta}{2} &= \frac{1}{e} \\ r_p &= a(1 - e) \\ \sin \frac{\delta}{2} &= \frac{1}{1 - r_p/a} \end{aligned} \quad (5.12)$$

由能量方程

$$\frac{v_{\infty/B}^2}{2} - \frac{\mu_B}{r_{\infty}} = -\frac{\mu_B}{2a}$$



$$a = -\frac{\mu_B}{v_{\infty/B}^2} \quad (5.13)$$

代入式(5.12)得

$$\sin \frac{\delta}{2} = 1/(1 + r_p v_{\infty/B}^2 / \mu_B) \quad (5.14)$$

代入式(5.11)得

$$\Delta v = \frac{2v_{\infty/B}}{1 + r_p v_{\infty/B}^2 / \mu_B} \quad (5.15)$$

显然, r_p 越小, Δv 越大, 取 $r_p = r_B$, 最小允许近心点。而 $v_{\infty/B}$ 对 Δv 的影响不是显而易见的, 故令 $d\Delta v/dv_{\infty/B} = 0$, 得

$$v_{\infty/B}^* = \sqrt{\frac{\mu_B}{r_B}} = v_{BC} \quad (5.16)$$

即当航天器以 $v_{\infty/B}^* = \sqrt{\frac{\mu_B}{r_B}}$ 的速度(恰为 r_B 处环绕速度 v_{BC}), 在距星体质心 $\Delta = \sqrt{3}r_B$ 方向进入时, 可以获得最大的速度改变量。

$$\Delta v_{\max} = v_{BC} \quad (5.17)$$

最优的绕飞轨道(*)的参数为

$$a^* = -r_B; \quad e^* = 2;$$

$$v_{\infty/B}^* = v_{BC} = \sqrt{\mu_B/r_B}; \quad \Delta^* = \sqrt{3}r_B; \quad \delta^* = 60^\circ$$

能量的改变

航天器以 Δt 时间穿越星体的影响球, 加速度(单位质量所受到的作用力)为 $\Delta v/\Delta t$, 此时星体的移动距离 $S = v_B \Delta t$, 则航天器获得的能量为

$$\Delta \epsilon = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \cdot \mathbf{v}_B \Delta t = \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_B \quad (5.18)$$

此为航天器与星体的能量转移, 两者在原中心引力场中的能量是守恒的。

利用星体的引力效应进行航天器的机动变轨, 其效果 Δv 取决于目标星体, 涉及目标星体的质量与允许飞行的最低高度及其自身的运行速度。太阳系中的行星的穿越飞行效果见图 5.6 中的曲线所示。

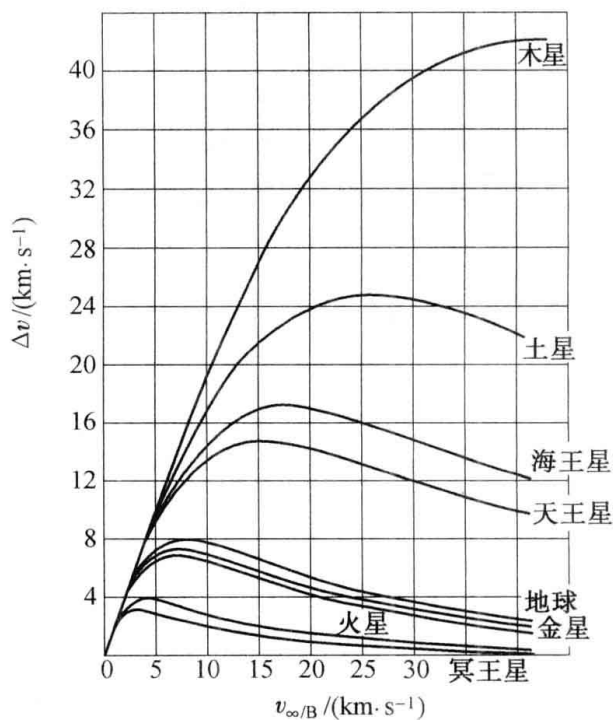


图 5.6 行星引力机动效果



5.4 限制性三体问题

行星际飞行实际上是个 N 体问题,通常求解的方法是运用数值计算。数值计算可以同时考虑多个星体的作用,而且求解精度高,可以用于轨道的精确分析。但物理概念不突出,难于找出有关参数的内在联系。二体问题可以给出解析解,物理概念明了,各量间的关系清楚,精度可以保证基本理论学习和任务初步设计的使用。三体系统在特殊情况下可以得到某些运动的规律。

5.4.1 两引力体的运动

三体系统的一般问题目前仍无解析解,如果加入一定的约束条件就可以对特殊的三体系统——圆型限制性三体问题(CR3BP, Circular Restricted Three-body Problem)求解了。假设

- (1) 航天器的质量相对引力体是小量,可以略去它对引力体的影响和它的质量;
- (2) 两引力体绕其公共质心作圆运动。

略去航天器的对两引力体的影响后,限制性三体系统绕其公共质心的运动为两引力体构成的两体运动。在惯性空间的转动周期为 $T = 2\pi \sqrt{r^3/\mu}$, 角速度为 $\omega = \sqrt{\mu/r^3}$, 显然 $\mu = G(M_1 + M_2)$ 。

5.4.2 航天器的运动

过两引力体系统质心 C 建立坐标系 $CXYZ$, CX 轴在 M_1M_2 的连线上, CZ 轴为系统角速度方向, CY 轴与 CX, CZ 轴构成右手坐标系,如图 5.7。由质心特性,两引力体的坐标为 $(a_1, 0, 0)$ 和 $(-a_2, 0, 0)$ 。

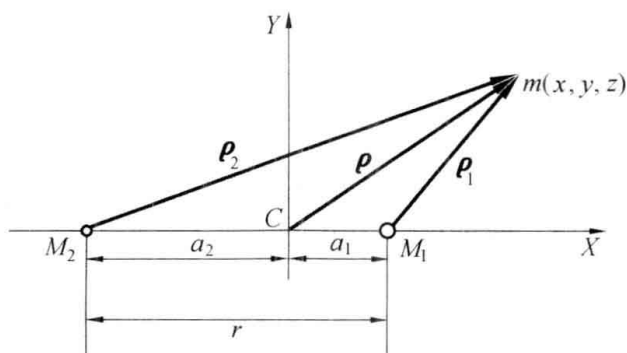


图 5.7 系统质心坐标系

$$a_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} r, \quad a_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} r$$

航天器在 $CXYZ$ 坐标系的坐标为 (x, y, z) , 其相对于坐标系原点 C 的, 和其相对于两引力



体的位置矢量分别为 $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\rho}_1$ 和 $\boldsymbol{\rho}_2$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\rho}_1 &= (x - a_1)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\rho}_2 &= (x + a_2)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\end{aligned}$$

航天器的引力加速度(单位质量上的作用力)为

$$\mathbf{f} = -\frac{\mu_1}{\rho_1^3}\boldsymbol{\rho}_1 - \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\boldsymbol{\rho}_2 \quad (5.19)$$

其中, $\mu_1 = GM_1$, $\mu_2 = GM_2$ 。

将 $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2$ 代入上式得

$$\mathbf{f} = -\left[\frac{\mu_1}{\rho_1^3}(x - a_1) + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}(x + a_2)\right]\mathbf{i} - \left[y\left(\frac{\mu_1}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\right)\right]\mathbf{j} - \left[z\left(\frac{\mu_1}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\right)\right]\mathbf{k} \quad (5.20)$$

M_1 与 M_2 组成的引力场的势函数为

$$U = -\frac{\mu_1}{\rho_1} - \frac{\mu_2}{\rho_2} \quad (5.21)$$

其中, $\rho_1 = \sqrt{(x - a_1)^2 + y^2 + z^2}$, $\rho_2 = \sqrt{(x + a_2)^2 + y^2 + z^2}$

对 U 求方向导数

$$\frac{\partial U}{\partial x} = (x - a_1)\frac{\mu_1}{\rho_1^3} + (x + a_2)\frac{\mu_2}{\rho_2^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y\frac{\mu_1}{\rho_1^3} + y\frac{\mu_2}{\rho_2^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = z\frac{\mu_1}{\rho_1^3} + z\frac{\mu_2}{\rho_2^3}$$

则有

$$\mathbf{f} = -\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} \quad (5.22)$$

由牛顿第二定律

$$\mathbf{f} = \ddot{\boldsymbol{\rho}}$$

$\ddot{\boldsymbol{\rho}}$ 为惯性坐标系中的二阶时间导数, 在动坐标系 $CXYZ$ 中的二阶时间导数(以空心点 \circ 表示)为 $\ddot{\boldsymbol{\rho}}$ 。

因

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$$

所以

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} \quad (5.23)$$

因 $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, 且 $\omega = \text{const}$, 故有

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x)\mathbf{i} + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2y)\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \quad (5.24)$$

分量相等

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\mu_1}{\rho_1^3}(x - a_1) + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}(x + a_2) \quad (5.25)$$



$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\mu_1}{\rho_1^3} y - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} y \quad (5.26)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\mu_1}{\rho_1^3} z - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} z \quad (5.27)$$

式(5.25) ~ (5.27) 为三体问题的基本方程式。

以 $\dot{x} \times (5.25) + \dot{y} \times (5.26) + \dot{z} \times (5.27)$, 化简得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} \omega^2 \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = -dU/dt$$

积分上式, 有

$$\frac{v^2}{2} - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) + U = C$$

上式称为限制型三体问题中的雅可比(Jacobi)积分, C 为雅可比积分常数。显然有

$$C = \frac{v_0^2}{2} - \frac{1}{2} \omega^2 (x_0^2 + y_0^2) + U_0$$

改写雅可比积分得

$$v^2 = \omega^2 (x^2 + y^2) - 2U + 2C \geq 0$$

航天器可能的飞行域边界——零速度面(亦称希尔曲面)由

$$\omega^2 (x^2 + y^2) - 2U + 2C = 0$$

确定, 即

$$\omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{2\mu_1}{\sqrt{(x-a_1)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{2\mu_2}{\sqrt{(x+a_2)^2 + y^2 + z^2}} = -2C \quad (5.28)$$

从大到小取 8 个 $-2C$ (见表 5.1), 绘出式(5.28) 表示的零速度面与 CXY 平面的交线。

表 5.1 地月系统能量参数

状态	$2C_1$	$2C_2$	$2C_3$	$2C_4$	$2C_5$	$2C_6$	$2C_7$	$2C_8$
数值	3.500	3.343	3.338	3.326	3.300	3.159	3.150	3.135

航天器可能的飞行域(阴影区为不能到达区域)

能量较大为 C_1 时, 航天器或者远离两引力体运动(势能大), 或者在两引力体附近运动(动能大), 见图 5.8; 能量减少为 C_2 , 外部范围缩小, 两引力体附近运动范围加大, 出现 L_1 点, 见图 5.9; 能量减少为 C_3 , 两引力体附近在 L_1 连通, 见图 5.10; 能量减少为 C_4 , 两引力体附近范围加大, 出现 L_2 点, 见图 5.11; 能量减少为 C_5 , L_2 点附近连通, 里外合一, 见图 5.12; 能量减少为 C_6 , 不能到达的区域减小, 出现 L_3 点, 见图 5.13; 能量减少为 C_7 , 不能到达的区域减小成为两部分, 见图 5.14; 能量减少为 C_8 , 出现 L_4, L_5 点, 见图 5.15。总体效果见图 5.16。

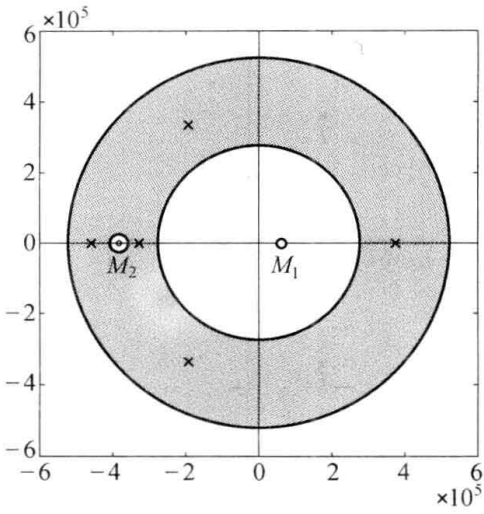


图 5.8 C_1 能量的飞行域

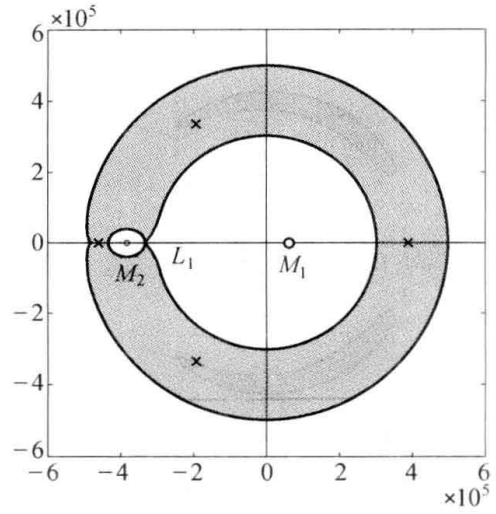


图 5.9 C_2 能量的飞行域

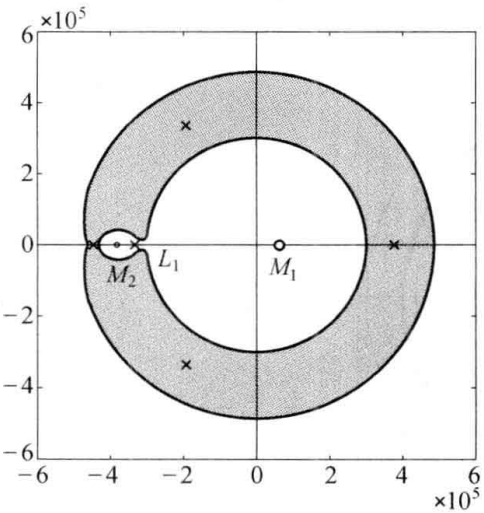


图 5.10 C_3 能量的飞行域

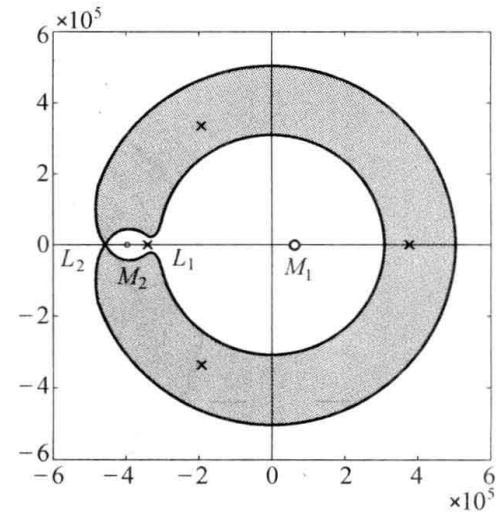


图 5.11 C_4 能量的飞行域

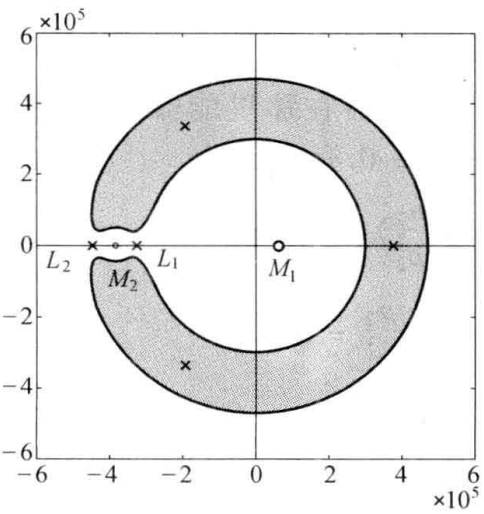


图 5.12 C_5 能量的飞行域

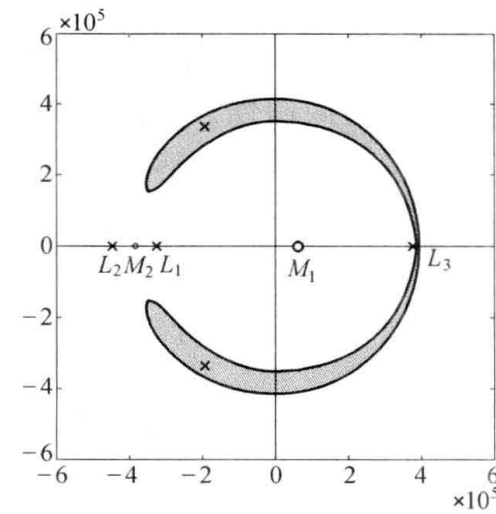


图 5.13 C_6 能量的飞行域

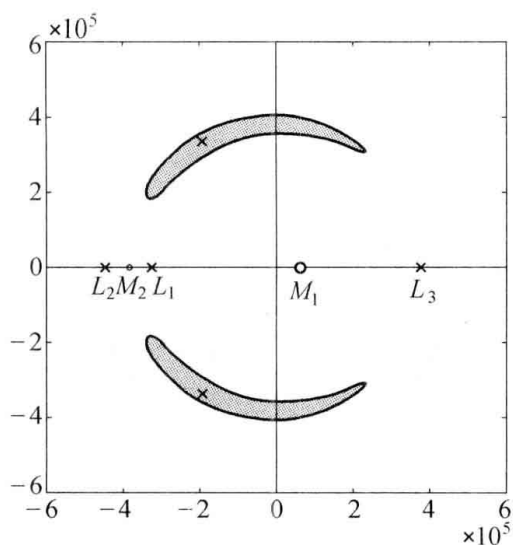


图 5.14 C_7 能量的飞行域

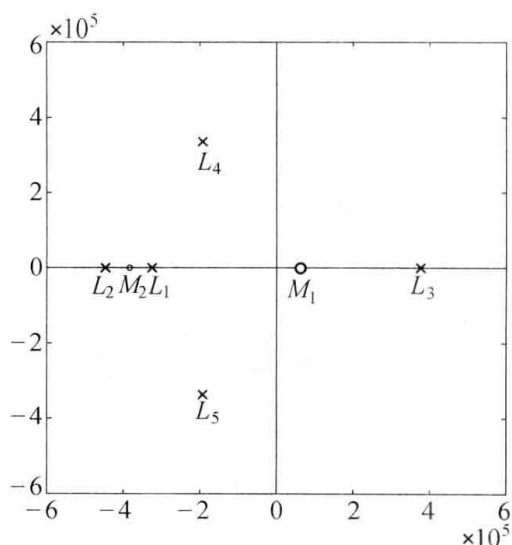


图 5.15 C_8 能量的飞行域

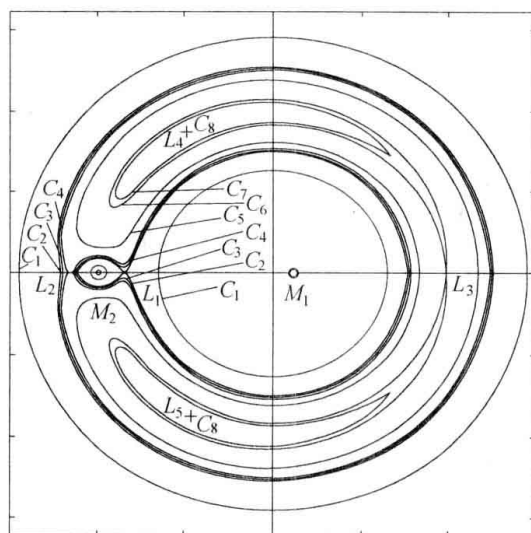


图 5.16 航天器的飞行域边界变化汇总

$L_1 \sim L_5$ 点为限制性三体问题的五个平衡点, 航天器在那里能够达到平衡。由式 (5.25) ~ (5.27) 和平衡条件 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0; \ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$, 有

$$x\omega^2 = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad y\omega^2 = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad z\left(\frac{\mu_1}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\right) = \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

即

$$\omega^2 x - (x - a_1) \frac{\mu_1}{\rho_1^3} - (x + a_2) \frac{\mu_2}{\rho_2^3} = 0 \quad (5.29)$$

$$\omega^2 y - y \frac{\mu_1}{\rho_1^3} - y \frac{\mu_2}{\rho_2^3} = 0 \quad (5.30)$$

平衡点在 $x - y$ 平面上 ($z = 0$), 对于 x 轴, 即 $y = 0$, 有



$$\omega^2 x - \frac{(x - a_1)\mu_1}{|(x - a_1)^3|} - \frac{(x + a_2)\mu_2}{|(x + a_2)^3|} = F(x) = 0$$

此方程有 3 个实根, $L_1(x_1, 0, 0)$, $L_2(x_2, 0, 0)$, $L_3(x_3, 0, 0)$ 为共线平衡点。

$y \neq 0$ 时, 由 $\omega^2 - \frac{\mu_1}{\rho_1^3} - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} = 0$ 乘 x 与式(5.29) 相减得

$$\frac{a_1\mu_1}{\rho_1^3} - \frac{a_2\mu_2}{\rho_2^3} = 0 \quad (5.31)$$

质心特性: $a_1\mu_1 = a_2\mu_2$, 得: $\rho_1 = \rho_2 = a_1 + a_2$, 即

$$x_4 = x_5 = \frac{a_1 - a_2}{2} \quad y_4 = -y_5 = \frac{\sqrt{3}(a_1 + a_2)}{2}$$

有 $L_4(x_4, y_4, 0)$ 和 $L_5(x_5, y_5, 0)$ 两个不共线平衡点。

L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 点为圆型限制性三体问题的五个特解, 亦称拉格朗日点(Lagrange Point)或天平动点(Libration Point)。其中, L_1, L_2, L_3 为不稳定平衡点, L_4, L_5 为稳定平衡点, 为能量最低点。且有:

$$L_4M_1 = L_4M_2 = L_5M_1 = L_5M_2 = M_1M_2$$

5 个平衡点的具体坐标取决于 M_1, M_2 的大小和距离。常用的地月、日地系统平衡点参数见表 5.2。

表 5.2 地月、日地系统平衡点参数

km

	L_1M_2	L_2M_2	L_3M_1	L_4M_1	L_5M_1
地月系统	$5.776 0 \times 10^4$	$6.534 8 \times 10^4$	$3.805 56 \times 10^5$	3.844×10^5	3.844×10^5
日地系统	1.497×10^6	1.508×10^6	1.496×10^8	1.496×10^8	1.496×10^8

5.4.3 平动点附近的运动

在两个大天体之间, 如太阳与行星、行星与卫星, 都存在着相应的拉格朗日点。航天器在拉格朗日点附近的运动很显然是一种原于限制性三体问题的特殊运动, 它有别于两个大天体近距离的快速环绕飞行和绕两个大天体远距离的慢速环绕飞行, 这两种状态下航天器的运动更接近于中心引力场中的运动。

五个拉格朗日点中, L_1 点和 L_2 点因为其独特的空间位置在星际探测中最值得关注。日地系统的 L_1 点就是一个可以连续观测太阳的理想位置, 因为它始终在日地连线上。日地系统的 L_2 点因为它始终在日地连线地球一侧, 太阳对观测设备的影响最小, 是研究天文、观测宇宙的理想场所。共线的拉格朗日点附近为弱稳定区, 对能量变化比较敏感。航天器可在弱稳定区内远距离巡回移动或沿着弱稳定区飞行以节约燃料。由于弱稳定区中相对速度极小, 交会时间也



不受到限制,还是航天器交会对接的理想地点,是太空基地和星际航行港的良好天址。多个拉格朗日点的航天器已成功发射,更多的计划也在实施中。

航天器在共线拉格朗日点附近的动力学方程可以由限制性三体问题的基本方程式(5.25)~(5.27)平移到 L_i 后得到。设共线 L_i 点的坐标为 $(x_i, 0, 0)$, 则在原点为 L_i 点的平移坐标系中的动力学方程为

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2(x + x_i) = -\frac{\mu_1}{\rho_1^3}(x + x_i - a_1) - \frac{\mu_2}{\rho_2^3}(x + x_i + a_2) \quad (5.32)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = -\frac{\mu_1}{\rho_1^3} y - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} y \quad (5.33)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu_1}{\rho_1^3} z - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} z \quad (5.34)$$

其中, $\rho_1 = \sqrt{(x + x_i - a_1)^2 + y^2 + z^2}$, $\rho_2 = \sqrt{(x + x_i + a_2)^2 + y^2 + z^2}$

式(5.32)~(5.34)构成的在 L_i 点附近运动的动力学方程是复杂的二阶非线性微分方程组,很显然不能得到解析解。通常根据所研究问题需要的精度要求进行相应的简化求解。共线平动点附近的运动是不稳定的,但却可以有条件稳定,即存在条件周期轨道——Lyapunov 轨道与晕(Halo)轨道,这些轨道可用解析或者数值的方法给出。以线性模型是无法构造共线平动点附近的晕轨道的,至少需考虑泰勒级数展开取三阶或以上的非线性模型。在共线平动点附近的航天器轨道选择较多的是晕轨道。晕轨道的三阶近似解析解由 Richardson 给出,对于精度要求较高的研究任务来说,需要采用数值方法进一步得到足够精度的晕轨道,解析解则可作为数值方法的初始值。

研究航天器在共线的 L_i 点附近运动的特性时,可以将方程右边进行泰勒级数展开并取一阶项,可得相对 L_i 点运动的线性化方程

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - (\omega^2 + 2C)x = 0 \quad (5.35)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - (\omega^2 - C)y = 0 \quad (5.36)$$

$$\ddot{z} + Cz = 0 \quad (5.37)$$

其中, $C = \frac{\mu_1}{(x_i - a_1)^3} + \frac{\mu_2}{(x_i + a_2)^3}$

在线性化的方程中容易看出,航天器在 $x - y$ 平面的运动是耦合的,而 z 方向的运动是独立的,并且为简谐振动。线性化常微分方程组(5.35)~(5.37)的特征值分别是 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$, 其中

$$\lambda_1, \lambda_2 = \pm C_1, \lambda_3, \lambda_4 = \pm iC_1, \lambda_5, \lambda_6 = \pm iC_2。$$

由线性常微分方程组的特征值构成可以看出共线平动点具有中心和鞍点的双重性质。 $\lambda_1 > 0$ 表明共线平动点是不稳定的,而两对复特征值的存在表明共线平动点附近存在中心流形。



线性常微分方程组的通解为

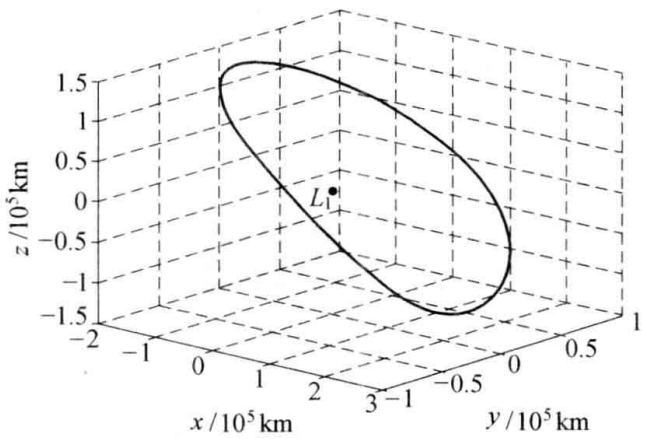
$$x = A_1 e^{C_1 t} + A_2 e^{-C_1 t} + A_3 \cos C_1 t + A_4 \sin C_1 t \quad (5.38)$$

$$y = B_1 e^{C_1 t} + B_2 e^{-C_1 t} + B_3 \cos C_1 t + B_4 \sin C_1 t \quad (5.39)$$

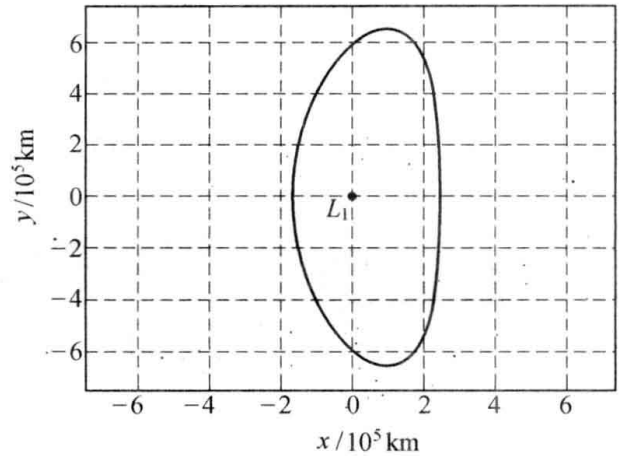
$$z = A_5 \cos C_2 t + A_6 \sin C_2 t \quad (5.40)$$

为共线平动点附近运动的一阶解析解,包括了双曲项和中心项。

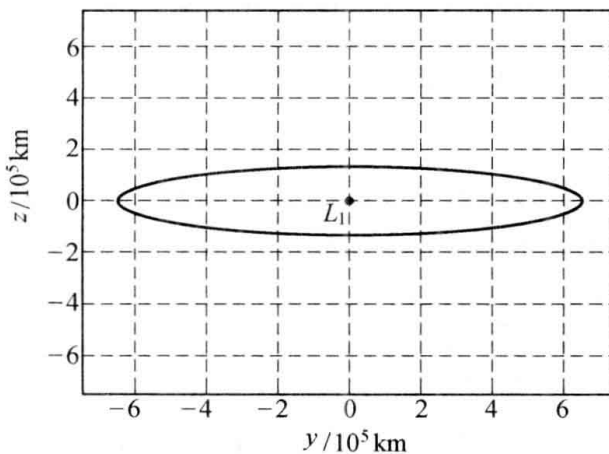
C_1 和 C_2 分别为 $x - y$ 平面内、外的运动角频率。当 $C_1 = C_2$ 时,称为 Halo 轨道,是封闭的周期轨道,如图 5.17 所示;当 $C_1 \neq C_2$ 时,称为 Lissajous 轨道,是不封闭的准周期轨道,如图 5.18 所示。Halo 轨道和 Lissajous 轨道是三体问题中的特有形式的轨道,与开普勒平面轨道不同,是空间曲线。



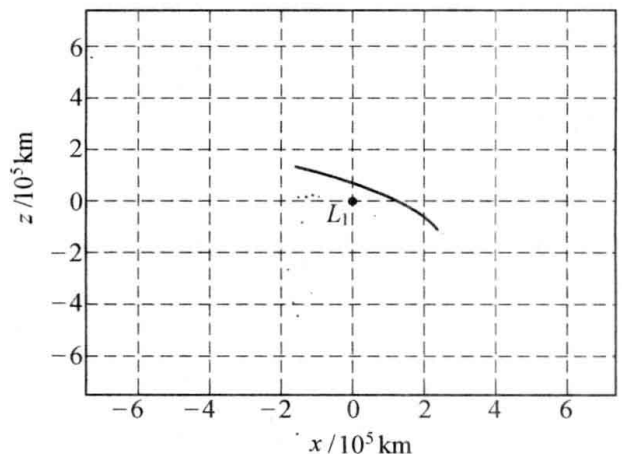
(a) Halo 轨道的三维图



(b) Halo 轨道的 $x-y$ 平面投影图

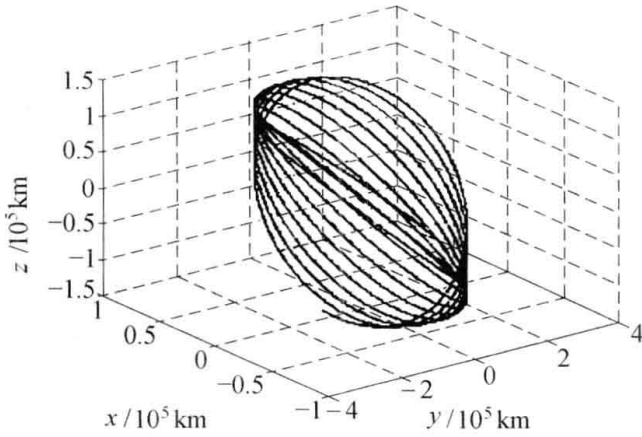


(c) Halo 轨道的 $y-z$ 平面投影图

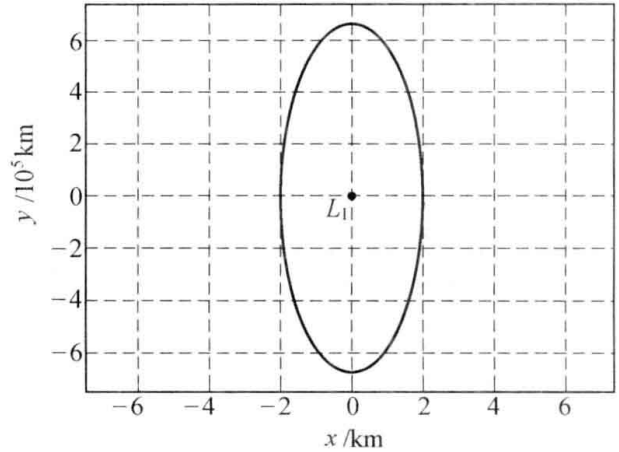


(d) Halo 轨道的 $x-z$ 平面投影图

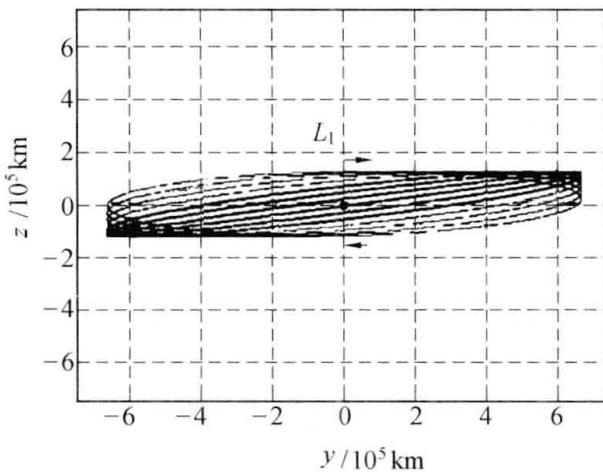
图 5.17 共线平衡点的 Halo 轨道



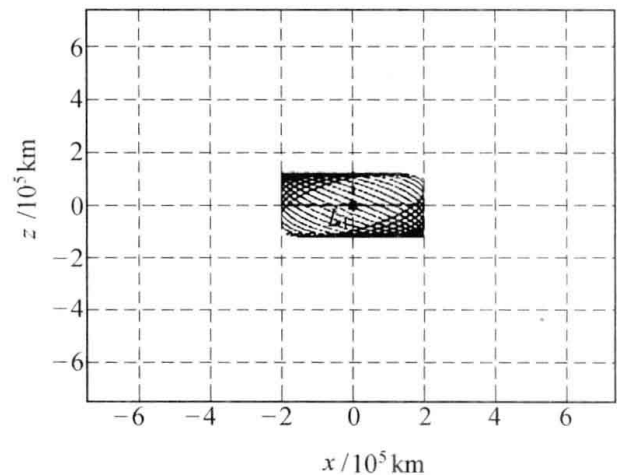
(a) Lissajous 轨道的三维图



(b) Lissajous 轨道的 x - y 平面投影图



(c) Lissajous 轨道的 y - z 平面投影图



(d) Lissajous 轨道的 x - z 平面投影图

图 5.18 共线平衡点的 Lissajous 轨道

5.4.4 经过平衡点的运动

圆型限制性三体问题是一个非线性系统,共线平动点为奇点(Singular Point),航天器的运动在共线平动点附近呈现为混沌(Chaotic)状态,见图 5.19。其混沌运动可分四类:周期或准周期轨道(Halo Orbit)、渐近轨道(Asymptotic Orbit)、穿越轨道(Transit Orbit)和非穿越轨道(Non-transit Orbit)。渐近稳定轨道形成稳定流形(Stable Manifold),渐近不稳定轨道形成不稳定流形(Unstable Manifold)。稳定流形与不稳定流形统称为不变流形(Constant Manifold)。 L_i 周围的闭合曲线对应着(拟)周期轨道,为中心型奇点的表现;渐近轨道、穿越轨道和非穿越轨道,为鞍点(Saddle Point)型奇点的表现,因而圆型限制性三体问题中的共线奇点具有鞍点和中心的双重性质。航天器可以通过稳定流形到达平动点附近的周期或准周期轨道,通过不稳定流形离开平动点附近的周期或准周期轨道。

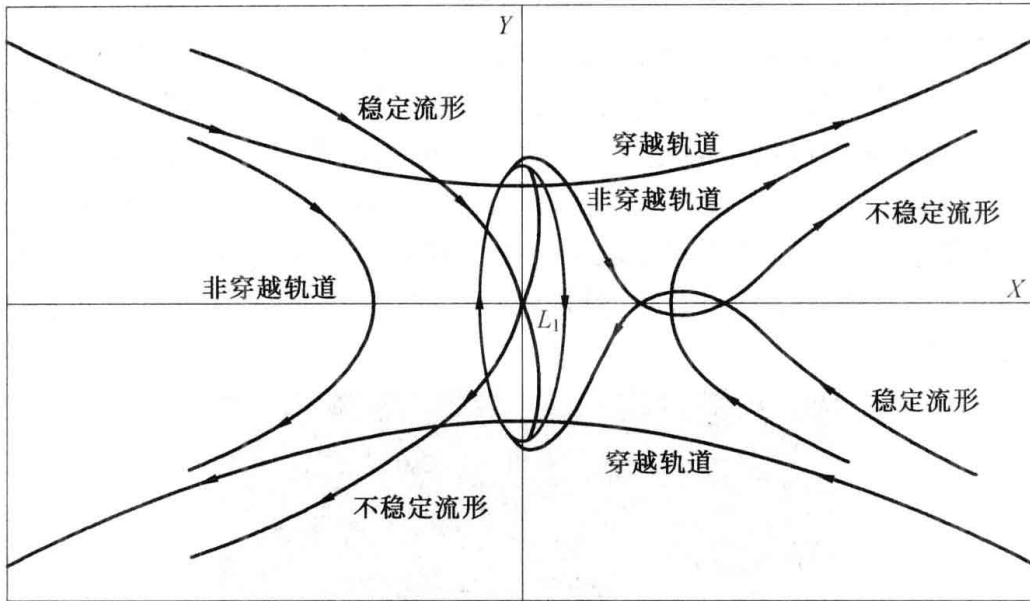


图 5.19 共线平动点附近运动形式的 $X - Y$ 平面投影

5.4.5 行星际超导通道

相同类型的流形(Manifold)的集合在空间形成有方向的管状区域,在平衡点周围构成了不同类型的流形通道。进一步的研究表明,共线平动点的 Halo 轨道附近存在有流向 Halo 轨道的稳定流形和离开 Halo 轨道的不稳定流形构成的不变流形的空间通道。而且三个平动点的不变流形通道可以通过切换界面 U_i 互相连接,在一定条件下切换,从一个平动点的不稳定流形到达另一个平动点的稳定流形,如图 5.20 所示。 L_1 点的不变流形可以达到大引力体的另一侧; L_2 点的不变流形可以超出 M_1L_2 的半径环绕 M_1 。

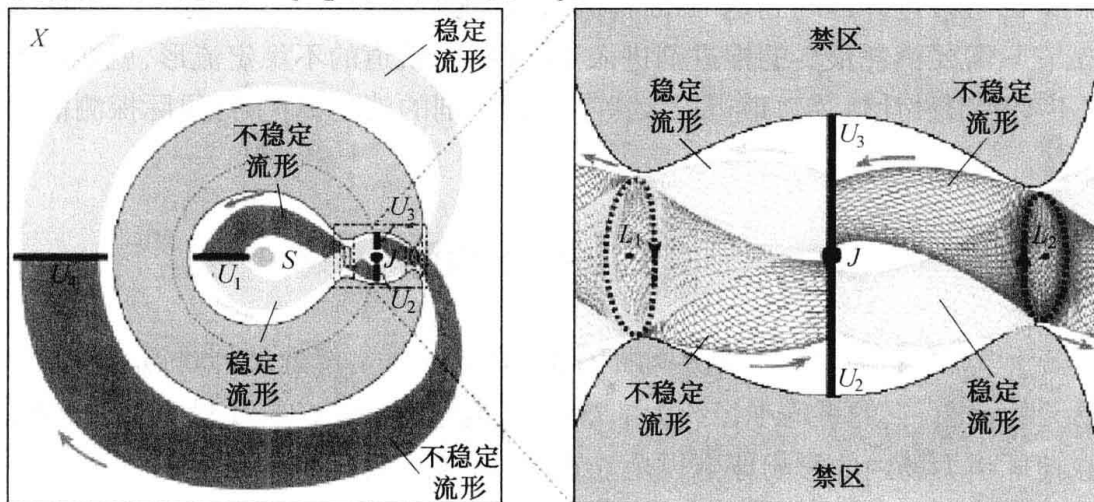


图 5.20 三体系统的不变流形



在太阳系中,太阳与行星、行星与卫星都可以与航天器构成圆型限制性三体问题,每个三体系统都有自己的不变流形,只是流形的尺度和方位会有所不同。由于存在行星绕太阳的公转运动,行星间的相对位置、行星与卫星间的相对位置会不断变化,存在多个三体问题的流形相交的状态,因而航天器可以以极小的能量增量通过流形在行星际乃至卫星间运动。这些相交的流形也被称为“行星际高速公路(IPS, Interplanetary Superhighway)”,如图 5.21。称为高速公路实际上是指它像高速公路网能够不间断地连接各个城市那样的连接各个行星及卫星,实际上航天器在这样的流形上的运动是很慢的,只是建立这种运动的能量比较节省而已。更恰当的称谓应该是“行星际超导通道”。

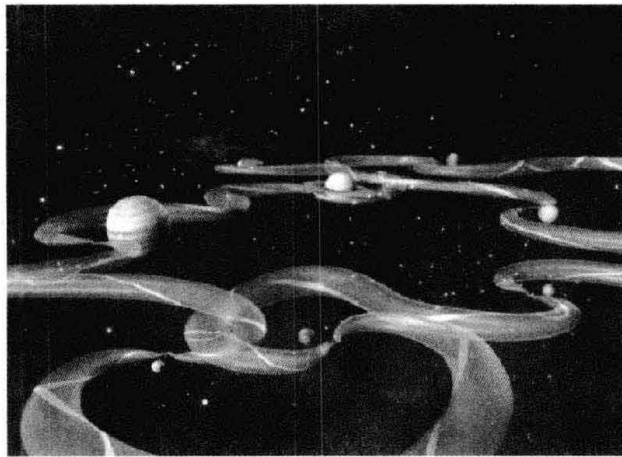


图 5.21 行星际超导通道示意图

IPS 是一个巨大的通道网络,航天器能以非常低的能量转移到太阳系任何地方,它是由太阳系内所有星体(能够使航天器绕飞的)的不变流形组成的轨线网络,使得星际飞行有了更多彩的内容。如果航天器需要到达 Halo 轨道,那么它只需要消耗很少的推进剂进入该平动点的稳定流形就能渐近接近并最终到达 Halo 轨道;如果航天器需要飞离目前的三体系统的小引力体 M_2 ,那么它只需要消耗很少的推进剂进入 L_2 点 Halo 轨道的不稳定流形,就能渐近远离 M_2 。因此,利用不变流形设计转移轨道可以大大节省推进剂的消耗,对于行星际探测活动是非常有意义的。

5.5 月球探测

月球是距地球最近的天体,月地平均距离 3.844×10^5 km,绕地球的轨道为偏心率 0.054 9,周期 27.32 天的椭圆。它的平均半径约为 1 738 km(地球的 1/3.67),质量 7.35×10^{22} kg(地球的 1/81.5),在地球引力场内的影响球半径是 6.61×10^4 km。月球绕地球运行的轨道平面称为白道,与地球绕太阳运转的轨道平面(称为黄道)之间的夹角为 5.8° ,且两平面的交线以 18.6 年的周期自东向西退行;而赤道平面与黄道的夹角保持着 $23^\circ 27'$,方向固定(指向春分点)。因此,



赤道与白道的夹角在 $18^{\circ}19' \sim 28^{\circ}35'$ 之间。

月球探测航天器的飞行方案按与月球的位置关系可分为以下六种：

(a) 飞越月球

探测器以相对于地球的抛物线或双曲线轨道飞向月球,在月球附近越过月球,然后脱离地球影响球成为人造行星。

(b) 绕月飞行

探测器进入月球影响球后,以近心点半径大于月球半径的双曲线轨道飞向月球,在近心点处绕月飞行,然后飞出月球影响球。

(c) 撞击月球

探测器进入月球影响球后,以近心点半径小于月球半径的双曲线轨道飞向月球,与月面碰撞,或从绕飞轨道上做机动,然后撞向月面。

(d) 环月飞行

探测器进入月球影响球后,在月心双曲线的适当位置进行制动,使探测器成为环绕月球运动的人造月球卫星。

(e) 月面着陆

探测器进入月球影响球并成为月球卫星后,在飞向月面过程中不断降低与月心的相对速度,使之以相对于月球的速度接近于零状态着陆月面。

(f) 着月并返回地球

探测器或着陆舱部分首先按(e)在月球上软着陆,完成预定任务后,着陆舱器或返回舱部分从月面上起飞,进入环月飞行轨道,择机加速飞离月球影响球并进入返回地球的地心椭圆轨道。

月球探测航天器的轨道按轨道面的位置可以分为同面和异面轨道两种,航天器的轨道面在白道面内称为同面飞行,反之为异面飞行。月球探测航天器的轨道应该是典型的圆形限制性三体问题,即使是轨道面与白道面不重合。在方案论证阶段和轨道初步设计阶段,双二体方法还是非常有效的。本节只研究同平面两体意义下的向月飞行的问题。

5.5.1 飞向月球

由地球飞向月球的飞行,只要考虑在地球影响球和月球影响球内飞行的两个阶段,通常先将航天器发射到近地圆形停泊轨道,择机飞向月球。以霍曼轨道过渡时,近地点和远地点与停泊轨道及月球轨道相切,见图 5.22,取椭圆的 r_a 与月球轨道半径 r_M 相等, $r_p = 6\,600\text{ km}$,则霍曼过渡轨道的参数为

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = 1.955 \times 10^5 \text{ km}, \quad e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = 0.966$$



$$v_p = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_p} \frac{2r_a}{r_p + r_a}} = 1.402 \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_p}} = 10.90 \text{ km/s}$$

$$t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_{\oplus}}} = 430\,131.62 \text{ s} = 4.978 \text{ d}$$

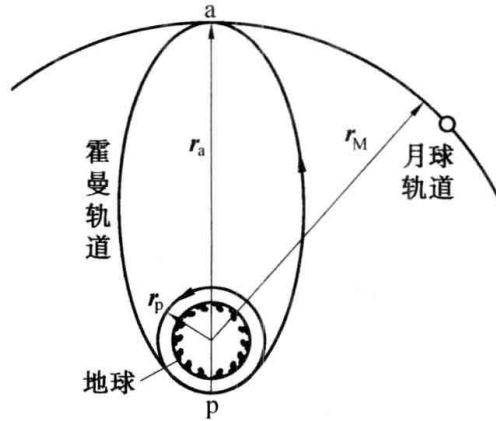


图 5.22 向月飞行的霍曼轨道

从地球飞到月球的时间是过渡轨道周期之半,即这是向月球飞行的最长时间。加大椭圆的半长轴,可以缩短过渡时间。这样做需要增加一定的能量,但飞行时间却可大幅缩减。如将 r_a 增至无穷大成为抛物线轨道时,有 $v_p = \sqrt{2}v_c$,只不过增加 8% 略多,然而飞行时间却可减少很多。取 r_a 为 r_M 的两倍,则

$$a = 3.877 \times 10^4 \text{ km}, \quad e = 0.983, \quad v_p = 10.94 \text{ km/s}$$

到达月球轨道时 $r = r_M$,对应的真近角是 $\theta = 169.32^\circ$,由时间方程可以求得到达月球的时间是 2.56 d。速度增加了不足 0.4%,而运行时间却减少了一半。如图 5.23 所示。

航天器到达月球时的速度可以由能量方程式

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu_{\oplus}}{r} = -\frac{\mu_{\oplus}}{2a}$$

求得。

$$v_1 = \sqrt{\mu_{\oplus} \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)} = 1.022\,6 \text{ km/s}$$

因

$$r_1 v_1 \cos \beta_1 = r_p v_p$$

$$\beta_1 = \arccos(r_p v_p / r_1 v_1) = 79.42^\circ$$

月球相对地球的速度为

$$v_M = \sqrt{\mu_{\oplus} / r_M} = 1.018 \text{ km/s}$$

航天器相对于月球的速度为(图 5.24)

$$v_{\infty} = v_1 - v_M \tag{5.41}$$



$$v_{\infty}^{-} = \sqrt{v_1^2 + v_M^2 - 2v_1v_M\cos\beta_1} = 1.30 \text{ km/s}$$

$$\Phi^{-} = 180^{\circ} - \arccos[(v_M^2 + v_{\infty}^{-2} - v_1^2)/2v_Mv_{\infty}^{-}] = 129.42^{\circ}$$

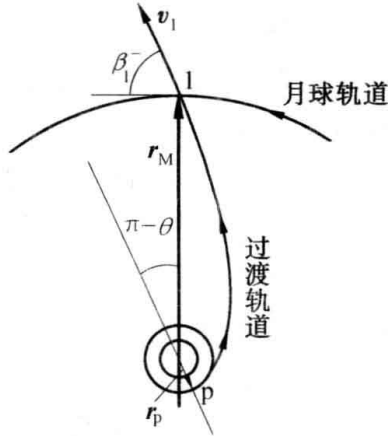


图 5.23 大椭圆过渡轨道

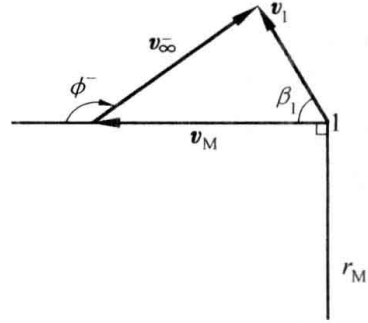


图 5.24 航天器进入速度

以 $r_p = r_M$ 绕飞(见图 5.25), 则有

$$e = 1 + r_p v_{\infty}^2 / \mu_M = 1 + r_M v_{\infty}^2 / \mu_M = 1.60$$

$$a = r_p / (1 - e) = -2896.67 \text{ km}$$

$$\delta = 2\arcsin(1/e) = 77.36^{\circ}$$

前侧绕飞时:

在 $\Delta 123'$ 中, v_{∞}^+ 相对于 v_{∞}^{-} 顺时针转过 δ , 与 v_M 的夹角

$$\alpha = (\Phi^{-} + \delta) - 180^{\circ} = 26.78^{\circ}$$

$$v_2 = \sqrt{v_{\infty}^2 + v_M^2 - 2v_{\infty}v_M\cos\alpha} = 0.60 \text{ km/s}$$

$$\beta_1^+ = 180^{\circ} - \arccos[(v_M^2 + v_2^2 - v_{\infty}^2) / 2v_2v_M] = 76.09^{\circ}$$

回到地球影响球后, 仍为椭圆轨道。

后侧绕飞时:

在 $\Delta 123''$ 中, v_{∞}^+ 相对于 v_{∞}^{-} 逆时针转过 δ , 与 v_M 的夹角

$$\alpha = 180^{\circ} - (\Phi^{-} - \delta) = 127.94^{\circ}$$

$$v_2 = \sqrt{v_{\infty}^2 + v_M^2 - 2v_{\infty}v_M\cos\alpha} = 2.086 \text{ km/s} > \sqrt{2}v_M$$

$$\beta_1^+ = 180^{\circ} - \arccos[(v_M^2 + v_2^2 - v_{\infty}^2) / 2v_2v_M] = 29.43^{\circ}$$

回到地球影响球后, 变为双曲线轨道, 飞离地球引力场。

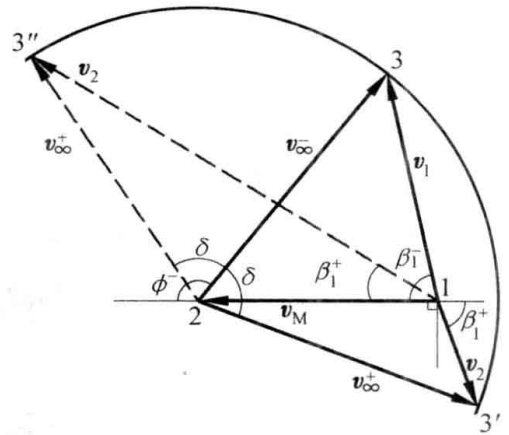


图 5.25 绕飞月球



5.5.2 探月飞行的完整轨道

两体意义下的航天器一条完整的探月飞行轨道一般由多段圆锥曲线组成,有以地球为中心引力体的运动,有以月球为中心引力体的运动。不同的到达速度 v_1 , 不同的进入方式, 也对应着不同的探月轨道。探月飞行方案(b) 和(c) 的前一种方式为局部向月(不管是前侧还是后侧进入)的飞行, 其任务轨道只包含从地球出发飞向月球和在月球引力场中飞向月球的2段轨道; 探月飞行方案(c) 的后一种方式、(d) 和(e) 都包含完整绕月轨道, 其任务轨道包含从地球出发飞向月球、在月球引力场中飞向月球和环绕月球的3段轨道; 探月飞行方案(f) 增加了返回地球的轨道, 包括飞离月球引力场和在地球引力场中返回地球的2段轨道。

同一轨道, 航天器在地-月固连坐标系和地球固连坐标系中的飞行轨迹有着很大的差别。在前者中为多段圆锥曲线连接起来的图形, 在后者中月球是运动的, 航天器在月球附近飞行轨迹是圆锥曲线与月球转动运动的叠加。图 5.26 ~ 图 5.31 中的(a) 均为地-月固连坐标系中的轨迹, (b) 为地心固连坐标系中的轨迹。1 为航天器的轨道, 2, 3, 4 分别为航天器出发、绕月和返回时月球的位置。图 5.26 和 5.27 为两种绕月飞行的轨道, 图 5.28 和 5.29 为两种非绕月飞行的轨道。这几种飞行方案的共同点是航天器均从月球前方进入月球影响球, 不同点是绕月飞行时, 航天器是从月球后方返回地球; 不绕飞时, 航天器是从月球前方折返。图 5.30 和 5.31 为两种可以直接到达月面的飞行轨迹, 航天器在飞向月球时可以是椭圆、抛物线和双曲线, 进入到月球影响球后只能是以近心点半径小于月球半径的确定轨道飞行, 或撞击月面, 或制动软着陆月面。

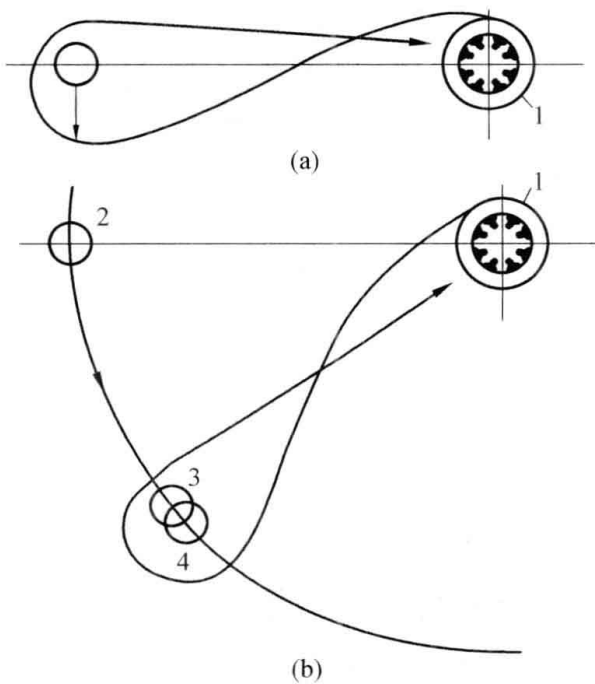


图 5.26 绕月飞行轨道之一

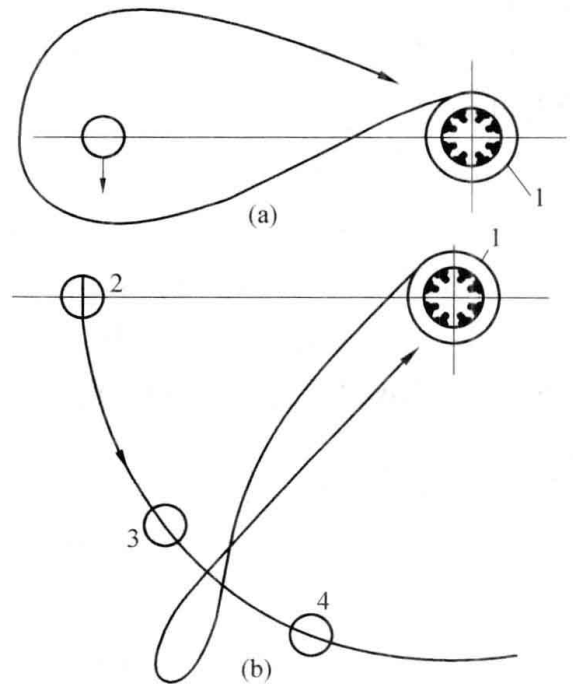


图 5.27 绕月飞行轨道之二

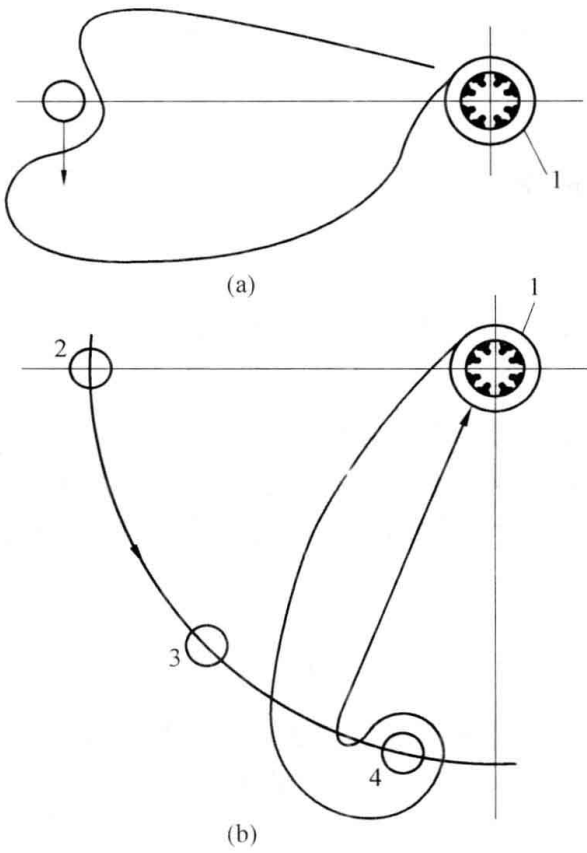


图 5.28 非绕月飞行轨道之一

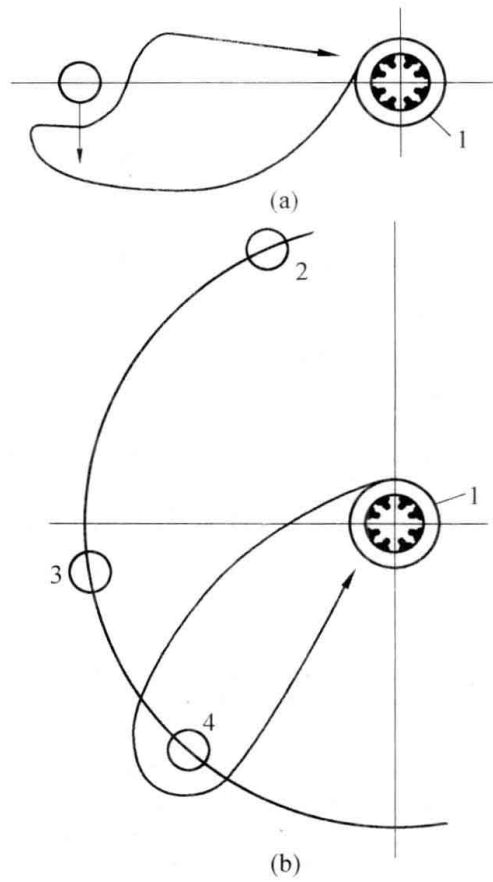


图 5.29 非绕月飞行轨道之二

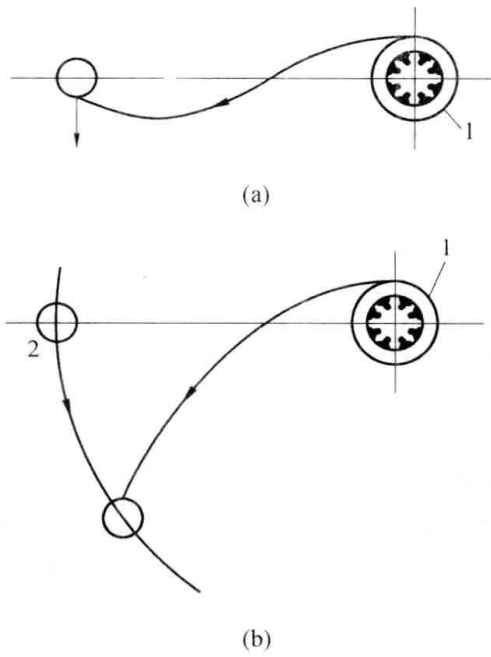


图 5.30 落月飞行轨道之一

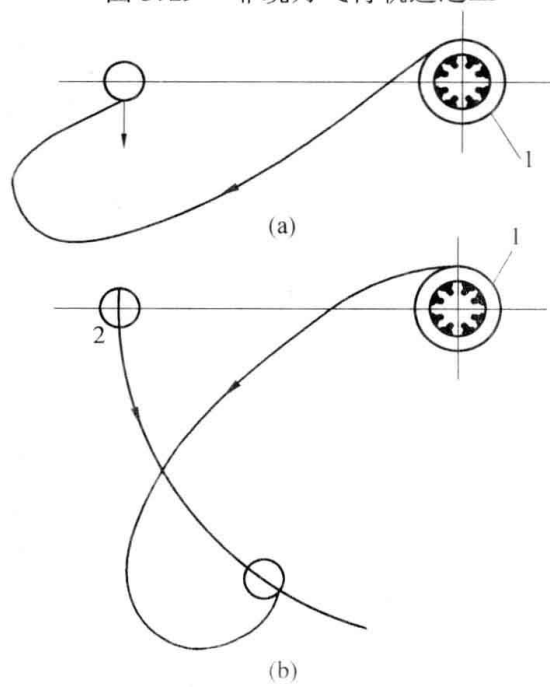


图 5.31 落月飞行轨道之二



5.6 行星际飞行

行星际飞行的分类有如下几种形式：

按照航天器是否返回地球分类,可以划分为返回地球的和不返回地球的行星际飞行；

按照是否利用其他星体的引力机动效应分类,可划分为利用和不利用这种效应的行星际飞行；

按照航天器与目标行星的相对位置关系分类,可以分为绕飞、撞击、环绕、着陆、行走、飞向行星的卫星和复合飞行。

作为地球的行星近邻,金星(Venus)和火星(Mars)是人类星际探测旅途最近的行星,也是到访最多的行星,特别是有着迷人的红色的火星。自从1965年美国的水手4号探测器在火星上空掠过并向地球发回照片,开始了人类第一次对火星的探测活动,至今已发射了30多个火星探测器。向火星的飞行成为典型的星际飞行的任务。

5.6.1 直接向火星飞行

最基本的向火星的飞行是从地球轨道直接到达火星轨道并与之会合,如图5.32。航天器要先后在地、太阳和火星影响球中飞行。在太阳引力场中的轨道,地球和火星影响球被视为点,轨道简化为在黄道平面中的圆轨道。

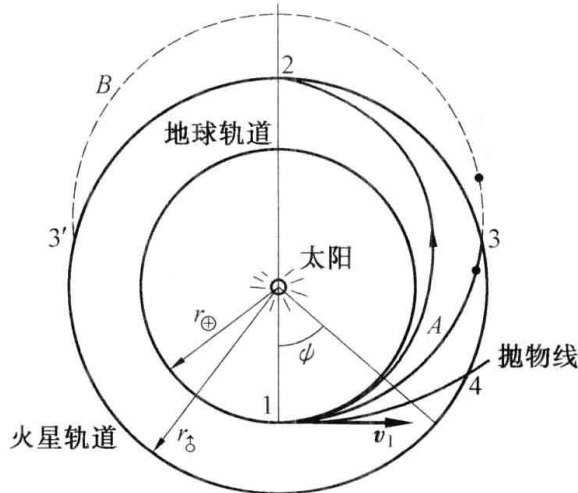


图 5.32 向火星飞行的轨道

图5.32中给出了三条在太阳引力场内的飞行轨道:在1点出发至2点到达火星的霍曼轨道;在1点与地球轨道相切,在3点(A轨道)或3'点与火星轨道相交的大椭圆轨道;在1点与地球轨道相切、2点到达火星的抛物线轨道。

先较详细地研究霍曼轨道飞行,对其余两种轨道将列表给出相关的结果,以便进行比较。



设 r_{\oplus} 和 r_{\uparrow} , v_{\oplus} 和 v_{\uparrow} 分别是地球和火星的轨道半径和平均轨道速度, μ_{\odot} , μ_{\oplus} 和 μ_{\uparrow} 分别是太阳, 地球和火星的引力常数, ρ_{\oplus} 和 ρ_{\uparrow} 为地球及火星相对于太阳的影响球半径。数值见表 5.3。

表 5.3 向火星飞行相关参数

	引力常数 $\mu/(\text{km}^3 \cdot \text{s}^{-2})$	轨道半径 r/km	轨道速度 $v/(\text{km} \cdot \text{s}^{-1})$	影响球半径 ρ/km
太阳 \odot	1.327×10^{11}	—	—	—
地球 \oplus	3.986×10^5	1.496×10^8	29.76	9.29×10^5
火星 \uparrow	4.29×10^4	2.279×10^8	24.11	5.789×10^5

在出发点 1 及到达点 2 的霍曼过渡速度分别是

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_{\oplus}} \frac{2r_{\uparrow}}{r_{\oplus} + r_{\uparrow}}} = 32.73 \text{ km/s}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_{\oplus}} \frac{2r_{\oplus}}{r_{\oplus} + r_{\uparrow}}} = 21.48 \text{ km/s}$$

在地球影响球内的航天器由于地球轨道速度已具有相对于太阳的 29.76 km/s 初速度, 飞离地球影响球时, 相对地球只需有 $v_1 - v_{\oplus} = 2.968 \text{ km/s}$ 的速度即可。为飞离地球影响球的速度, 记为 $v_{\infty/\oplus}^+$ 。

如设航天器从高度为 222 km 的地球圆轨道($r_p = 6600 \text{ km}$) 出发(图 5.33), 速度为 $v_{p/\oplus}$, 使到达地球影响球边界时, 速度恰为 $v_{\infty/\oplus}$ 且方向与 v_{\oplus} 相同。应用能量方程式

$$\frac{v_{p/\oplus}^2}{2} - \frac{\mu_{\oplus}}{r_p} = \frac{v_{\infty/\oplus}^2}{2} - \frac{\mu_{\oplus}}{\rho_{\oplus}}$$

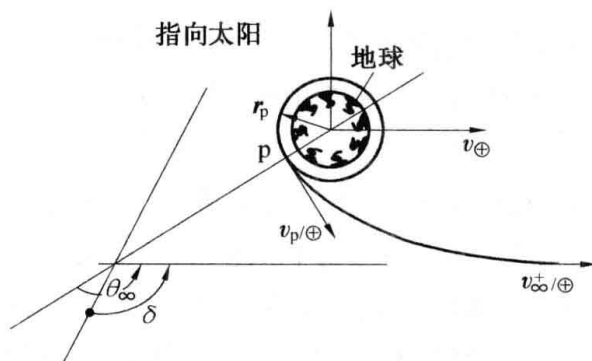


图 5.33 相对地球的运动

可以求得



$$v_{p/\oplus} = \sqrt{v_{\infty/\oplus}^2 - \frac{\mu_{\oplus}}{\rho_{\oplus}} + \frac{\mu_{\oplus}}{r_p}} = 11.346 \text{ km/s}$$

它比半径为 r_p 的地球圆轨道速度大

$$\Delta v_1 = v_{p/\oplus} - \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_p}} = 3.57 \text{ km/s}$$

换言之,从地球上空 222 km 圆轨道出发,需给航天器 3.57 km/s 的速度增量(若以理想化的 $r_p = R_{\oplus}$ 代入上式计算还可求得直接从地球表面出发,应赋予航天器的速度,它的数值为 11.567 km/s,显然大于第二宇宙速度)。

当航天器从半径为 6 600 km 的圆形停泊轨道出发,只需在适当的位置(发射窗口)给它 Δv_1 的速度增量,航天器将以双曲线轨道飞离地球影响球,并直接进入向火星飞行的霍曼过渡轨道。双曲线轨道的参数为

$$e = 1 + \frac{r_p v_{\infty/\oplus}^2}{\mu_{\oplus}} = 1.146, \quad a = \frac{r_p}{1 - e} = -45\,249.05 \text{ km}$$

近心点矢径与地球运动方向的夹角为

$$\theta_{\infty} = 90^{\circ} + \frac{\delta}{2} = 90^{\circ} + \arcsin\left(\frac{1}{e}\right) = 150.78^{\circ}$$

霍曼轨道的运行的时间为

$$t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{(r_{\oplus} + r_{\uparrow})^3}{8\mu_{\odot}}} = 258.84 \text{ d}$$

航天器自地球飞到火星,在轨道上的飞行角距为 180° ,飞行时间是轨道周期之半,即将近 259 d。火星在这样的时间里绕太阳转过的角度为

$$\theta_{\uparrow} = 360^{\circ} \times \frac{258.84}{T_{\uparrow}} = 135.7^{\circ}$$

其中, T_{\uparrow} 是火星的恒星年或绕太阳的周期的天数。航天器与火星在这 259 d 之内转过的角度差,即是航天器飞离地球时火星应超前地球的角度(图 5.32)。

$$\varphi = 180^{\circ} - \theta_{\uparrow} = 44.3^{\circ}$$

同理,其余两条过渡轨道的有关参数也类似地求得,与霍曼轨道的结果一同列于表 5.4 中。由表可知,这 3 种轨道所需能量相差并不多(11.567 ~ 16.67 km/s),然而飞行时间却相差极大(霍曼过渡为 259 d,大椭圆 A 为 105 d,抛物线为 70 d)。时间缩短的主要原因是由于飞行路程极大地减小(霍曼过渡的航天器转角为 180° ,大椭圆 A 为 92.6° ,抛物线为 71.8°),其次是因为航天器速度的提高。表中还看出,霍曼过渡、大椭圆 A 和抛物线飞行时火星超前地球的角度分别各为 44.3° , 37.6° 和 35.1° ,它们之差仅 9.2° ,地球只要用 20 d 就能赶上这个差值。由于地球和火星的会合周期是 779.94 d(见附录表 A1.1),即每隔大约 780 d 才有一次以霍曼方式从地球向



火星的过渡机会,若改用其他轨道过渡,也只有 20 d 左右的时间裕度。也就是说从地球轨道向火星过渡,则发射窗口每 780 d 才有一次,即使使用多种过渡轨道,每次也只有 20 d 的窗口时间。

表 5.4 各种过渡方式的结果

参 量	过渡轨道			
	霍曼过渡	椭圆 A	椭圆 B	抛物线
地面起飞速度 $/(km \cdot s^{-1})$	11.567	13.0	13.0	16.67
停泊轨道速度增量 $/(km \cdot s^{-1})$	2.968	6.62	6.62	12.33
轨道周期 /d	518	1 015	1 015	—
飞行时间 /d	259	105	910	70
飞行角距 $/(\circ)$	180	92.6	267.4	71.8
地球运行角度 $/(\circ)$	255.3	103.5	897.0	69.0
火星运行角度 $/(\circ)$	135.7	55	476.9	36.7
火星超前角度 $/(\circ)$	44.3	37.6	- 209.5	35.1

5.6.2 利用金星引力机动向火星飞行

此飞行方案为通过穿越地内行星金星的引力场向火星飞行的轨道,分以下几步进行,如图 5.34。首先航天器先沿着与地球相切于远日点 1 而近日点在金星轨道内侧的椭圆轨道飞到金星轨道,与金星相会在 2 点。在金星的引力作用下加速并转弯,然后沿着新的椭圆轨道飞向火星。航天器要在地球、金星、火星和太阳影响球内交替飞行。

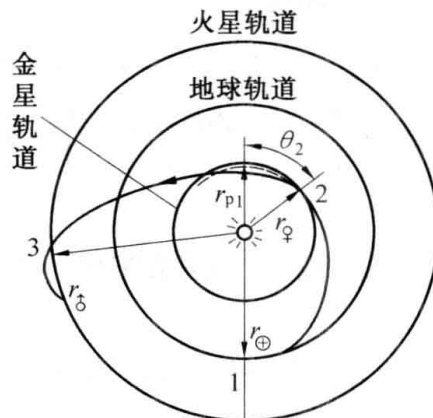


图 5.34 有引力机动的飞行轨道



(1) 由 1 点到 2 点的椭圆过渡轨道

取近心点半径为 $r_{p1} = 9.5 \times 10^7 \text{ km}$, $r_{a1} = r_{\oplus} = 1.496 \times 10^8 \text{ km}$, 则

$$e_1 = \frac{r_{\oplus} - r_{p1}}{r_{\oplus} + r_{p1}} = 0.223$$

将 $r_{\oplus} = 1.0821 \times 10^8 \text{ km}$ 和 r_{p1} , 代入轨道方程联立求得 2 点的真近角 θ_2 。

$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{p_1/r_{\oplus} - 1}{e_1}\right) = \arccos\left[\frac{(1 + e_1)r_{p1}/r_{\oplus} - 1}{e_1}\right] = 70.7^\circ$$

按照能量方程和动量矩守恒可以求得 2 点处相对于日心的飞行状态。

$$v_2 = \sqrt{v_{a1}^2 + 2\mu_{\odot}\left(\frac{1}{r_{\oplus}} - \frac{1}{r_{\oplus}}\right)} = \sqrt{\mu_{\odot}\left(\frac{2}{r_{\oplus}} - \frac{1 + e_1}{r_{\oplus}}\right)} = 36.98 \text{ km/s}$$

$$\beta_2 = \arccos\left(\frac{r_{\oplus} v_{a1}}{r_{\oplus} v_2}\right) = \arccos\left[\frac{\sqrt{\mu_{\odot} r_{\oplus} (1 - e_1)}}{r_{\oplus} v_2}\right] = -11.1^\circ$$

从 1 点飞行到 2 点的时间 t_1 为 98.9 d, 此间金星运行的角距为 158.7° , 航天器自地球出发时, 金星应滞后于地球 49.4° (发射窗口)。

(2) 绕飞金星

当航天器到达金星影响球后, 按照引力机动的原理从金星后侧绕飞。这里取绕飞的双曲线轨道的近心(金)点距离 r_{p2} 为 $1.2 \times 10^4 \text{ km}$ (大约与金星直径相当), 如图 5.35, 则绕飞轨道的参数为

$$e_2 = 1 + \frac{r_{p2}(v_{\infty/\oplus}^-)^2}{r_{\oplus}} = 2.932$$

$$\delta_2 = 2\arcsin\left(\frac{1}{e_2}\right) = 39.88^\circ$$

绕飞后脱离金星影响球时相对于太阳的速度变为

$$v_2^+ = \sqrt{(v_{\infty/\oplus}^+)^2 + v_{\oplus}^2 - 2v_{\infty/\oplus}^+ v_{\oplus} \cos(\alpha + \delta)} = 40.80 \text{ km/s}$$

$$\beta_2^+ = \arcsin\left[v_{\infty/\oplus}^+ \frac{\sin(\alpha + \delta)}{v_2^+}\right] = 6.52^\circ$$

(3) 飞向火星

按照设计的双曲线轨道绕飞后, 航天器返回到太阳引力场, 进入到一条由 2 点到 3 点的椭圆过渡轨道。显然应该有 $r_{a3} > r_{\oplus}$ 。

以 2 点的新参数 r_{\oplus} , v_2^+ , β_2^+ 为初始条件, 建立新的飞行轨道。由式(3.7) 和(3.8) 可以解得

$$\theta_3 = \arctan\left[\frac{(r_{\oplus} v_2^{+2}/\mu_{\odot}) \sin \beta_2^+ \cos \beta_2^+}{(r_{\oplus} v_2^{+2}/\mu_{\odot}) \cos^2 \beta_2^+ - 1}\right] = 24.3^\circ$$

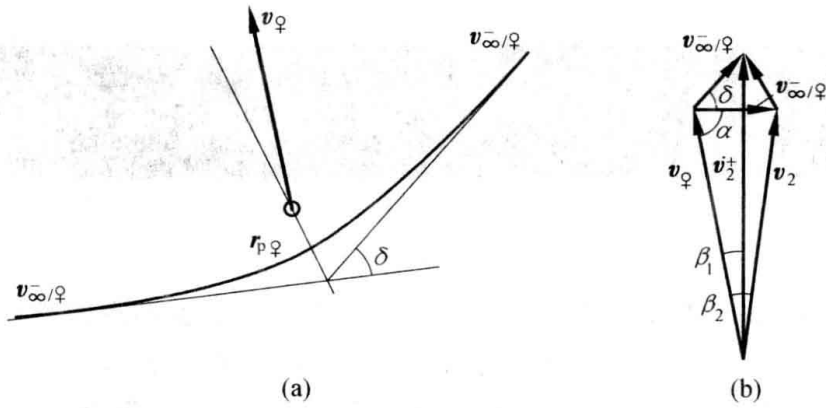


图 5.35 绕飞金星轨道

$$e_3 = \sqrt{(r_{\varphi} v_2^{+2} / \mu_{\odot} - 1) \cos \beta_2^+ + \sin \beta_2^+} = 0.373$$

由轨道方程解得

$$r_{a3} = \frac{p}{1 - e_3} = \frac{r_{\varphi} (1 + e_3 \cos \theta_3)}{1 - e_3} = 2.313 \times 10^8 \text{ km} > r_{\uparrow}$$

满足任务要求,即存在与火星轨道相交的点 3。

从地球出发的情况与直接飞向火星的方案类似,只是速度略小,出发点不同而已,这里就不再赘述。

第 6 章 航天器的相对运动

随着人类航天活动的规模日益扩大,航天器的种类和数量也不断地增长,涉及多个航天器的飞行任务就在所难免了。在交会与对接、在轨发射与回收、在轨安装与维护、拦截、星座、编队等一系列飞行活动中,更需要研究航天器间的相对关系。通过航天器间相对运动的描述,可以对相对运动的本质有深入地理解,进而对相对运动进行有效的控制,使之满足航天任务的要求。

6.1 相对运动方程式

6.1.1 轨道坐标系中相对运动方程式

当两航天器距离较近时,两者的相对运动比各自的轨道运动更需要关注。在轨运行的航天器的相对运动有着与平行引力场中的相对运动不同的特性,需要从基本原理和基本状况开始着手进行分析。通常是以目标航天器的轨道(运动)坐标系 $oxyz$ 为参考,研究追赶航天器相对它的运动。轨道(运动)坐标系 $oxyz$ 的 oy 轴沿地球半径方向, ox 轴与 oy 轴垂直指向飞行的前方, oxy 在轨道平面内, oz 轴与前两者构成右旋正交系(图 6.1)。

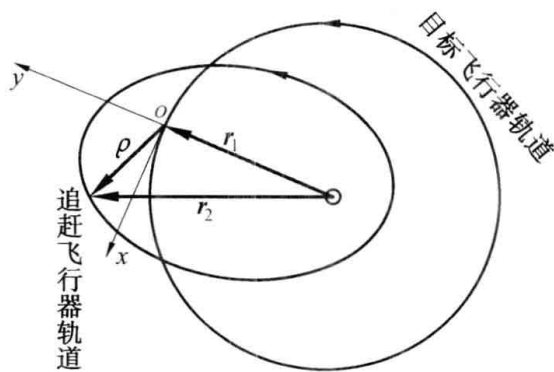


图 6.1 轨道坐标系

目标航天器的运动方程式是

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 + \frac{\mu}{r_1^3} \mathbf{r}_1 = 0 \quad (6.1)$$

追赶航天器的运动方程式是



$$\ddot{\mathbf{r}}_2 + \frac{\mu}{r_2^3} \mathbf{r}_2 = \mathbf{f} \quad (6.2)$$

其中, \mathbf{f} 是追赶航天器单位质量的上作用力, 使其可控。

追赶航天器相对目标航天器的运动为

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (6.3)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mu}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - \frac{\mu}{r_2^3} \mathbf{r}_2 + \mathbf{f} \quad (6.4)$$

轨道坐标系在惯性空间以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动, 则

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \quad (6.5)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} \quad (6.6)$$

在轨道坐标系中, $\boldsymbol{\omega} = -\omega \mathbf{k}$, 且

$$\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (6.7)$$

代入式(6.6)得

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = (\ddot{x} - \omega^2 x + 2\omega\dot{y} + \dot{\omega}y)\mathbf{i} + (\ddot{y} - \omega^2 y - 2\omega\dot{x} - \dot{\omega}x)\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \quad (6.8)$$

而

$$\mathbf{r}_1 = r_1 \mathbf{j} \quad (6.9)$$

$$\mathbf{r}_2 = x\mathbf{i} + (r_1 + y)\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (6.10)$$

所以有

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - \frac{\mu}{r_2^3} \mathbf{r}_2 &= \mu r_1^{-3} \mathbf{r}_1 - \mu [x^2 + (r_1 + y)^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}_1) = \\ &= \mu r_1^{-3} \mathbf{r}_1 - \mu (r_1^2 + 2r_1 y + \rho^2)^{-\frac{3}{2}} (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}_1) = \\ &= \mu r_1^{-3} \left[\mathbf{r}_1 - \left(1 + \frac{2y}{r_1} + \frac{\rho^2}{r_1^2}\right)^{-\frac{3}{2}} (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}_1) \right] \end{aligned} \quad (6.11)$$

当 ρ 相对较小时, $\rho \ll r_1$ ($x \ll r_1, y \ll r_1, z \ll r_1$), 略 ρ/r_1 的二阶以上项。而

$$(1 + \alpha)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}\alpha + \frac{15}{8}\alpha^2 + \dots \approx 1 - \frac{3}{2}\alpha \quad (\alpha < 1)$$

保留一阶小量, 式(6.11)简化为

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - \frac{\mu}{r_2^3} \mathbf{r}_2 &\cong \mu r_1^{-3} \left[\mathbf{r}_1 - \left(1 - 3\frac{y}{r_1}\right) (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}_1) \right] = \mu r_1^{-3} \left[3\frac{y}{r_1} \mathbf{r}_1 - \left(1 - 3\frac{y}{r_1}\right) \boldsymbol{\rho} \right] = \\ &= \mu r_1^{-3} (-x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - z\mathbf{k}) \quad (\text{略去二阶小量}) \end{aligned} \quad (6.12)$$

再将 \mathbf{f} 在轨道坐标系中分解为

$$\mathbf{f} = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k}$$

则相对运动的在轨道坐标系中可以写为



$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{y} + \dot{\omega}y + \left(\frac{\mu}{r_1^3} - \omega^2\right)x = f_x \\ \ddot{y} - 2\omega\dot{x} - \dot{\omega}x - \left(2\frac{\mu}{r_1^3} + \omega^2\right)y = f_y \\ \ddot{z} + \frac{\mu}{r_1^3}z = f_z \end{cases} \quad (6.13)$$

上式称为希尔(Hill)方程,或C-W(Clohessey-Wiltshire)方程。

若目标航天器的运行轨道为圆形,有 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1^3}}$, 则

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{y} = f_x \\ \ddot{y} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2y = f_y \\ \ddot{z} + \omega^2z = f_z \end{cases} \quad (6.14)$$

当 f 任意时,方程组不存在解析解,只能通过数值积分计算。

相对运动的基本规律: $f = 0$ 无外力作用情况下的自由相对运动。

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2y = 0 \\ \ddot{z} + \omega^2z = 0 \end{cases} \quad (6.15)$$

第一式对时间积分,得

$$\dot{x} + 2\omega y = c \quad (6.16)$$

c 为积分常数

$$c = \dot{x}_0 + 2\omega y_0 \quad (6.17)$$

把式(6.16)代入式(6.15)第二式得

$$\ddot{y} + \omega^2y = 2c\omega \quad (6.18)$$

$$y = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t - \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 3y_0\right) \cos \omega t + \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 4y_0\right)$$

把上式代入式(6.16)积分,式(6.15)第三式直接求解,得相对位置的分量表达式

$$x(t) = \frac{2\dot{y}(0)}{\omega} \cos \omega t + 2\left[\frac{2\dot{x}(0)}{\omega} + 3y(0)\right] \sin \omega t - [3\dot{x}(0) + 6\omega y(0)]t + [x(0) - \frac{2\dot{y}(0)}{\omega}] \quad (6.19)$$

$$y(t) = \frac{\dot{y}(0)}{\omega} \sin \omega t - \left[\frac{2\dot{x}(0)}{\omega} + 3y(0)\right] \cos \omega t + \left[\frac{2\dot{x}(0)}{\omega} + 4y(0)\right] \quad (6.20)$$

$$z(t) = \frac{\dot{z}(0)}{\omega} \sin \omega t + z(0) \cos \omega t \quad (6.21)$$

相对速度为

$$\dot{x}(t) = -2\dot{y}(0) \sin \omega t + [4\dot{x}(0) + 6\omega y(0)] \cos \omega t - [3\dot{x}(0) + 6\omega y(0)] \quad (6.22)$$



$$\dot{y}(t) = \dot{y}(0)\cos \omega t + [2\dot{x}(0) + 3\omega y(0)]\sin \omega t \quad (6.23)$$

$$\dot{z}(t) = \dot{z}(0)\cos \omega t - \omega z(0)\sin \omega t \quad (6.24)$$

6.1.2 相对运动的基本特性

由上述的追赶航天器相对目标航天器位置和速度的表达式可以看出,在轨道坐标系下相对运动具有以下几个基本特性:

(1) 相对运动可以分解为轨道平面和垂直于轨道平面(z 方向)的两个相互独立的运动,而在轨道平面内 x, y 方向的运动是耦合的;

(2) x 方向的位移及速度是 y 方向的 2 倍; x 方向有常值的漂移速度,大小与 \dot{x}_0 和 y_0 相关; y 方向的运动超前 x 方向 $\pi/2$ (即 1/4 轨道周期);

(3) z 方向的运动,是周期为 ω 的简谐运动。

在轨道面内 x, y 方向运动的耦合构成的运动轨迹也包含有周期运动的成分,轨迹的描述可以通过在 x, y 方向运动的表达式中消去时间参量后获得,即

$$\frac{(x - x_{00} + 3y_{00}\omega t/2)^2}{(2c_{00})^2} + \frac{(y - y_{00})^2}{c_{00}^2} = 1 \quad (6.25)$$

其中

$$x_{00} = x(0) - \frac{2\dot{y}(0)}{\omega}$$

$$y_{00} = 4y(0) + \frac{2\dot{x}(0)}{\omega}$$

$$c_{00} = \sqrt{\left[\frac{2\dot{x}(0)}{\omega} + 3y(0)\right]^2 + \left[\frac{\dot{y}(0)}{\omega}\right]^2}$$

则 $x - y$ 平面中的自由运动轨迹形式直接由 x_{00}, y_{00} 和 c_{00} 三个由相对运动的轨道面内的 4 个初始状态确定的常数来决定了。式(6.25) 为一个特别的近椭圆轨迹,且中心是可以移动的。 (x_{00}, y_{00}) 决定椭圆的中心, c_{00} 决定了椭圆的大小。椭圆的长轴是短轴的 2 倍,所以相对运动椭圆的偏心率 $e = \sqrt{3}/2 = 0.866$ 。

(1) 一般轨迹

当轨道面内的 4 个初始状态 $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ 均为非零且不为特定关系时,相对运动轨迹为大小、形状固定的椭圆在其中心做一定常速度横向平移运动(方向可正可负)时所构成的拉伸螺旋状曲线,如图 6.2 所示。

(2) 定点保持

当 $x = x_0 \neq 0$ 时,其余初始值皆为零,即 $y_0 = 0, \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = 0$,式(6.25) 变为一个固定点 $(x_0, 0)$,如图 6.3 所示。即在特定的初始条件下,追赶航天器与目标航天器在 x 方向上可以保持前后距离固定不变。在交会对接过程经常需要这种定点保持。

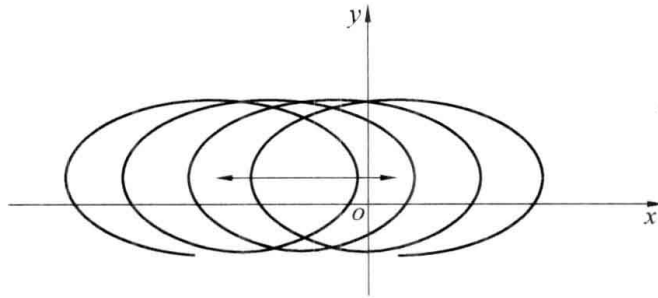


图 6.2 一般情况下的相对运动示意

(3) 直线运动

当初始条件满足 $\dot{x}_0 = 1.5\omega y_0, \dot{y}_0 = 0$ 时,式(6.25)变为 $x_0 = -1.5\omega y_0 t, y = y_0$,如图6.3所示。

(4) 椭圆运动

当 $y_{00} = 0$,即 $\dot{x}_0 = -2\omega y_0$ 时,椭圆轨迹中心没有运动,相对运动的轨迹为单纯的椭圆,中心在 x 轴上。此时形成了追赶航天器与目标航天器的伴随飞行,即追赶航天器始终围绕着一个跟随目标航天器保持固定距离(前或后)的点作椭圆运动。而当另外两个初始条件满足 $\dot{y}_0 = \omega x_0/2$ 时,椭圆运动变为绕坐标系原点,也就是以目标航天器为中心的椭圆运动了,如图 6.4。此种情况称为追赶航天器对目标航天器的环绕飞行。

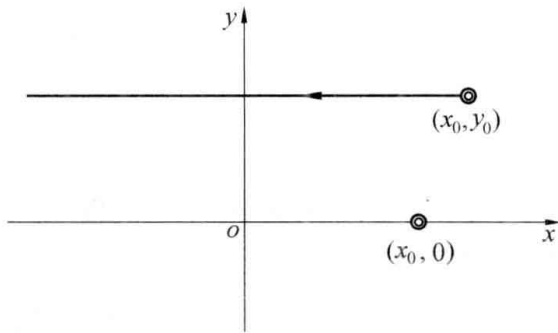


图 6.3 定点与直线类型的相对运动

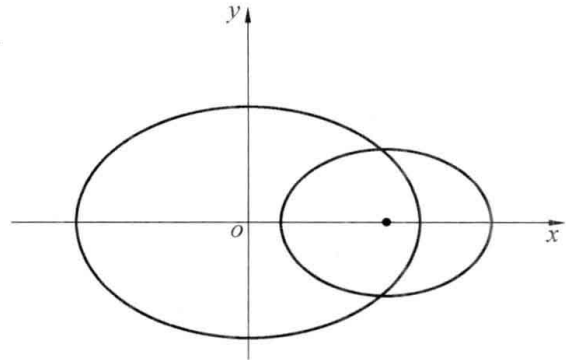


图 6.4 伴随飞行和环绕飞行

由伴飞条件 $\dot{x}_0 = -2\omega y_0$,相对运动的描述变为

$$x(t) = \frac{2\dot{y}(0)}{\omega} \cos \omega t - 2y(0)\sin \omega t + [x(0) - \frac{2\dot{y}(0)}{\omega}] \quad (6.26)$$

$$y(t) = \frac{\dot{y}(0)}{\omega} \sin \omega t + y(0)\cos \omega t \quad (6.27)$$

$$z(t) = \frac{\dot{z}(0)}{\omega} \sin \omega t + z(0)\cos \omega t \quad (6.28)$$

$$\dot{x}(t) = -2\dot{y}(0)\sin \omega t - 2\omega y(0)\cos \omega t \quad (6.29)$$

$$\dot{y}(t) = \dot{y}(0)\cos \omega t - 2\omega y(0)\sin \omega t \quad (6.30)$$



$$\dot{z}(t) = \dot{z}(0)\cos \omega t - \omega z(0)\sin \omega t \quad (6.31)$$

构成了航天器编队飞行的基本方程式。

6.1.2 视线坐标系中的相对运动方程式

用两航天器间的距离和视线的方位角来描述相对位置,容易实现,将相对运动方程在视线坐标系 $ox_1y_1z_1$ 中分解(见图 6.5)。 P, T 分别是追赶和目标航天器,相对距离是 ρ, ρ 又称为视线,它与轨道坐标系 x 轴夹角为 q ,相对角速度为 Ω 。两航天器间的角距离为 φ ,轨道坐标系角速度为 ω 。

ρ 的时间导数是

$$\dot{\rho} = \dot{\rho} + (\omega + \Omega) \times \rho \quad (6.32)$$

$$\ddot{\rho} = \ddot{\rho} + 2(\omega + \Omega) \times \dot{\rho} + (\dot{\omega} + \dot{\Omega}) \times \rho + (\omega + \Omega) \times [(\omega + \Omega) \times \rho] \quad (6.33)$$

在视线坐标系 (i_1, j_1, k_1) 中

$$\rho = \rho i_1, (\omega + \Omega) = (\dot{q} - \omega) k = (\dot{q} - \omega) k_1$$

代入上式得

$$\ddot{\rho} = [\ddot{\rho} - \rho(\dot{q} - \omega)^2] i_1 + [2\dot{\rho}(\dot{q} - \omega) + \rho\ddot{q}] j_1 \quad (6.34)$$

几何关系

$$\sin \varphi = \frac{\rho}{r_2} \cos q \quad (6.35)$$

$$\cos \varphi = \frac{\rho \sin q + r_1}{r_2} \quad (6.36)$$

r_1 和 r_2 在 $ox_1y_1z_1$ 内可表示为

$$r_1 = r_1 \sin q i_1 + r_1 \cos q j_1 \quad (6.37)$$

$$r_2 = r_2 \sin(q + \varphi) i_1 + r_2 \cos(q + \varphi) j_1 \quad (6.38)$$

则式(6.4) 右侧前两项为

$$\mu \left(\frac{r_1}{r_1^3} - \frac{r_2}{r_2^3} \right) = \mu \left[\frac{1}{r_1^2} \sin q - \frac{1}{r_2^2} \sin(\varphi + q) \right] i_1 + \mu \left[\frac{1}{r_1^2} \cos q - \frac{1}{r_2^2} \cos(\varphi + q) \right] j_1$$

展开上式中的和角函数,代入几何关系,整理后得

$$\left(\frac{r_1}{r_1^3} - \frac{r_2}{r_2^3} \right) = \left[r_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \sin q - \frac{\rho}{r_2^3} \right] i_1 + \left[r_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \cos q \right] j_1 \quad (6.39)$$

再利用 $\rho \ll r_1$ 和 $\rho \ll r_2$ 的特点,略去 ρ^2/r_1^2 及以上的高阶项并应用近似公式

$$(1 + \Delta x)^{-m} \cong 1 - m\Delta x \quad (|\Delta x| < 1, m > 0)$$

可以求得

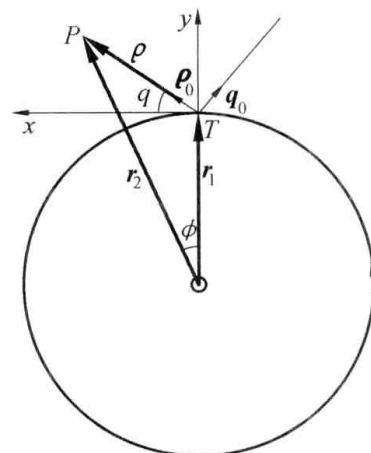


图 6.5 视线坐标系



$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} &= \frac{1}{r_1^3} \left(1 - \frac{r_1^3}{r_2^3}\right) = \frac{1}{r_1^3} \left[1 - \frac{r_1^3}{(r_1^2 + \rho^2 + 2r_1\rho_1 \sin q)^{\frac{3}{2}}}\right] = \\ &= \frac{1}{r_1^3} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\rho^2}{r_1^2} + 2\frac{\rho}{r_1} \sin q\right)^{\frac{3}{2}}}\right] \cong \\ &= \frac{1}{r_1^3} \left[1 - \left(1 + 2\frac{\rho}{r_1} \sin q\right)^{-\frac{3}{2}}\right] \cong \frac{3\rho}{r_1^4} \sin q \end{aligned}$$

代入式(6.39) 得

$$\mu \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}\right) = \frac{\mu}{r_1^3} (3\rho \sin^2 q - \rho) \mathbf{i}_1 + \frac{\mu}{r_1^3} \frac{3}{2} \rho \sin 2q \mathbf{j}_1 \quad (6.40)$$

视线坐标系内的相对运动方程式是

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho(\dot{q} - \omega)^2 &= 3\rho\omega^2 \sin^2 q - \rho\omega^2 + f_{x1} \\ \rho\ddot{q} + 2\dot{\rho}(\dot{q} - \omega) &= \frac{3}{2}\rho\omega^2 \sin 2q + f_{y1} \end{aligned}$$

化简得

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{q}^2 + 2\rho\dot{q}\omega - 3\rho\omega^2 \sin^2 q = f_{x1} \quad (6.41)$$

$$\rho\ddot{q} + 2\dot{\rho}\dot{q} - 2\dot{\rho}\omega - \frac{3}{2}\rho\omega^2 \sin 2q = f_{y1} \quad (6.42)$$

认为 ω ($\omega_{\max} = 0.001\ 24\ \text{rad/s}$) 小于其他量,或认为近似在均匀引力场运动

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{q}^2 = f_{x1} \quad (6.43)$$

$$\rho\ddot{q} + 2\dot{\rho}\dot{q} = f_{y1} \quad (6.44)$$

仍然是非线性微分方程,无解析解。

6.2 航天器的交会和对接

使两航天器在轨道上相遇的飞行过程叫做交会(Rendezvous),使两航天器在交会时,相对速度为零并且固连的过程则被称为对接(Docking)。交会时不一定对接,要对接则必须先交会,所以把带对接的交会过程简称为交会对接(Rendezvous and Docking)。

6.2.1 交会对接的过程

两航天器作交会对接时,通常都是一个航天器在作被动飞行,称为目标航天器;另一航天器在控制力的作用下作机动飞行,以不同规律飞向目标航天器,它又称为追赶航天器。

为了简化交会对接技术,常令目标航天器在圆或近圆轨道上飞行,追赶航天器则先发射到或机动到与目标航天器共面的椭圆或圆轨道,后者的轨道高度可以高于或低于前者,称为过渡轨道。待到合适的时刻开始交会或对接的过程。



整个交会对接的过程,按轨道控制的方法和要求的不同可以划分为四个阶段,如图 6.6。

(1) 地面导引段

当追赶航天器在 1 点,目标航天器在 1' 点,恰为交会对接窗口。在地面站的导引下,追赶航天器沿椭圆(霍曼过渡)轨道飞向比目标航天器低(或高)数十千米(如 30 ~ 50 km)、前后百余千米(100 km) 的圆形停泊轨道,这时追赶航天器上的敏感器已经能够捕获目标航天器了。在此阶段,追赶航天器从 1 点飞至 2 点,目标航天器从 1' 点飞至 2' 点,均以中心引力场中的运动来描述。

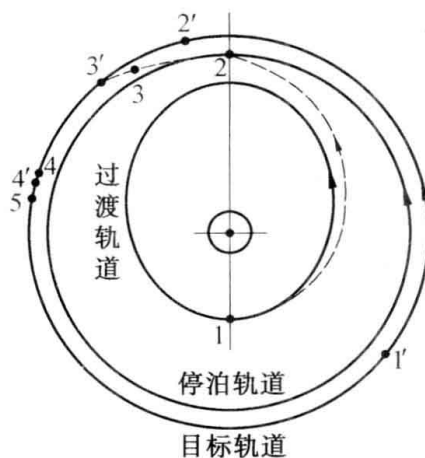


图 6.6 交会对接的 4 个阶段

(2) 自动寻的阶段

当追赶航天器在距目标航天器 100 km 左右时,星载探测装置如微波雷达或激光雷达工作,捕获目标。使得追赶航天器可以作自动寻的飞行。这个阶段除雷达外,还要应用陀螺器件及红外地平仪、太阳敏感器等姿态测量装置加以协助,根据不同的导引规律将追赶航天器导向目标航天器,为用相对运动方程描述的过程。2 点至 3 点,2' 点至 3' 点分别为两航天器这个阶段的飞行路线。

(3) 最后逼近段

两航天器到达相距约 5 km 左右的 3 和 3' 点后,先保持距离,至有利时机进行最后逼近。利用星载高精度的测量装置获得目标航天器的更准确的信息,控制追赶航天器进一步接近速度,精确接近。使追赶航天器直接或绕飞进入对接走廊。这时相对距离 200 m 左右,可以利用摄像机捕获目标的图像,获得相对姿态等信息。为 3 点至 4 点和 3' 点至 4' 点的运动过程,以更准确的相对运动方程(如考虑各种摄动的影响)来精确的描述这个阶段的相对运动。

(4) 对接合拢阶段

星载图像设备工作,精确测得两航天器的相对距离和姿态,沿对接轴以更低的速度,稳定的姿态接近目标航天器至 1.5 m 左右,最后由对接机构/微撞击完成两航天器的机械连接。这个阶段的运动需要应用轨道运动和姿态运动同时考虑的相对运动动力学。

6.2.2 交会对接动力学与控制

基于相对运动动力学基本规律和航天器机动方式,适合于航天器交会对接过程后逼近段的导引、控制方法也有着各自的特点。不同的逼近过程指标,不同的机动方式都有相应的控制方法及相对运动特性,比较典型的有以速度脉冲和连续力控制的交会过程。

(1) 多脉冲机动交会方法

这种交会方法的基础是圆轨道相对运动方程式(6.15)或希尔方程式的齐次形式,即



$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y = 0 \\ \ddot{z} + \omega^2 z = 0 \end{cases}$$

它们的解如式(6.19) ~ (6.21), 如果以初始时刻的速度脉冲控制追赶航天器飞向目标航天器, 并经过 T 时间后达到目标航天器, 则在 $t = T$ 时刻, 两航天器相遇时有 $x(T) = y(T) = z(T) = 0$ 。把这些关系代入式(6.19) ~ (6.21) 得

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}(0)}{\omega} \sin \omega T - \left[\frac{\dot{x}(0)}{\omega} + 3y(0) \right] \cos \omega T + \left[\frac{2\dot{x}(0)}{\omega} + 4y(0) \right] &= 0 \\ \frac{2\dot{y}(0)}{\omega} \cos \omega T + 2 \left[\frac{2\dot{x}(0)}{\omega} + 3y(0) \right] \sin \omega T - [3\dot{x}(0) + 6\omega y(0)] T + \left[x(0) - \frac{2\dot{y}(0)}{\omega} \right] &= 0 \\ \frac{\dot{z}(0)}{\omega} \sin \omega T + z(0) \cos \omega T &= 0 \end{aligned}$$

上述三式中, 初始时刻两航天器间的距离 $x(0), y(0), z(0)$ 为已知量, T 为合理的给定值, 则可以据此算出所需的初始速度脉冲 $\dot{x}(0), \dot{y}(0)$ 和 $\dot{z}(0)$, 它们将保证经过 T 时后使两航天器相遇。求解上述三式, 得

$$\dot{x}(0) = \omega \frac{a_{11}}{b} x(0) + \omega \frac{a_{12}}{b} y(0) \quad (6.45)$$

$$\dot{y}(0) = \omega \frac{a_{21}}{b} x(0) + \omega \frac{a_{22}}{b} y(0) \quad (6.46)$$

$$\dot{z}(0) = \omega a_{33} z(0) \quad (6.47)$$

其中

$$a_{11} = \sin \omega T$$

$$a_{12} = 14(1 - \cos \omega T) - 6\omega T \sin \omega T$$

$$a_{21} = -2(1 - \cos \omega T)$$

$$a_{22} = 4\sin \omega T - 3\omega T \cos \omega T$$

$$a_{33} = -\cos \omega T$$

$$b = 3\omega T \sin \omega T - 8(1 - \cos \omega T)$$

如果追赶航天器在 $t = 0$ 时刻原有的速度分量是 $\dot{x}_0(0), \dot{y}_0(0)$ 和 $\dot{z}_0(0)$, 则还需给它增加的速度是

$$\begin{cases} \Delta\dot{x}(0) = \dot{x}(0) - \dot{x}_0(0) \\ \Delta\dot{y}(0) = \dot{y}(0) - \dot{y}_0(0) \\ \Delta\dot{z}(0) = \dot{z}(0) - \dot{z}_0(0) \end{cases} \quad (6.48)$$

将上述各量写成矩阵形式

$$\boldsymbol{\rho}(0) = [x(0) \quad y(0) \quad z(0)]^T$$



$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{v}(0) &= [\Delta \dot{x}(0) \quad \Delta \dot{y}(0) \quad \Delta \dot{z}(0)]^T \\ \mathbf{v}_0(0) &= [\dot{x}_0(0) \quad \dot{y}_0(0) \quad \dot{z}_0(0)]^T\end{aligned}$$

则由式(6.45) ~ (6.47)可以求得

$$\Delta \mathbf{v}(0) = \omega \begin{bmatrix} a_{11}/b & a_{12}/b & 0 \\ a_{21}/b & a_{22}/b & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \boldsymbol{\rho}(0) - \mathbf{v}_0(0) \quad (6.49)$$

当 $t = T$ 时刻两航天器相遇时,追赶航天器的速度 $\mathbf{v}(T)$ 可由式(6.22) ~ (6.24)算出,如欲使它们与目标航天器的相对速度为零,则应施加的速度脉冲为

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{v}(T) = -\mathbf{v}(T) &= [-\dot{x}(T) \quad -\dot{y}(T) \quad -\dot{z}(T)]^T \quad (6.50) \\ \mathbf{v}(T) &= - \left(\omega \begin{bmatrix} 4\cos \omega T - 3 & -2\sin \omega T & 0 \\ 2\sin \omega T & \cos \omega T & 0 \\ 0 & 0 & \cos \omega T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}/b & a_{12}/b & 0 \\ a_{21}/b & a_{22}/b & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. \begin{bmatrix} 0 & -6\omega(1 - \cos \omega T) & 0 \\ 0 & 3\omega \sin \omega T & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \sin \omega T \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{\rho}(0)\end{aligned}$$

在初始条件 $\boldsymbol{\rho}(0), \mathbf{v}(0)$ 的情况下施加速度脉冲 $\Delta \mathbf{v}(0)$, 相当于以初始条件 $\boldsymbol{\rho}(0), [\mathbf{v}(0) + \Delta \mathbf{v}(0)]$ 的相对运动, 为螺线状椭圆叠加中心平移的轨迹。 T 时刻时追赶航天器与目标航天器位置重合, 即 $\boldsymbol{\rho}(T) = 0$, 此时再施加制动速度脉冲 $\Delta \mathbf{v}(T)$, 则有 $\boldsymbol{\rho}(T) = \mathbf{v}(T) = 0$, 完成交会。脉冲交会的轨迹如图 6.7 所示。

从图 6.7 中可以看出, 由于相对运动的周期性, 追赶航天器与目标航天器的相对位置不断减小的过程中, x 或 y 方向会出现负距离(超越目标)的时刻, 容易发生碰撞。

如果在初始和最终时刻之间增加一些中间点, 并利用速度脉冲使空间航天器经过每一中间点, 分步地到达终点, 就是多脉冲控制方案, 见图 6.8。多脉冲交会可以减小对机动发动机推力要求, 减少出现负距离的幅值。亦可以为交会的制导与控制提供更多的方案, 并对相关指标进行优化。

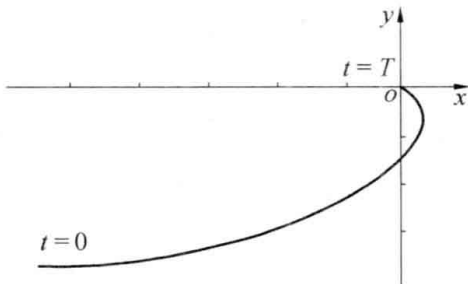


图 6.7 单脉冲交会轨道

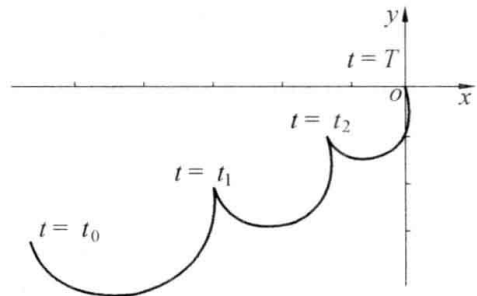


图 6.8 三脉冲交会轨道



(2) 最优控制律的交会方法

当追赶航天器使用恒值推力器控制交会过程时,可以对交会过程进行优化。为了方便问题的说明,只考虑 $x - y$ 平面的运动,并认为式(6.14)中的轨道角速度 ω 是小量,将包含它们的项略掉,这相当于两个物体在无重力空间中的相对运动。因而有

$$\ddot{x} = f_x \quad (6.51)$$

$$\ddot{y} = f_y \quad (6.52)$$

设 f_x 和 f_y 是开关控制量,即

$$f_i = \begin{cases} f_{ic} \\ 0 \\ -f_{ic} \end{cases} \quad i = x, y \text{ 也就是说作用在航天器上的控制力只能有三个状态,即 } f_{ic}, 0 \text{ 和 } -f_{ic}。$$

首先分析相平面中的运动规律,以 x 方向为例,对式(6.51)做两次积分,得

$$\dot{x}(t) = f_x t + \dot{x}(0) \quad (6.53)$$

$$x(t) = \frac{f_x t^2}{2} + \dot{x}(0)t + x(0) \quad (6.54)$$

由上两式消去参变量 t 后,得

$$x(t) - \frac{\dot{x}^2(t)}{2f_x} = x(0) - \frac{\dot{x}^2(0)}{2f_x} \quad (6.55)$$

其中, $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$ 是方向的初始位置和初始速度。

式(6.55)描述了一组 $x - \dot{x}$ 关系的曲线——相轨迹,设其右侧初始条件值为 c ,则有

$$x(t) - \frac{\dot{x}^2(t)}{2f_x} = c \quad (6.56)$$

在相平面上,所描述的曲线组见图 6.9。这是一组抛物线,它们对称于 x 轴。当 $c = 0$ 时,抛物线在原点与轴相切;当 $c = c_1$ 时,抛物线平行地向右(如 $c_1 > 0$)或(如 $c_1 < 0$)左移动一距离。每条曲线都表示该曲线在 c 和 f_x 值条件下追赶航天器的运动状态,即它在每一时刻的位置和速度的关系,其中 $c = 0$ 的曲线通过原点,表明能使两航天器以零速度相遇。图示曲线组都是对于 $f_x > 0$ 的情况,如果 $f_x < 0$,曲线组将以 \dot{x} 轴为对称,图 6.10 绘出了当 $c = 0$,而 f_x 为正或负值时得到的抛物曲线。两条通过原点的相轨迹变化方向是相反的,当 $f_x > 0$ 时,为加速运动,相对速度的增量值为正,相轨迹自下向上运动。对于交会对接,只有第四象限中的相轨迹有实用意义;当 $f_x < 0$ 时,为减速运动,相对速度的增量值为负,相轨迹自上向下运动。对于交会对接,只有第二象限中的相轨迹有实用意义。显然,若初始状态 $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$ 满足式(6.56)的 $c = 0$ 时(如图的 A 或 A' 点),则在 f_x 的作用下,追赶航天器的运动参数将沿图中的实线逐渐移至原点,在该处与目标航天器相遇。

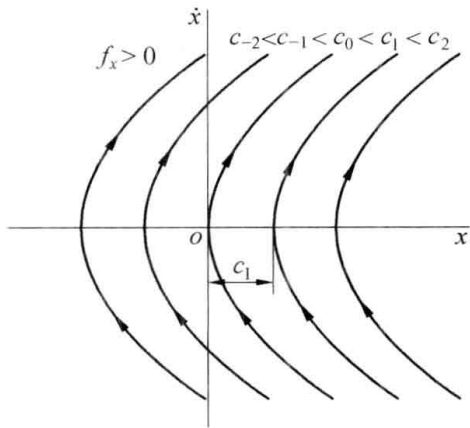


图 6.9 相轨迹族

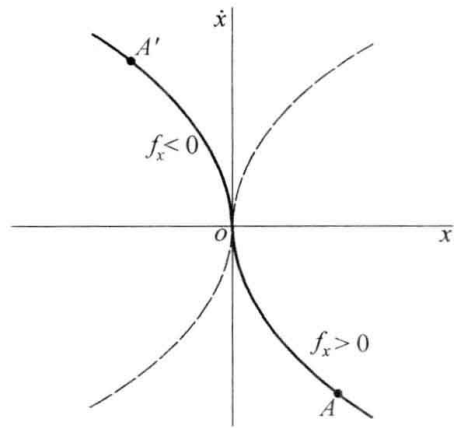


图 6.10 到达原点的相轨迹

假如追赶航天器的初始条件并不满足 $c = 0$, 则初始状态点将不在图 6.10 的实线上, 而是在其他的 1, 2 或 3 点上, 如图 6.11。为使追赶航天器与目标航天器相遇, f_x 要么取正值, 要么取负值。以 2 点为例, 先利用负控制力 f_x 使速度逐渐减小到零, 再变为负并在 $2'$ 点和实抛物线相交。在 $2'$ 点切换为正控制力 f_x , 运动状态则沿该抛物线逐渐移至原点。对于 1 点的初始条件也有类似的情况, 先施加负控制力 f_x 至 $1'$ 点后切换为正控制力 f_x 的过程。同理对于 3 点描述的初始状态, 则可先施加正控制力 f_x 到达 $3'$ 点后改变为负控制力 f_x , 最终也可达到原点。

这样, 我们就以 $c = 0$ 时的两条相轨迹的第二、四象限部分构成的曲线把相平面划分为两个区域。包含第一象限的区域为 I 区域, 包含第三象限的区域为 II 区域。若初始条件点落入 I 区域, 应先施加负的控制力使运动状态到达 $c = 0$ 的曲线, 切换为相应的正控制力, 直至到达原点 o ; 若初始条件点落入 II 区域, 应先施加正的控制力使运动状态到达 $c = 0$ 的曲线, 切换为相应的负控制力, 亦可到达原点 o 。

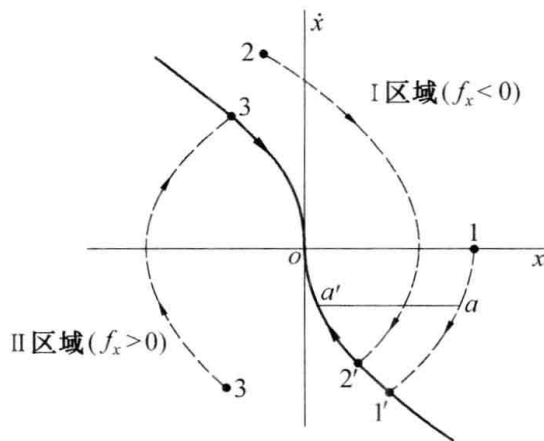


图 6.11 间到达原点

另一种控制方法是利用 $f_x = 0$ 的状态。假如初始状态在 1 点(图 6.11), 和前种控制法一样, 先施加负 f_x 使运动状态从点沿虚线抛物线向 $1'$ 点运动, 当状态达到 a 点时, 使控制力变为



零。该瞬间追赶航天器的速度是点 a 对应的数值(在此为负值),在惯性作用下,航天器将等速地朝 x 减小的方向运动,其状态为与 ox 轴平行的直线,从 a 运动到与实线相交的 a' 点。此时,若施加正 f_x ,则运动状态将沿实线运动到原点 o 。

第二种方法所消耗的能量,无疑要比第一法少。从节能的角度讲,当从 1 点出发之后, a 点越靠近 ox 轴,控制系统所消耗的能量就越少,然而由于速度小,所需的飞行时间就会增加,两者成反向变化的关系。假如适当选择 a 点的位置,将取得时间和消耗的能量均可接受的折中方案,这就是最优控制交会的含义。

为求最优控制律,首先得建立目标函数 J 。它是交会对接的总时间和消耗能量的加权和

$$J = KT + \int_0^T |f_x| dt \quad (6.57)$$

其中, K 为加权系数。

一般情况,交会对接开始时初始速度 $\dot{x}(0) = 0$,而 $x(0) \neq 0$,以此为前提计算总的过渡时间 T 。在这种情况下, T 应为三部分时间的和:1 点至 a 点的运行时间(图 6.11), a 点至 a' 点的运行时间和 a' 点到 o 点的运行时间。由于 f_x 为正和负值的曲线互相镜面对称,易知,从 a' 点到 o 点的等减速运动时间应和从 1 点到 a 点反向进行的匀加速运动时间相等,即

$$T_1 = \frac{\dot{x}^*}{f_{xc}} \quad (6.58)$$

其中, \dot{x}^* 是 a 点或 a' 点对应的速度。显然,根据匀加速度运动原理,还可求得到 o 点到 a' 点和 a 点至 1 点的距离,它们也是相等的,其值是

$$\Delta x^* = \frac{(\dot{x}^*)^2}{2f_{xc}} \quad (6.59)$$

则 a' 点至 a 点的距离为 $x(0) - 2\Delta x^*$,这段距离的运行时间 T_2 是

$$T_2 = \frac{x(0) - 2\Delta x^*}{\dot{x}^*}$$

所以,总的飞行时间 T 是

$$T = 2T_1 + T_2 = \frac{\dot{x}^*}{f_{xc}} - \frac{x(0)}{\dot{x}^*} \quad (6.60)$$

考虑到 f_{xc} 为常值,它的作用为在 1 点至 a 点和 a' 点至 o 点两个部分,目标函数式(6.57)中的积分应为

$$\int_0^T |f_x| dt = 2 \int_0^{T_1} f_{xc} dt = 2f_{xc}T_1 = 2f_{xc} \cdot \frac{\dot{x}^*}{f_{xc}} = 2\dot{x}^* \quad (6.61)$$

因此,式(6.57) 成为

$$J = KT + \int_0^T |f_x| dt = K \left[\frac{\dot{x}^*}{f_{xc}} + \frac{x(0)}{\dot{x}^*} \right] + 2\dot{x}^* \quad (6.62)$$

最优交会就是要选择一个 \dot{x}^* 值(对应的有 x^* 和 t^*),使得 J 达到极小。为此,取 $dJ/d\dot{x}^*$



并令其为零,可得

$$(\dot{x}^*)^2 = \frac{Kf_{xc}}{K + 2f_{xc}}x(0) \tag{6.63}$$

对应的 a 点横轴坐标是

$$x^* = x(0) - \frac{(\dot{x}^*)^2}{2f_{xc}} \tag{6.64}$$

由式(6.63)和式(6.64)消去 $x(0)$ 解得不同的出发点,所得控制力切换点 a 在相平面的分布

$$x^* = \frac{K + 4f_{xc}}{2Kf_{xc}}(\dot{x}^*)^2 \tag{6.65}$$

是一条第一、四象限中的抛物线,这里所需的是第四象限曲线。如果从 x 轴负值点出发优化,可以得到上式前增加一负号的结果。将需要的二、四象限的曲线用一个表达式表示,则上式成为

$$x^* = -\frac{K + 4f_{xc}}{2Kf_{xc}}\dot{x}^* |\dot{x}^*| \tag{6.66}$$

这就是 a 点(见图 6.12)所在的曲线。在这条曲线上,原来以正或负 f_x 力驱动的追赶航天器,就应切换到零控制力状态,故又称为关线。相应地,当追赶航天器的运动状态沿某个 a 点惯性运行(零控制力)到 a' 点时,控制系统又应切换到负或正控制力模式,故 a' 点所在的能够到达原点 o 的曲线又称为开线,其方程式也可类似地写为

$$x = -\frac{1}{2f_{xc}}\dot{x}^* |\dot{x}^*| \tag{6.67}$$

开线是以 f_{xc} 为参数的曲线,而关曲线除了与 f_{xc} 有关之外,还与加权系数 K 有关。

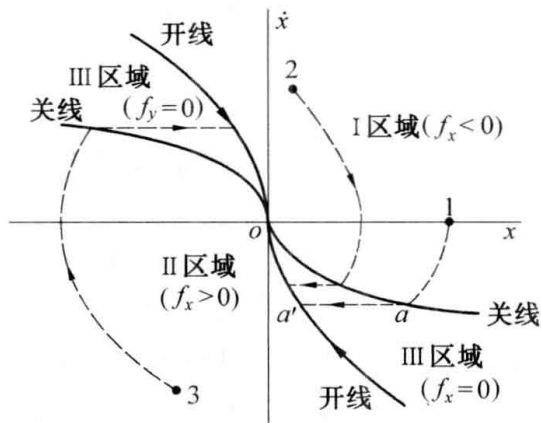


图 6.12 最优控制的开关线

在图 6.12 中,控制量的开线与关线之间的区域称为第 III 区域,其宽度范围直接与控制力值的大小和加权系数相关。综上所述,在该区域中航天器的控制力为零。III 区域右上侧为 I 区域,为施加负的控制力的区域;左下侧是 II 区域,为施加正的控制力的区域。图中还用虚线给



出了当初始状态为 1 点, 2 点或 3 点时, 把追踪航天器导引到与目标航天器交会的飞行过程, 上述控制律可以综合成

$$f_x = \begin{cases} f_{xc}, & \begin{cases} x < -\frac{K + 4f_{xc}\dot{x}^2}{2Kf_{xc}}, & \dot{x} > 0 \\ x < \frac{1}{2f_{xc}}\dot{x}^2, & \dot{x} < 0 \end{cases} \\ 0, & \begin{cases} -\frac{K + 4f_{xc}\dot{x}^2}{2Kf_{xc}} < x < -\frac{1}{2f_{xc}}\dot{x}^2, & \dot{x} > 0 \\ \frac{1}{2f_{xc}}\dot{x}^2 < x < \frac{K + 4f_{xc}\dot{x}^2}{2Kf_{xc}}, & \dot{x} < 0 \end{cases} \\ -f_{xc}, & \begin{cases} x > -\frac{1}{2f_{xc}}\dot{x}^2, & \dot{x} > 0 \\ x > \frac{K + 4f_{xc}\dot{x}^2}{2Kf_{xc}}, & \dot{x} < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (6.68)$$

对于 y 方向, 也可以同样的方式处理, 所得结论和 x 方向相同, 控制规律与式(6.68) 是类似, 只要将 x 换成 y 即可。

上面所得的控制律是在简化后的方程式(6.51) 的基础上获得的。以式(6.14) 为基础导出的最优交会对接控制方法, 由于多考虑了一些次要项, 其结果自然要稍好一些。然而式(6.14) 也略去了一些较小的项, 并非完全准确的方程式, 这是应该注意的。

这里研究的航天器交会控制问题都是把航天器作为质点来处理的, 未考虑它们的尺寸效应。在现实应用中, 特别是进入对接走廊后, 设计控制律的时候必须考虑作相对运动的航天器的外形尺寸, 并考虑轨道运动与姿态运动的耦合。避免出现某个局部相对距离为负值的情况, 以防止发生空间碰撞。

6.3 航天器的编队飞行

由多个航天器(特别是现代小卫星) 共同完成航天任务, 是一种非常有效的工作模式, 通常是以若干个航天器以星座和编队飞行方式来实现的。编队飞行是指多个航天器在围绕地球运动的同时, 彼此之间形成特定的一个整体构型。这种飞行方式称为“航天器编队”或“编队航天器群”, 也可以看做是一个“虚拟航天器”或“分布式航天器。航天器编队一般有一个作为编队的参考基准的航天器, 称做主星或参考星, 其轨道特性代表了整个编队绕引力中心运动的特性。编队中的其他航天器均是围绕其运动的, 称这种编队为绕飞编队或旋转编队。参考星只是表示一个位置, 不一定就必需有真实航天器, 有时也称为虚拟星。

航天器编队中, 航天器间的距离较小, 一般为几百米到几十千米, 为典型的航天器相对运动动力学问题。分析编队飞行基本特性, 进行编队的初步设计还都是基于 Hill 方程的分析, 精



确的轨道计算则应采用考虑更多因素如摄动的相对运动动力学模型来完成。

航天器编队属于相对参考星的环绕飞行,初始条件必须满足伴随飞行和环绕飞行的动力学约束,即 $\dot{x}_0 = -2\omega y_0$ 和 $\dot{y}_0 = \omega x_0/2$ 。此时 Hill 方程的六个初始条件还剩下 4 个参数无约束了,剩下的参数将根据具体的编队轨道的要求来最后确定。常见编队形式有:纵向编队、跟踪编队、空间圆编队、水平圆编队等,下面分别加以介绍。

6.3.1 纵向编队

纵向编队是最为简单的一种编队队形,它是指若干编队航天器与参考航天器按照一定的顺序和间隔运行在同一轨道上的编队方式,亦称为同轨道编队或串行编队,如图 6.13 所示。因航天器都是在同一轨道上运行,无 z 方向的相对运动,所以 z, \dot{z} 均为 0。相当于轨道平面内椭圆伴飞运动状态,只是此时椭圆退化为 x 轴上的一个固定点,所以纵向编队只有一个自由度即纬度幅角之差 Δu 。相对运动的解为

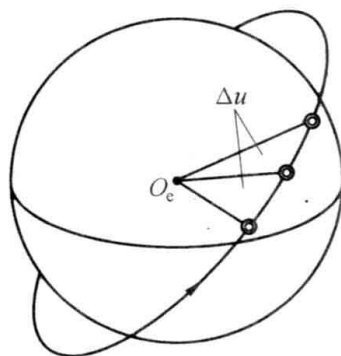


图 6.13 纵向编队

$$\begin{cases} x(t) = x_0 = -r\Delta u \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad (6.69)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases} \quad (6.70)$$

式中, r 为轨道半径。

纵向编队的基本优点是设计、布置和控制都比较简单。

6.3.2 跟踪编队

跟踪编队又称为同星下点轨迹编队,编队中的所有航天器的星下点轨迹重合,也就是说伴随航天器沿着参考航天器的星下点轨迹运动。在星下点轨迹上看,各航天器的星下点在参考航天器的星下点轨迹上按一定的间隔串行编队。这种编队在对地观测任务中有很大的应用价值,如可以对同一目标进行一定时间的连续观测。

为了实现跟踪编队飞行,前后两个航天器除真近角有固定差之外,升交点赤经亦有所不同,以补偿地球的自转角速度 ω_e 造成的星下点的偏移,其他轨道根数都相同,如图 6.14 所示。若将升交点赤经和纬度幅角的差别分别记为 $\Delta\Omega$ 和 Δu ,则由星下点间的几何关系不难得到



$$\Delta\Omega = -\omega_e \frac{\Delta u}{\omega} \quad (6.71)$$

由相对运动的运动学关系可得跟踪编队的相对运动方程

$$\begin{cases} x(t) = -a(\Delta u + \Delta\Omega \cos i) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -a\Delta\Omega \cos(\omega t) \sin i \end{cases} \quad (6.72)$$

由式(6.71)和式(6.72)得 x 与 z 的关系

$$z(t) = \frac{\cos(\omega t) \sin i}{\cos i - \omega/\omega_e} x(t) \quad (6.73)$$

当参考航天器位于升交点时,有

$$z(0) = \frac{\sin i}{\cos i - \omega/\omega_e} x(0) \quad (6.74)$$

跟踪编队中,实际上伴随航天器与参考航天器之间只剩下一个自由度了,当有 x 方向初始距离 $x(0)$ 时,跟踪编队的相对运动方程的解为

$$\begin{cases} x(t) = x(0) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{\sin i \cos(\omega t)}{\cos i - \omega/\omega_e} x(0) \end{cases} \quad (6.75)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = -\frac{\omega \sin i \sin(\omega t)}{\cos i - \omega/\omega_e} x(0) \end{cases} \quad (6.76)$$

6.3.3 空间圆编队

在空间绕飞轨道上的伴飞航天器在运行过程中,到参考航天器的距离是恒定的,也就是说伴飞航天器形成对参考航天器的圆形环绕绕飞。这种良好的特性有着广泛的应用领域,成为空间绕飞轨道的首选。

由定义作空间圆绕飞轨道运动的环绕卫星,应当满足

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_c^2 \quad (6.77)$$

即

$$(4y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\omega^2} + \frac{\dot{z}_0^2}{\omega^2}) \sin^2 \omega t + \frac{-3y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0}{\omega} \sin 2\omega t + (y_0^2 + z_0^2 + \frac{4\dot{y}_0^2}{\omega^2}) \cos^2 \omega t = r_c^2 \quad (6.78)$$

为保证上式恒成立,环绕航天器的初始状态应当满足

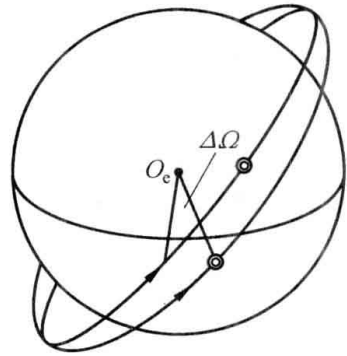


图 6.14 跟踪编队



$$\begin{cases} z_0 = \pm \sqrt{3}y_0 \\ \dot{z}_0 = \pm \sqrt{3}\dot{y}_0 \end{cases} \quad (6.79)$$

此时有

$$r_c = 2\sqrt{y_0^2 + \dot{y}_0^2/\omega^2} \quad (6.80)$$

上述分析表明,对于给定半径 r_c ,存在两条空间圆绕飞轨道,它们的初始状态取值互为相反的,如图 6.15 所示。为了同时表示两条绕飞轨道图中的两个绕飞轨道的半径特意给出一定的差别以避免某些方向的投影重合,“x”表示参考飞行器,“o”表示绕飞航天器的位置。

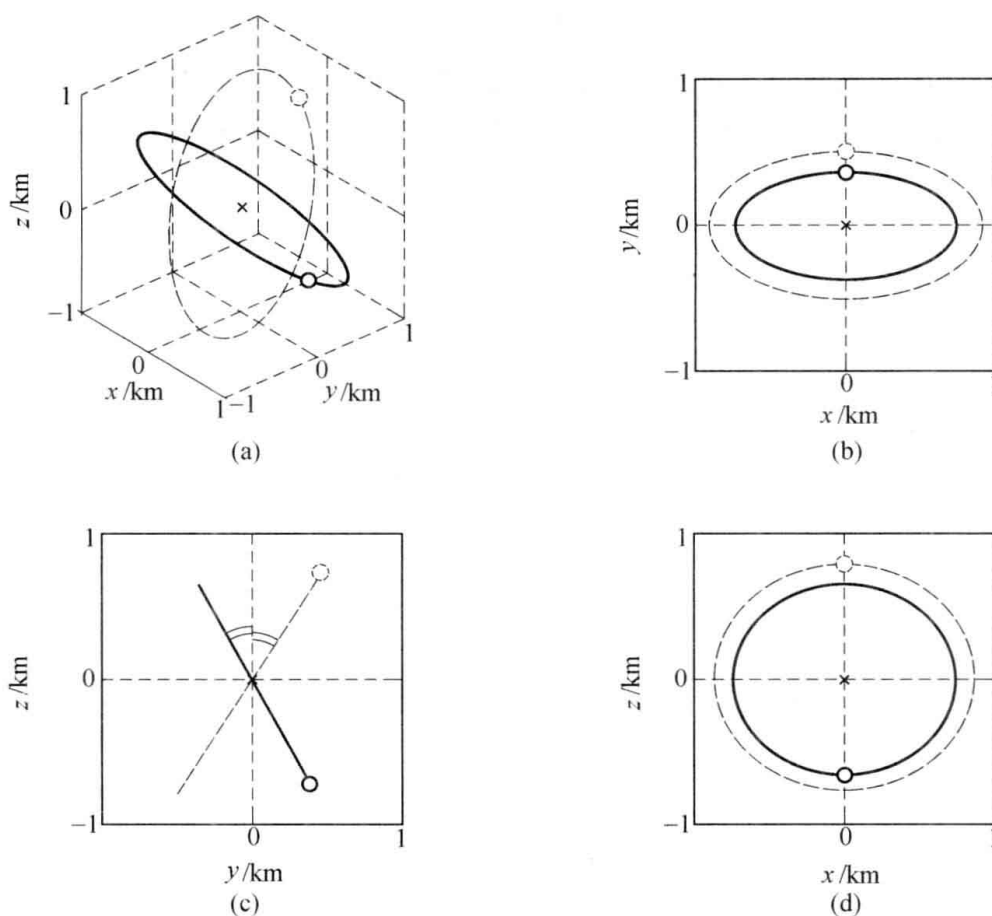


图 6.15 空间圆形绕飞轨道

6.3.4 水平圆编队

水平圆编队是指绕飞航天器的绕飞轨道在当地水平面(即 $x - z$ 平面)的投影是圆的编队队形,也称为圆形星下点编队。在对地观测中有很大的应用价值。

在当地水平面投影为圆的环绕航天器,其绕飞轨道运动应当满足



$$x^2 + z^2 = r_c^2 \quad (6.81)$$

代入 x, z 方向相对运动的表达式

$$\left(4y_0^2 + \frac{\dot{z}_0^2}{\omega^2}\right)\sin^2\omega t + \frac{-4y_0\dot{y}_0 + z_0\dot{z}_0}{\omega}\sin 2\omega t + \left(z_0^2 + \frac{4\dot{y}_0^2}{\omega^2}\right)\cos^2\omega t = r_c^2 \quad (6.82)$$

当环绕航天器的初始状态当满足

$$\begin{cases} z_0 = \pm 2y_0 \\ \dot{z}_0 = \pm 2\dot{y}_0 \end{cases} \quad (6.83)$$

时式(6.82)成立。此时有

$$r_c = 2\sqrt{y_0^2 + \dot{y}_0^2/\omega^2} \quad (6.84)$$

水平圆编队的两条轨道形式与空间圆编队相似,如图 6.15。只不过是在(c)图中,两个轨道面间的夹角从 $(30^\circ + 30^\circ)$ 减小为 $(26.565^\circ + 26.565^\circ)$;在(d)图中的 $x - z$ 平面投影由椭圆变为一个圆。

第 7 章 航天器的摄动理论

摄动(Perturbation)——物体运动轨道相对开普勒轨道(亦称无摄运动)的差别。

中心引力场中的运动实际上是建立在引力体质量集中于质心(质点)的假设之上的,也就是说当条件不满足假设时,航天器运动的状态会有改变。即与实测轨道的各个参数存在偏差——通常是很小的量。所谓摄动实际上是动力学模型误差的体现,是理论模型相对于真实轨道的差别,而不是真实轨道相对于理论模型的差别。引起摄动的因素称为摄动源。准确地描述摄动,就能够对二体模型进行修正,得到更精确的动力学模型,而不必建立一套新的体系用于描述包含各式各样摄动的轨道运动。减小摄动的过程就是精确建立动力学模型的过程,是一个螺旋上升式的认识自然现象的过程。摄动——建模——测轨,循环往复,直至达到精度要求。

摄动源主要有引力场的非理想性;稀薄大气;太阳风;电磁力;其他天体的引力等,本章主要研究前两种。

7.1 地球引力场的势函数

中心引力体——质量集中在质心处的质点,在距质心 r 处的单位质量受到的万有引力 f 大小均为 μ/r^2 ,当引力体形状为任意时,上述结论显然不能成立。实际情况亦是如此,距质心 r 处的不同点,单位质量受到的作用力 f 不尽相同。例如与质量为 $2M$ 的质点距离 r 的位置上单位质量的引力均为 $2GM/r^2$,若将质点等分开为两个的质量为 M 质点,在两质点连线的中垂线上距离连线中点(质心) r 的位置上的单位质量受到的引力和却小于 $2GM/r^2$ 。

为深入研究实际引力场中引力变化的特性,采用引力场中空间位置引力做功能力的量——势函数(Potential Function)来对引力的变化规律加以描述是下文将要开展的工作。

任意形状的中心引力体 B ,其上微元体的质量为 dm ,密度为 σ ,如图 7.1。对于空间点 A ,微元体在该处的势函数被定义为 $dU = -Gdm/r$, (对单位质量沿 r 方向单位位移做的功), G 是万有引力常数,则整个 B 体在 A 点处的势函数是

$$U = - \iiint_B G \frac{dm}{r} = - \iiint_B \frac{G\sigma}{r} dV \quad (7.1)$$

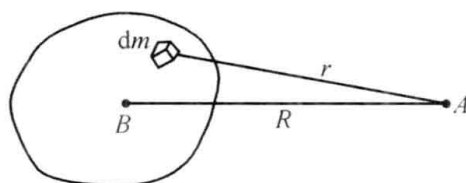


图 7.1 引力体的势函数

显然物体的势函数与其质量分布和形状均有关,可以选择变化两者之一的方法来等效描



述其势函数。通常采用均质,非规则形状的物体来等效实际密度不均、形状不规则的物体的引力场——具有相同的势函数。

7.1.1 均质球的势函数

如图 7.2 所示,均质球体(最自然的形状) B , 其密度为 σ , 半径是 R_b , 空间点 A 到球心 O 距离为 R ($R > R_b$), 求解该点的势函数。微元的确定: 以 A 点为心, 做以 r 和 $r + dr$ 为半径两球面与 B 体交 dr 厚的球壳, 再做以 A 为顶, OA 为轴, 顶角为 2θ 和 $2(\theta + d\theta)$ 的两圆锥面, 它们和先前的球壳所交的圆环作为微元体 dm , 圆环长度为 $2\pi r \sin \theta$, 横截面积为 $r d\theta \times dr$, 与 A 点的距离为 r , 则

$$dm = \sigma dV = \sigma \cdot 2\pi r \sin \theta \cdot r d\theta \cdot dr$$

B 体在 A 点的势函数是

$$U = - \iiint_B \frac{\sigma G}{r} dV = - 2\pi \sigma G \iiint_B r \sin \theta d\theta dr$$

积分限: 对于 θ 角为 0 至 θ_0 , 对于 r 为 $(R - R_b)$ 至 $(R + R_b)$, 由余弦定理有

$$\theta_0 = \arccos \frac{R^2 + r^2 - R_b^2}{2rR}$$

所以

$$\begin{aligned} U &= - 2\pi \sigma G \int_{R-R_b}^{R+R_b} r \left(\int_0^{\theta_0} G \sin \theta d\theta \right) dr = \\ &= - 2\pi \sigma G \int_{R-R_b}^{R+R_b} r \left(\frac{R^2 + r^2 - R_b^2}{2rR} - 1 \right) dr = - \frac{4\pi \sigma G}{3} \frac{R_b^3}{R} \end{aligned}$$

其中, $\frac{4\pi R_b^3}{3} \sigma = m$ 是 B 球体的质量, 因此 B 在 A 点的势函数是

$$U = - \frac{m}{R} G = - \frac{\mu}{R} \quad (7.2)$$

对于均质球, 其势函数与质点的势函数相同, 可视为中心引力场。

如求 U 对 R 导数, 则式(7.2) 成为

$$\frac{dU}{dR} = \frac{\mu}{R^2}$$

这恰是 B 物体对距离为 R 的单位质量的质点的万有引力。

一般地, 势函数和作用力的关系是用势函数的梯度(Gradient) 描述的。

$$\mathbf{f} = - \text{grad} U = - \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \quad (7.3)$$

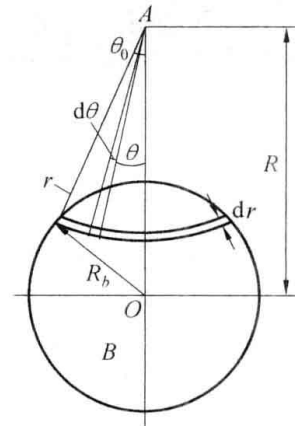


图 7.2 均质球的势函数



因 $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则对于均质球有

$$\mathbf{f} = -\frac{\mu}{R^3}x\mathbf{i} - \frac{\mu}{R^3}y\mathbf{j} - \frac{\mu}{R^3}z\mathbf{k} \quad (7.4)$$

$$\begin{cases} f_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\mu}{R^3}x \\ f_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\mu}{R^3}y \\ f_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\mu}{R^3}z \end{cases} \quad (7.5)$$

$$\frac{f_x}{x} = \frac{f_y}{y} = \frac{f_z}{z} = -\frac{\mu}{R^3} \quad (7.6)$$

式(7.6)表明 \mathbf{f} 与 \mathbf{R} 平行, 指向坐标原点。

实际情况是 \mathbf{f} 不总是指向引力体的形心, 因为引力体为非均质球。

事实上, 把地球视为均质圆球, 在许多场合都能得到精度足够的结果。但真实的地球并不是球形, 在精度要求较高的分析中, 为更好的拟合地球的引力场, 需要修改均质体的形状使其引力场更接近真实——均质椭球, 更接近地球的真实形状。

7.1.2 均质椭球的势函数

将地球视为绕南北极轴的回转体, 是以长短半轴分别是 a 和 b 的椭圆绕短轴(地轴)旋转得到, 如图 7.3。OXYZ 为确定空间位置的坐标系, OXY 平面与赤道面重合, OZ 轴与地轴重合, OXZ 为零经度子午面(格林尼治天文台)。空间 A 点的坐标为 (x, y, z) , 椭球内微元体 dm 下角的坐标为 (ξ, η, ζ) , 距地心为 ρ , 经度 λ , 纬度 φ , 与 A 点的

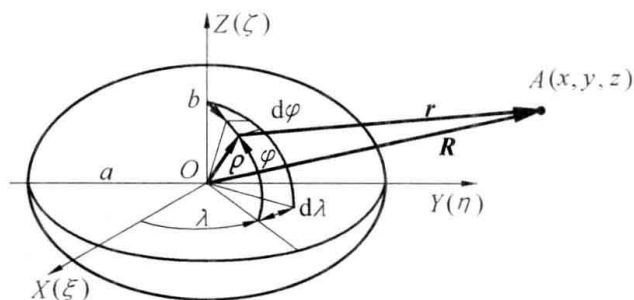


图 7.3 均质椭球体的势函数

距离为 r 。微元体的 3 个边长为 $d\rho, \rho d\varphi$ 和 $\rho \cos \varphi d\lambda$, 则有

$$dm = \sigma dV = \sigma \rho^2 \cos \varphi d\lambda d\rho d\varphi$$

整个椭球在点 A 的势函数是

$$U = - \iiint_B G \frac{dm}{r} = -G\sigma \iiint_B \frac{\rho^2}{r} \cos \varphi d\varphi d\lambda d\rho$$

显然 r 为 (x, y, z) 和 (ξ, η, ζ) 的函数, 积分之前先化简分式 $1/r$, 由几何关系 $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \boldsymbol{\rho}$, 有

$$\frac{1}{r} = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{-\frac{1}{2}} = [R^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)]^{-\frac{1}{2}} =$$



$$\frac{1}{R} \left[1 + \frac{\rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)}{R^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

应用

$$(1 + \alpha)^{-n} = 1 - n\alpha + \frac{n(n+1)}{2}\alpha^2 - O(\alpha^3) \quad (\alpha < 1, n > 0)$$

可将上式改写为

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \left[1 - \frac{\rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)}{2R^2} + \frac{3}{8} \frac{\rho^4 - 4\rho^2(x\xi + y\eta + z\zeta) + 4(x\xi + y\eta + z\zeta)^2}{R^4} \right] \quad (7.7)$$

把式(7.7)代回势函数,略去 ρ/R 、 ξ/R 、 η/R 、 ζ/R 三次及以上的项,考虑到点 O 为椭球质心,由质心特性得

$$\begin{aligned} \iiint_B \xi dm &= 0 \\ \iiint_B \eta dm &= 0 \\ \iiint_B \zeta dm &= 0 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \iiint_B \xi\eta dm &= 0 \\ \iiint_B \xi\zeta dm &= 0 \\ \iiint_B \eta\zeta dm &= 0 \end{aligned}$$

则势函数成为

$$\begin{aligned} U &= -\frac{G}{R} \iiint_B \left(1 - \frac{\rho^2}{2R^2} + \frac{3}{2} \frac{x^2\xi^2 + y^2\eta^2 + z^2\zeta^2}{R^4} \right) dm = \\ &= -\frac{G}{R}m + \frac{G}{2R^2} \iiint_B \rho^2 dm - \frac{3}{2} \frac{G}{R^5} \left(x^2 \iiint_B \xi^2 dm + y^2 \iiint_B \eta^2 dm + z^2 \iiint_B \zeta^2 dm \right) \end{aligned}$$

把上式中的 ξ 、 η 、 ζ 用极坐标来表示,将 dm 代入。考虑到

$$\xi = \rho \cos \varphi \cos \lambda \quad (7.8)$$

$$\eta = \rho \cos \varphi \sin \lambda \quad (7.9)$$

$$\zeta = \rho \sin \varphi \quad (7.10)$$

势函数成为

$$U = -\frac{G}{R}m + \frac{G}{2R^2} \iiint_B \rho^4 \cos \varphi d\varphi d\lambda d\rho - \frac{3G\sigma}{2R^5} \left(x^2 \iiint_B \rho^4 \cos^3 \varphi \cos^2 \lambda d\varphi d\lambda d\rho + \right.$$



$$y^2 \iiint_B \sigma \rho^4 \cos^3 \varphi \sin^2 \lambda \, d\varphi \, d\lambda \, d\rho + z^2 \iiint_B \rho^4 \cos \varphi \sin^2 \lambda \, d\varphi \, d\lambda \, d\rho$$

极坐标的积分限： λ 为从 0 至 2π ； φ 为从 $-\pi/2$ 至 $\pi/2$ ；而 ρ 则从 0 积至 ρ_s 。 ρ_s 由子午圈的椭圆确定，其方程为

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

用极坐标表示有

$$\rho_s = \frac{b}{(1 - e^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad (e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2})$$

积分后有

$$U = -\frac{Gm}{R} - \frac{2\pi Gb^5}{15R^5}(x^2 + y^2 - 2z^2)e^2\sigma$$

因对于椭球有

$$m = \frac{4\pi a^2 b}{3}\sigma$$

和

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = R^2 - 3z^2 = R^2(1 - 3\sin^2 \varphi)$$

设 $Gm = \mu$ ，势函数为

$$U = -\frac{\mu}{R} \left[1 + \frac{b^2 e^2}{10a^2} (1 - 3\sin^2 \varphi) \left(\frac{b}{R}\right)^2 \right]$$

令

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{a^2} e^2 &= (1 - \alpha)^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2} = (1 - \alpha)^2 \frac{a+b}{a} \frac{a-b}{a} = \\ &= (1 - \alpha)^2 \alpha (2 - \alpha) = 2\alpha + 0(\alpha^2) \end{aligned}$$

并略去 α^2 以上的各项，均质椭球的函数为

$$U = U(\lambda, \varphi, R) = -\frac{\mu}{R} \left[1 + \frac{\alpha}{5} \left(\frac{b}{R}\right)^2 (1 - 3\sin^2 \varphi) \right] \quad (7.11)$$

式中， $\alpha = (a - b)/a = 1/298.25$ ，为地球的椭率。

通过实际测量对比，椭球引力场中的轨道比中心引力场的摄动更小，更精确。而把地球视为椭球仍非精确的模型，仍存在摄动，需要进一步修正式(7.11)。事实上，通过实测和对人造地球卫星轨道的反算，能够求得更精确的地球势函数。根据式(7.11)的各项的形式，增加的修正度项应为前面项的高阶量，类似级数。经过大量的测算，更精确的地球势函数是



$$U = -\frac{\mu}{R} \left[1 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{R_{\oplus}}{R} \right)^2 (3\sin^2\varphi - 1) + \frac{J_3}{2} \left(\frac{R_{\oplus}}{R} \right)^3 (5\sin^2\varphi - 3)\sin\varphi + \frac{J_4}{2} \left(\frac{R_{\oplus}}{R} \right)^5 (3 - 30\sin^2\varphi + 35\sin^4\varphi) + \dots \right] \quad (7.12)$$

其中 $J_2 = -1.082\ 64 \times 10^{-3}$, $J_3 = 2.55 \times 10^{-6}$, $J_4 = 1.65 \times 10^{-6}$, ...

当不考虑 J_i 影响时,式(7.12)为均质球(中心引力场)模型;取到 J_2 项时为均质椭球模型,亦称为一阶摄动模型,高阶的摄动模型依此类推。 J_i 称为带谐系数, i 为奇数时, J_i 中的 \sin 项都是奇数次方,称为奇带谐系数; i 为偶数时, J_i 中的 \sin 项都是偶数次方,称为偶带谐系数。带谐项只与纬度有关,各带谐系数项的影响是逐级减小的,其体现在地球的引力体模型形状上的效果如下所述。

考虑第一项与第二项即球加 J_2 项:当 $(3\sin^2\varphi - 1) = 0$ 时,有 $\varphi = \pm 35^\circ 15' 52''$,而 $J_2 < 0$,当 $|\varphi| < 35^\circ 15' 52''$ 时,为球面上增添一薄层体积;当 $90^\circ > |\varphi| > 35^\circ 15' 52''$ 时,为球面上去掉一薄层体积,如图 7.4(a)。

考虑第一项与第三项即球加 J_3 项:当 $(5\sin^2\varphi - 3)\sin^2\varphi = 0$ 时,有 $\varphi = 0, \pm 50^\circ 46' 7''$,球面上增减部分如图 7.4(b) 所示,两圈凸带、两圈凹带。

考虑第一项与第四项即球加 J_4 项:当 $(3 - 30\sin^2\varphi + 35\sin^4\varphi) = 0$ 时,有 $\varphi = \pm 19^\circ 52' 33''$, $\pm 59^\circ 26' 40''$,球面上增减部分如图 7.4(c) 所示,三圈凸带、两圈凹带。

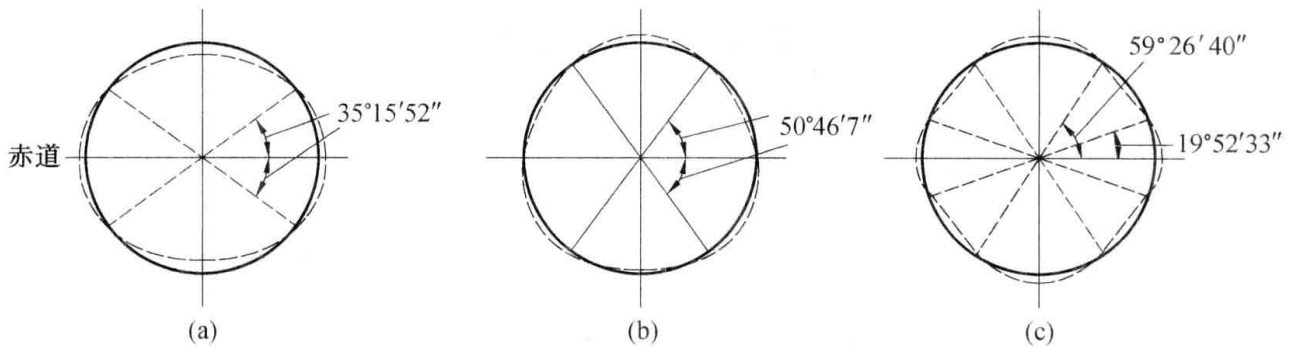


图 7.4 各阶带谐系数的影响示意图

把全部 J_i 叠加起来,均质体的形状有些近似梨形,它在椭率为 $1/298.25$ 的回转椭球体的基础上,北极约凸出 10 m ,南极则凹入了 30 m (见图 7.5),而地球赤道和两极的半径通常可取为(回转椭球体)

$$R_{\text{赤}} = 6\ 378.144\text{ km}; R_{\text{极}} = 6\ 356.759\text{ km}$$

如果更精确地描述地球的模型,还会出现沿经度圈划分的高低变化的带,与沿纬度圈的变化合并形成田谐项。表现形式与带谐项类似,这里就不再探讨了。

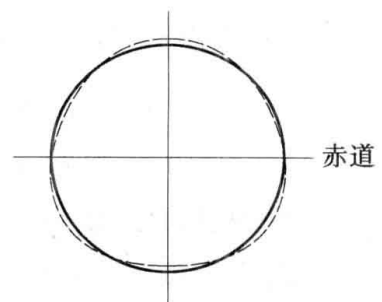


图 7.5 全部影响总和



7.2 干扰力分量引起的摄动

干扰力(Disturbing Force)的作用是使航天器的运动成为中心引力场中的受力运动,运动方程(2.10)为

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{f} \quad (7.13)$$

在此, \mathbf{f} 为作用在航天器单位质量上的干扰力,即摄动加速度。

7.2.1 受摄运动的特性

在干扰力的作用下,两体意义下的轨道要素 a, e, i, ω, Ω 均失去意义,无法直接用圆锥曲线来描述航天器的运动。同一个航天器,不同时刻其轨道要素(那个时刻飞行状态形成的二体轨道的要素)是不同的,包含有多种成分的变化。图7.6所示的为某个要素的变化构成。为了更好的分析受摄轨道的性质,引入密切轨道和平均轨道的概念,见图7.7。

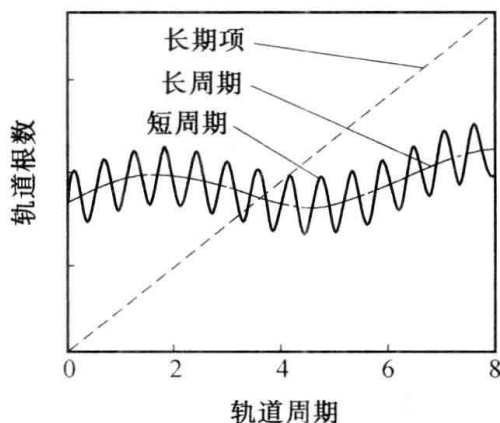


图 7.6 轨道根数的变化示意

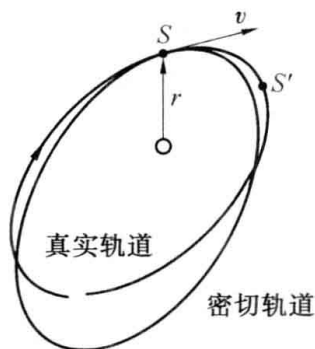


图 7.7 真实轨道与密切轨道

密切轨道(Osculating Orbit):以航天器在真实轨道(Real Orbit)上 S 点的运动状态 (\mathbf{r}, \mathbf{v}) 形成的圆锥曲线轨道。用其轨道要素来描述该点的真实轨道。

平均轨道(Mean Orbit):航天器真实轨道上 S 点和相邻的 S' 点间的若干密切轨道要素的平均值构成的圆锥曲线轨道。用其来描述 SS' 段的真实轨道。

研究中心引力场中的受摄轨道运动,可以把原来的轨道要素视为变量。航天器轨道要素的变化就是指它不同位置的密切轨道要素之间的变化和变化率,这种变化通常包含以下成分:

周期性摄动项 —— 轨道要素周期性的变化,分长周期和短周期;

长期摄动项 —— 轨道要素的持续变化。

由于摄动项 \mathbf{f} 的形式的多样性和复杂性,式(7.13)不能有解析解,只能进行数值解或近似



解析解。前者称为特殊摄动法,后者称为一般摄动法。特殊摄动法是指对式(7.13)进行数值积分,可以适合任何轨道和任意摄动力,但因数值积分存在累计误差,不适合做长期轨道计算。一般摄动法是将摄动加速度展成级数并逐项积分的解析方法,较为复杂、困难,但物理意义较明确。

特殊摄动法常用的有考威尔(Cowell)法、恩克(Encke)法和常数变易法,是按被积函数形式的差别分类的。最重要的特殊摄动法就是常数变易法。

考威尔法就是用数值法直接求解运动微分方程式,这种方法直观、简单、适用性强,对摄动项没有什么限制。由于大多数情况下,摄动力与中心引力差距较大,积分步长大了精度不够,积分步长太小将产生较大累计误差。

恩克法是对相对加速的积分,得到实际轨道与基准轨道的偏差。通常是以 t_0 时刻的密切轨道作为参考轨道,通过建立真实轨道与密切轨道偏差 Δr 的微分方程给出数值解。下一时刻较近时,可以得到线性化的微分方程。由于 Δr 的变化比 r 慢,积分步长可以加大,运算速度较快。

描述干扰力和摄动量的坐标系有

轨道坐标系: $o\xi\eta\zeta(\theta_0, n_0, r_0)$

轨道面坐标系: $OX_1Y_1Z_1(i, j, k)$

地球坐标系: $OXYZ(i_0, j_0, k_0)$

变换关系: $OXYZ$ (绕 OZ 轴转 Ω , 绕 KK' 线转 i) $\rightarrow OX_1Y_1Z_1$ (绕 OZ_1 轴转 $(\omega + \theta)$, 平移至 o 点) $\rightarrow o\xi\eta\zeta$, 见图 7.8。

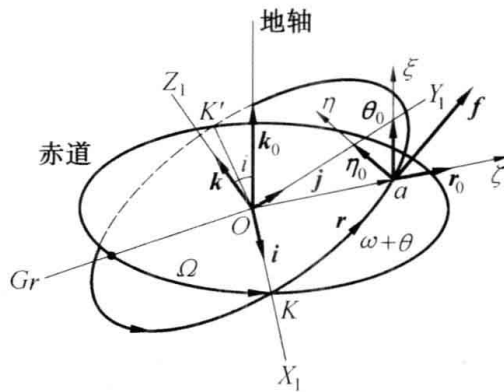


图 7.8 三个坐标系

7.2.2 以时间为变量的轨道要素变动法

将干扰力 f 在轨道坐标系 $o\xi\eta\zeta$ 中分解,有

$$f = f_\theta \theta_0 + f_n n_0 + f_r r_0$$



(1) 半长轴 a 的变动
由能量方程式

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

求得

$$v^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (7.14)$$

对式(7.14)求时间导数,视轨道要素为时变的,有

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mu \left(-\frac{2\dot{\mathbf{r}}}{r^2} + \frac{\dot{a}}{a^2} \right)$$

因

$$2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \left(\mathbf{f} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \right) = 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f} - \frac{2\mu}{r^3} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}$$

$$\dot{r} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

得

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f} \quad (7.15)$$

由于

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{r}_0 + r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_0$$

有

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f} = \dot{r}f_r + r\dot{\theta}f_\theta \quad (7.16)$$

由密切轨道方程式

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

得

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \theta \quad (7.17)$$

对其求导(密切轨道元素为常数),有

$$-\frac{p \cdot \dot{r}}{r^2} = -e \sin \theta \cdot \dot{\theta}$$

即

$$\dot{r} = \frac{er^2\dot{\theta}}{p} \sin \theta = \frac{eh}{p} \sin \theta = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \theta \quad (7.18)$$

而



$$r\dot{\theta} = \frac{h}{r} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e \cos \theta)$$

把 \dot{r} 和 $r\dot{\theta}$ 代入式(7.16) 再代入式(7.15), 则有

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}} [e \sin \theta \cdot f_r + (1 + e \cos \theta) \cdot f_\theta] \quad (7.19)$$

(2) 半正交弦 p 、轨道倾角 i 、升交点经度 Ω 的变动
轨道动量矩可以写为

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \sqrt{\mu p} \mathbf{n}_0$$

对上式求导有

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \dot{p} \mathbf{n}_0 + \sqrt{\mu p} \dot{\mathbf{n}}_0 = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times (\mathbf{f} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}) = \mathbf{r} \times \mathbf{f} \quad (7.20)$$

轨道平面的转动, 包括绕节线 KK' 的旋转 di/dt 和绕 N 轴的施转 $\dot{\Omega}$, 则轨道面的转动角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{di}{dt} \mathbf{i} + \frac{d\Omega}{dt} \mathbf{k}_0$$

而

$$\dot{\mathbf{n}}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}_0$$

所以

$$\dot{\mathbf{n}}_0 = \frac{di}{dt} (\mathbf{i} \times \mathbf{n}_0) + \frac{d\Omega}{dt} (\mathbf{k} \times \mathbf{n}_0)$$

由图 7.8, 有

$$\mathbf{k} \times \mathbf{n}_0 = \sin i \cdot \mathbf{i}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{n}_0 = -\mathbf{j}$$

因此, 最后有

$$\dot{\mathbf{n}}_0 = -\frac{di}{dt} \mathbf{j} + \frac{d\Omega}{dt} \sin i \cdot \mathbf{i}$$

把 $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$ 表示为

$$\mathbf{r} \times \mathbf{f} = \mathbf{r} \times f_n + \mathbf{r} \times f_\theta + \mathbf{r} \times f_r$$

其中, 等式右侧第 2 项为 $r f_\theta \mathbf{n}_0$; 第 3 项为 0。

而在轨道面坐标系中

$$\mathbf{r} = r \cos(\omega + \theta) \cdot \mathbf{i} + r \sin(\omega + \theta) \cdot \mathbf{j}$$

则 $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$ 为

$$\mathbf{r} \times \mathbf{f} = r f_n \sin(\omega + \theta) \mathbf{i} - f r_n \cos(\omega + \theta) \mathbf{j} + r f_\theta \mathbf{n}_0$$

所以式(7.20) 在轨道面坐标系中分量相等 ($\mathbf{n}_0 = \mathbf{k}$), 有



$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} r f_n \cos(\omega + \theta) \quad (7.21)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} r f_n \frac{\sin(\omega + \theta)}{\sin i} \quad (7.22)$$

$$\frac{dp}{dt} = 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} r f_\theta \quad (7.23)$$

由以上三式可以看出, di/dt 和 $d\Omega/dt$ 只与 f_n 有关, 这是因为只有垂直于轨道平面的力才能使平面旋转; 当 $(\omega + \theta) = \pi/2$ 时, f_n 对 $\frac{d\Omega}{dt}$ 影响最大, 而 $(\omega + \theta) = 0$ 时, 对 $\frac{di}{dt}$ 影响最大。

(3) 偏心率 e 的变动

由 $p = a(1 - e^2)$ 求导得

$$\dot{p} = \dot{a}(1 - e^2) - 2ae\dot{e}$$

因而

$$\frac{de}{dt} = \frac{\dot{a}(1 - e^2) - \dot{p}}{2ae} = \frac{\dot{a}p}{2a^2e} - \frac{\dot{p}}{2ae}$$

把 \dot{p} 和 \dot{a} 的表达式代入上式, 有

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} [e \sin \theta \cdot f_r + (1 + e \cos \theta) f_\theta] - \frac{1}{ae} \sqrt{\frac{p}{\mu}} r f_\theta - \\ &\quad \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\sin \theta \cdot f_r + \left(\frac{1}{e} + \cos \theta - \frac{r}{ae} \right) f_\theta \right] \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} + \cos \theta - \frac{r}{ae} &= \frac{1}{e} \left(1 - \frac{r}{a} \right) + \cos \theta = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \theta} \right) + \cos \theta = \\ &= \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} + \cos \theta = \frac{r}{p} (e + \cos \theta) + \cos \theta \end{aligned}$$

把它代回原式, 有

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin \theta \cdot f_r + \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \theta + \frac{re}{p} \right] f_\theta \right\} \quad (7.24)$$

(4) 近心点角距 ω 的变动

在摄动力的作用下连拱线(Apsidal Line)在轨道面内旋转, 即近心点角距 ω 发生变动。考虑扰动时, 航天器的转动角速度是

$$(\dot{\omega} + \dot{\theta}) \cdot \mathbf{n}_0 + \dot{\Omega} \cos i \cdot \mathbf{n}_0$$

所以被扰动的轨道具有的动量矩是

$$\mathbf{h} = \sqrt{\mu p} \cdot \mathbf{n}_0 = r^2 (\dot{\omega} + \dot{\theta} + \dot{\Omega} \cos i) \cdot \mathbf{n}_0$$

因而



$$\dot{\omega} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{\theta} - \dot{\Omega} \cos i$$

应该说明的是,对于无扰动的轨道应有 $\dot{\omega} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{\theta} = 0$ 。式中的 $\dot{\theta}$ 由密切轨道方程式

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

决定,故有

$$\cos \theta = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - 1 \right)$$

求导后

$$-\sin \theta \cdot \dot{\theta} = \frac{1}{e} \left(\frac{\dot{r}p - r\dot{p}}{r^2} \right) - \frac{\dot{e}}{e^2} \left(\frac{p}{r} - 1 \right)$$

上式中的 \dot{r} 可以用密切轨道的

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \theta$$

来代替。同时将 \dot{p} 和 \dot{e} 的表达式代入得

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & \frac{1}{e \sin \theta} \frac{2r^2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} f_{\theta} - \sqrt{\mu p} e \sin \theta}{r^2} + \\ & \frac{1}{e^2 \sin \theta} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin \theta \cdot f_{\theta} + \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \theta + \frac{re}{p} \right] f_{\theta} \right\} \end{aligned}$$

代入 $\dot{\Omega}, \dot{\theta}$ 到 $\dot{\omega}$ 的最初表达式得

$$\begin{aligned} \dot{\omega} = & \frac{2\sqrt{\frac{p}{\mu}}}{e \sin \theta} f_{\theta} - \frac{1}{e^2 \sin \theta} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin \theta \cdot f_r + \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \theta + \frac{re}{p} \right] f_{\theta} \right\} - \\ & \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin(\omega + \theta)}{\sin i} \cos i \cdot f_n \end{aligned}$$

经过整理,得

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\frac{\cos \theta}{e} f_r + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin \theta}{e} f_{\theta} - \frac{r}{p} \sin(\omega + \theta) \cot i \cdot f_n \right] \quad (7.25)$$

(5) 参数变动特性

\dot{a}, \dot{e} 描述轨道尺寸和形状的变化(在轨道平面中的),与 f_n 无关;

\dot{p} 只与 f_{θ} 有关,这是因为 f_r 不改变角动量矩 h ,而 $h = \sqrt{\mu p}$;

$\dot{\Omega}, di/dt$ 描述轨道平面在空间的取向,它只与 f_n 有关;

$\dot{\omega}$ 与三个分量都有关。



7.2.3 以纬度角距 (Argument of Latitude) u 为变量的参数变动

有时轨道要素随时间的参数变动,不如以纬度角距 $u = (\omega + \theta)$ 为自变量更为方便,特别当运动超过一周时,很多根数的变化对 u 呈周期性,做积分运算更为简便。因

$$\frac{d}{du} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{du}$$

而

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{\Omega} \cos i$$

所以有

$$\frac{d}{du} = \frac{1}{\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{\Omega} \cos i} \frac{d}{dt}$$

将 $\dot{\Omega}$ 代入,有

$$\frac{d}{du} = \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} \Phi \frac{d}{dt}$$

其中, $\Phi = (1 - \frac{r^3}{\mu p} \sin u \cot i \cdot f_n)^{-1}$

各参数对 u 的变动公式汇总见本节的最后部分。

7.2.4 干扰力 f_τ, f_σ 分量引起的摄动

在速度坐标系中, f 在轨道面内还可以分解为切向分力 f_τ 和法向分力 f_σ , β 是当地水平线和速度方向的夹角,见图 7.9。

$$f_\theta = f_\tau \cos \beta - f_\sigma \sin \beta$$

$$f_r = f_\tau \sin \beta + f_\sigma \cos \beta$$

而

$$\cos \beta = \frac{r\dot{\theta}}{v} = \frac{1}{rv} r^2 \dot{\theta} = \frac{\sqrt{\mu p}}{rv}$$

$$\sin \beta = \frac{\dot{r}}{v} = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \theta$$

则

$$f_\theta = \frac{\sqrt{\mu p}}{rv} \cdot f_\tau - \frac{1}{v} \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \theta \cdot f_\sigma \quad (7.26)$$

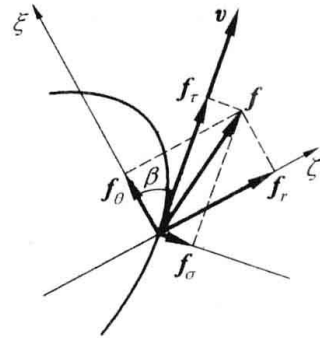


图 7.9 速度坐标系中的干扰力分量



$$f_r = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \theta \cdot f_\tau + \frac{\sqrt{\mu p}}{vr} \cdot f_\sigma \quad (7.27)$$

将上两式代入以 f_θ 和 f_r 引起的参数变动表达式可以得到 f_τ 和 f_σ 引起的摄动公式。

7.2.5 公式汇总

(1) 干扰力分量 f_r, f_θ 和 f_n 引起的轨道参数随时间变动关系

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}} [e \sin \theta \cdot f_r + (1 + e \cos \theta) \cdot f_\theta] \quad (7.28)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos(\omega + \theta) \cdot f_n \quad (7.29)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin(\omega + \theta)}{\sin i} \cdot f_n \quad (7.30)$$

$$\frac{dp}{dt} = 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} r f_\theta \quad (7.31)$$

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin \theta \cdot f_r + \left[\left(1 + \frac{r}{p}\right) \cos \theta + \frac{re}{p} \right] f_\theta \right\} \quad (7.32)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\frac{\cos \theta}{e} f_r + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin \theta}{e} f_\theta - \frac{r}{p} \sin(\omega + \theta) \cot i \cdot f_n \right] \quad (7.33)$$

(2) 干扰力分量 f_r, f_θ 和 f_n 引起的轨道参数变动随 u 的变动关系

$$\frac{da}{du} = \frac{2r^2 a^2 \Phi}{\mu p} [e \sin \theta \cdot f_r + (1 + e \cos \theta) \cdot f_\theta] \quad (7.34)$$

$$\frac{di}{du} = \frac{r^3 \Phi}{\mu p} \cos u \cdot f_n \quad (7.35)$$

$$\frac{d\Omega}{du} = \frac{r^3 \Phi}{\mu p} \frac{\sin u}{\sin i} \cdot f_n \quad (7.36)$$

$$\frac{dp}{du} = \frac{2r^3 \Phi}{\mu} f_\theta \quad (7.37)$$

$$\frac{de}{du} = \frac{r^2 \Phi}{\mu} \left\{ \sin \theta \cdot f_r + \left[\left(1 + \frac{r}{p}\right) \cos \theta + \frac{re}{p} \right] f_\theta \right\} \quad (7.38)$$

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{r^2 \Phi}{\mu} \left[-\frac{\cos \theta}{e} f_r + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin \theta}{e} f_\theta - \frac{r}{p} \sin u \cdot \cot i \cdot f_n \right] \quad (7.39)$$

其中

$$\Phi = \left[1 - \frac{r^3}{\mu p} \sin u \cdot \cot i \cdot f_n \right]^{-1} \quad (7.40)$$

(3) 干扰力分量 f_τ, f_σ 和 f_n 引起的轨道参数的变动与时间的关系

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2 v}{\mu} f_\tau \quad (7.41)$$



$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos(\omega + \theta) \cdot f_n \quad (7.42)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu P}} \frac{\sin(\omega + \theta)}{\sin i} \cdot f_n \quad (7.43)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2p}{v} f_\tau - \frac{2re}{v} \sin \theta \cdot f_\sigma \quad (7.44)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{v} [2(e + \cos \theta) f_\tau + \frac{r}{a} \sin \theta \cdot f_\sigma] \quad (7.45)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{ve} \sin \theta \cdot f_\tau - \frac{a(1 + e^2) - r}{ave^2} \cdot f_\sigma - \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \sin(\omega + \theta) \cot i \cdot f_n \quad (7.46)$$

7.3 地球卫星的摄动

研究地球扁率、稀薄大气、日月引力摄动造成的绕地航天器——地球卫星的运动的改变，可以利用或者修正摄动运动，使航天器按照希望的轨道运行。

7.3.1 地球扁率引起的摄动

取地球引力场的一阶摄动模型

$$U(r, \varphi) = -\frac{\mu}{r} \left[1 + J_2 \frac{1}{2} \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^2 (3\sin^2 \varphi - 1) \right] \quad (7.47)$$

其中，第一项是地球作为均质球时的正常引力势函数，第二项是造成干扰力的地球扁率摄动项，所以有

$$U_p = -J_2 \frac{\mu R_\oplus^2}{2r^3} (3\sin^2 \varphi - 1) \quad (7.48)$$

(λ, φ) 为星下点位置，有

$$\sin \varphi = \sin i \sin(\omega + \theta) = \sin i \sin u \quad (7.49)$$

代入得

$$U_p = -J_2 \frac{\mu R_\oplus^2}{2r^3} (3\sin^2 i \sin^2 u - 1)$$

则干扰力的各分量是 U_p 在轨道坐标系中三个坐标轴方向的偏导数

$$f_r = -\frac{\partial U_p}{\partial \zeta} = -\frac{\partial U_p}{\partial r} = -\frac{3}{2} J_2 \frac{\mu R_\oplus^2}{r^4} (3\sin^2 i \sin^2 u - 1) \quad (7.50)$$

$$f_\theta = -\frac{\partial U_p}{\partial \xi} = -\frac{\partial U_p}{r \partial u} = \frac{3}{2} J_2 \frac{\mu R_\oplus^2}{r^4} \sin^2 i \sin 2u \quad (7.51)$$



$$f_n = -\frac{\partial U_p}{\partial \eta} = \frac{\partial U_p}{r \sin u \partial i} = \frac{3}{2} J_2 \frac{\mu R_{\oplus}^2}{r^4} \sin 2i \sin u \quad (7.52)$$

(1) 考虑地球扁率时的同步卫星轨道

轨道在赤道平面内,有 $i = 0^\circ$,地球的引力是

$$f_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} \left(1 - \frac{3}{2} J_2 \frac{R_{\oplus}^2}{r^2}\right) \quad (7.53)$$

应有引力加速度 = 向心加速度,所以若以 ω_{sid} 表示地球自转恒星角速度——每个恒星日 $T_{\text{sid}} = 23\text{h}56\text{m}4.091\text{s}$ 转一周(见附录 A1.3),得

$$\frac{\mu}{r^2} \left(1 - \frac{3}{2} J_2 \frac{R_{\oplus}^2}{r^2}\right) = \omega_{\text{sid}}^2 r$$

可以解得

$$r_{\text{GSO}} = 4\,2164.78 \text{ km}$$

而不考虑地球扁率时

$$r_{\text{GSO}} = 4\,2164.26 \text{ km}$$

比球形引力场的轨道高了 522.3 m,以适应扁率引起的赤道面内的引力增加。

(2) 地球扁率造成的 Ω 变动

若把 f_n 的表达式(7.52)代入式(7.36),将求得

$$\frac{d\Omega}{du} = 3J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{p}\right)^2 \Phi \sin^2 u \cos i [1 + e \cos(u - \omega)] \quad (7.54)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi &= \left[1 - \frac{r^3}{\mu p} \sin u \cot i - \frac{3}{2} J_2 \frac{\mu R_{\oplus}^2}{r p} \sin 2i \sin u\right]^{-1} = \\ &= \left[1 - \frac{3}{2} J_2 \frac{R_{\oplus}^2}{r p} 2 \sin^2 u \cos^2 i\right]^{-1} \approx 1 \end{aligned}$$

由式(7.54)是可以看出, Ω 中包含了长期及周期性摄动,积分一周得

$$(\Delta\Omega)_{2\pi} = 3J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{p}\right)^2 \cos i \int_0^{2\pi} \sin^2 u [1 + e \cos(u - \omega)] du$$

p, i, e 取常值(平均轨道的参数),所以有

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 u du &= -\frac{1}{4} \sin 2u \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} u \Big|_0^{2\pi} = \pi \\ e \int_0^{2\pi} \sin^2 u \cos(u - \omega) du &= \frac{e}{3} \sin^2 u \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

所以



$$(\Delta\Omega)_{2\pi} = 3\pi J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{p}\right)^2 \cos i = 3\pi J_2 \frac{\left(\frac{R_{\oplus}}{a}\right)^2}{(1-e^2)^2} \cos i = -0.5846^\circ \frac{\left(\frac{R_{\oplus}}{a}\right)^2}{(1-e^2)^2} \cos i \quad (7.55)$$

变换为每天的变动量 $(\Delta\Omega)_{\text{day}}$ 。航天器在一天中旋转的周数是

$$n = \frac{24 \times 3600}{2\pi \sqrt{a^3/\mu}} = \frac{8.64 \times 10^4}{2\pi \sqrt{R_{\oplus}^3/\mu}} \sqrt{R_{\oplus}^3/a^3}$$

所以有

$$(\Delta\Omega)_{\text{day}} = -9.964^\circ \frac{\left(\frac{R_{\oplus}}{a}\right)^{7/2}}{(1-e^2)^2} \cos i \quad (7.56)$$

当 $i < 90^\circ$ 时节线向西运动,而 $i > 90^\circ$ 时,节线向东运动,称节线的这种向西或向东的运动为轨道平面的进动,是由 f_n 作用形成的,在一周的运动过程中, f_n 相当于沿节线上作用一力矩,如图7.10所示。

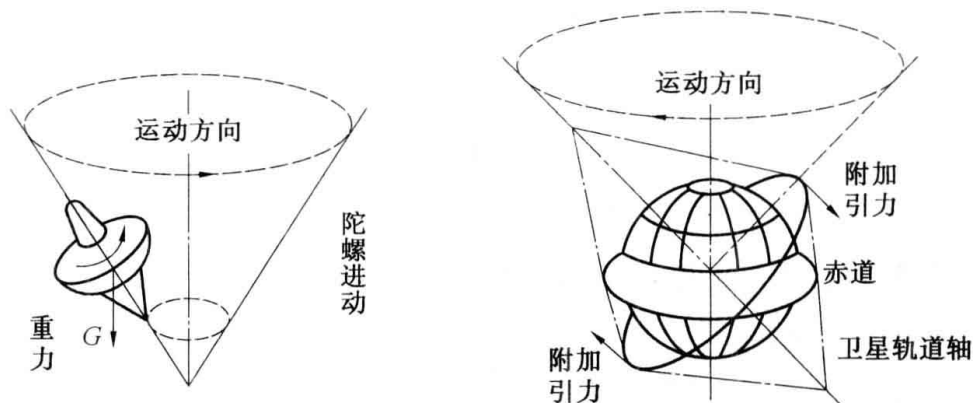


图 7.10 地球扁度引起的轨道进动示意

太阳同步轨道(Sun Synchronous Orbit): 航天器轨道面的升交点运动与在太阳的视运动同步的轨道,见图7.11。太阳同步轨道的轨道平面与太阳的夹角保持不变,利用这种轨道可以方便地完成观测天气、地域或人工特征的变化类型的遥感任务,这些任务需测量观测目标的太阳照射特征如阴影长度。

太阳的视运动就是赤黄交线的运动,其角速度是

$$360^\circ/365.25\text{d} = 0.9856^\circ/\text{d}(\text{向东})$$

航天器的轨道在黄道面的转动若与太阳视线同步(相对于阳光的角度不变),则有

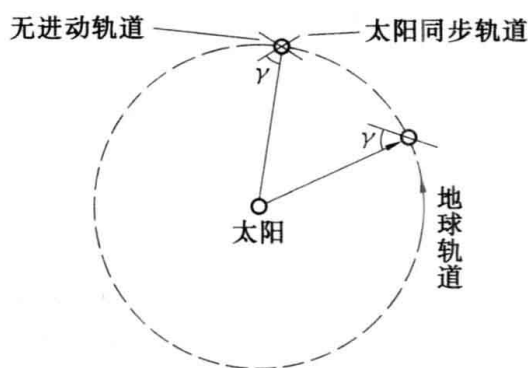


图 7.11 太阳同步轨道



$$(\Delta\Omega)_{\text{day}} = 0.9856^\circ$$

即

$$i = \arccos \left[-0.09896^\circ \left(\frac{a}{R_\oplus} \right)^{7/2} (1 - e^2)^2 \right] \quad (7.57)$$

对于圆轨道,轨道倾角 i 和轨道高度 $h = a - R_\oplus$ 之间的关系如图 7.12。

(3) 地球扁率对 ω 的摄动

近地点角距 ω 的变动直接造成近地点的变动,使航天器轨道长轴的方向发生改变。把式

(7.50) ~ (7.52) 的代入式(7.39),与 $\Delta\Omega$ 同样的方法对 u 从 0 至 2π 积分,经过推导得

$$(\Delta\omega)_{2\pi} = -\frac{3}{2}\pi J_2 \frac{\left(\frac{R_\oplus}{a}\right)^2}{(1 - e^2)^2} (5\cos^2 i - 1)$$

或

$$(\Delta\omega)_{2\pi} = 0.2923^\circ \frac{\left(\frac{R_\oplus}{a}\right)^2}{(1 - e^2)^2} (5\cos^2 i - 1)$$

用前面相似的变换方法,还可求得 ω 的每天的变动

$$(\Delta\omega)_{\text{day}} = 5.00^\circ \frac{\left(\frac{R_\oplus}{a}\right)^{7/2}}{(1 - e^2)^2} (5\cos^2 i - 1) \quad (7.58)$$

对于的赤道轨道,最大,大约可达 $20^\circ/\text{d}$,如若

令

$$5\cos^2 i - 1 = 0$$

即

$$i = \arccos \sqrt{1/5} = 63.43^\circ$$

可得近地点角距 ω 固定,也就是长轴方向不变特殊轨道——冻结轨道(Critically Inclined Orbit),如前述的前苏联的“闪电”大椭圆轨道通信卫星。

当轨道倾角 $i < 63.43^\circ$ 时, ω 增大,轨道长轴逆时针旋转;当轨道倾角 $i > 63.43^\circ$ 时, ω 减小,轨

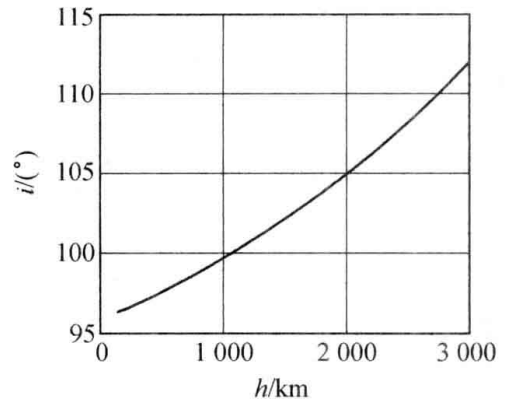


图 7.12 i 与 h 的关系

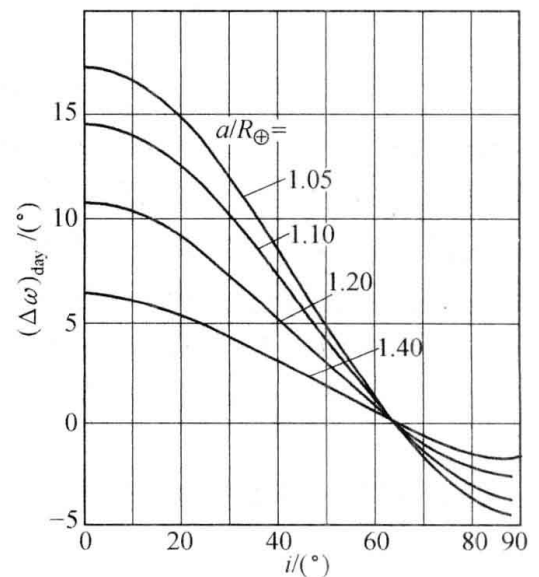


图 7.13 $(\Delta\omega)_{\text{day}}$ 与 i 的关系



道长轴顺时针旋转,如图 7.13。

(4) 地球扁率的其他影响

周期摄动:对于 a 和 e 幅值较大(对 a 约为几千米);对 i, Ω, ω 幅值较小;轨道运行周期 $\tau_p = \tau + \Delta\tau_p$, 周期的摄动量 $\Delta\tau_p \approx$ 几秒。

无对 a, e 和 i 的长期摄动。

7.3.2 低地球轨道(LEO-Low Earth Orbit)的气动力摄动和轨道寿命

(1) 大气模型

- I. 大气层是球对称的(无扁率,日下点无密度峰等);
- II. 大气层不旋转;
- III. 航天器的横截面为常量;
- IV. 大气密度为高度的函数(一维大气密度模型)

$$\rho = \rho_0 \exp[-(h - h_0)/H]$$

其中, $H = H(h)$, 标称高度。

气动力分量: f_τ 为阻力, f_σ 为升力, f_n 为侧向力, 由于航天器速度较高, 气动力以 f_τ 为主, 如图 7.14。

$$f_\tau = -\frac{1}{m} C_D A \frac{\rho}{2} v^2 \quad (7.59)$$

式中: m ——航天器质量;

A ——速度方向的横截面积;

C_D ——阻力系数。

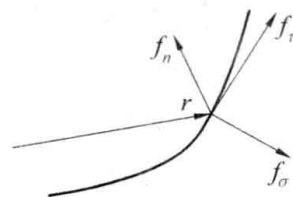


图 7.14 气动力分量

在航天器运行的轨道高度, 气体极为稀薄, 具有

$$K_n = \frac{\text{平均分子自由程}}{\text{航天器特征尺寸}} \gg 1$$

可以认为大气是自由分子流状态, 在航天器的附近分子之间无碰撞, 阻力是由分子碰撞航天器得到的。在 100 km 以上的高度, 上述条件是可以得到满足的。此时 C_D 与航天器的温度, 气体温度和航天器速度有关, 在大多数情况下, 有

$$C_D = 2.2$$

对结构复杂和侧向面积较大的航天器, C_D 值与上式相差较多。

(2) 圆轨道的气动摄动

$$\frac{dr}{dt} = \frac{da}{dt} = \frac{2a^2 v}{\mu} f_\tau$$

将 f_τ 代入得



$$\frac{dr}{dt} = -\frac{2r^2 v C_D A}{\mu} \frac{\rho}{m} \frac{v^2}{2} = -\frac{\rho r^2 v^3}{\mu B} \quad (7.60)$$

其中, $B = m/C_D A$ ——弹道参数, 对于圆轨道有

$$v^2 = \frac{\mu}{r}, \quad v dt = r d\theta$$

则

$$dr = -\frac{r^2 \rho}{B} d\theta$$

对圆轨道的一周进行积分($\rho = \text{const.}$), 得

$$\int_0^{2\pi} \frac{\rho}{B} d\theta = \int_r^{r+\Delta r} -\frac{1}{r^2} dr$$

$$(\Delta r)_{2\pi} = -\frac{2\pi r^2 \rho}{B + 2\pi r \rho} \quad (7.61)$$

写成 h 的关系式

$$(\Delta h)_{2\pi} = -\frac{2\pi(R_{\oplus} + h)^2}{B + 2\pi\rho(R_{\oplus} + h)} \rho(h) \quad (7.62)$$

每周降低的高度主要与大气密度 $\rho(h)$ 有关。按上式及附录 A2 中给出的空气密度计算方法求得 $\rho(h)$, 航天器每运动一周下降的高度的计算结果绘于图 7.15 中, 为 $(\Delta r)_{2\pi} \cdot B$ 与 h 的关系。每周下降的高度与轨道高度, 大气状态和航天器的弹道参数有关。

(3) 航天器轨道的寿命(Life Time)

航天器的寿命是它能够正常工作的时间, 在其本系统能够正常工作的前提下, 决定航天器寿命的因素就是其轨道的寿命。不能在设计的轨道上运行, 航天器将失去存在的意义。

由式(7.60), 对于圆轨道有

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\rho r^2 v^3}{\mu B} = -\frac{2\pi\rho r^2}{\tau_0 B}$$

可以得

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{\tau_0 B}{2\pi r_0^2 \rho_0} \exp\left(-\frac{r_0 - r}{H}\right) \quad (7.63)$$

积分上式, r 从 r_0 积到 $r_L = 133.8 \text{ km} + R_{\oplus}$, 认为当航天器达此高度之后, 即结束轨道飞行, 在稠密大气中烧毁或坠落地面。

$$T_L = t_L - t_0 = -\frac{\tau_0 B H}{2\pi r_0^2 \rho_0} \exp\left(-\frac{r_0 - r}{H}\right) \Bigg|_{r_0}^{r_L} = \frac{\tau_0 B H}{2\pi r_0^2 \rho_0} [1 - \exp\left(-\frac{r_0 - r_L}{H}\right)] \quad (7.64)$$

这是近似公式, 其误差约 10% ~ 15%。其中 H 应取对应于 r_0 和 r_L 处的平均值, 大约为 50 左右, 当 $(r_0 - r_L) > 4H$ 时, 取

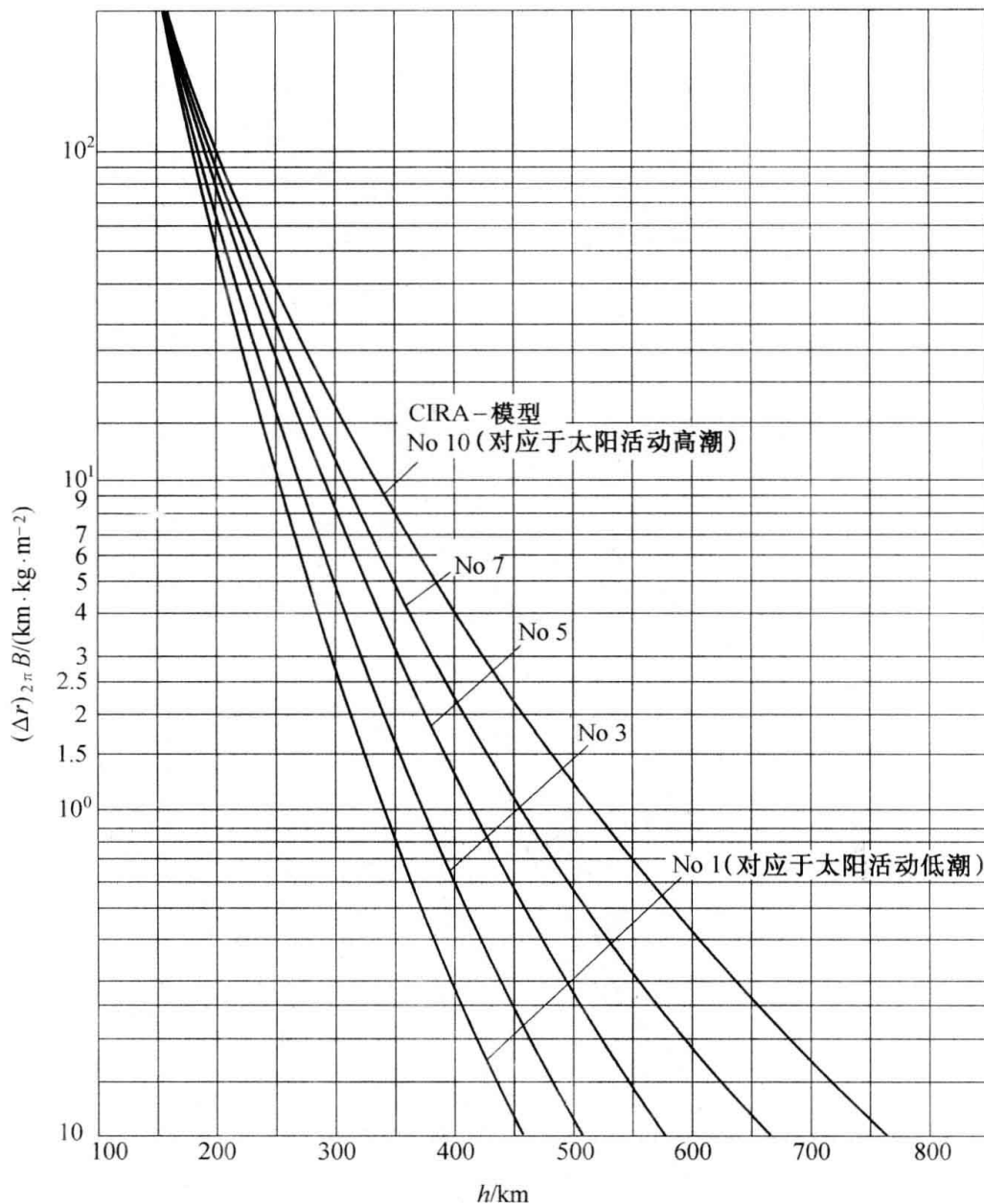


图 7.15 轨道高度对降高的影响

$$\left[1 - \exp\left(-\frac{r_0 - r_L}{H}\right) \right] \approx 1 \text{ (误差 2\%)}$$

则

$$T_L = \frac{\tau_0 B H}{2\pi r_0^2 \rho_0} = \frac{B H}{\sqrt{\mu} r_0 \rho_0} \tag{7.65}$$

轨道高度与寿命见图 7.16, 轨道高度随时间的变化见图 7.17。

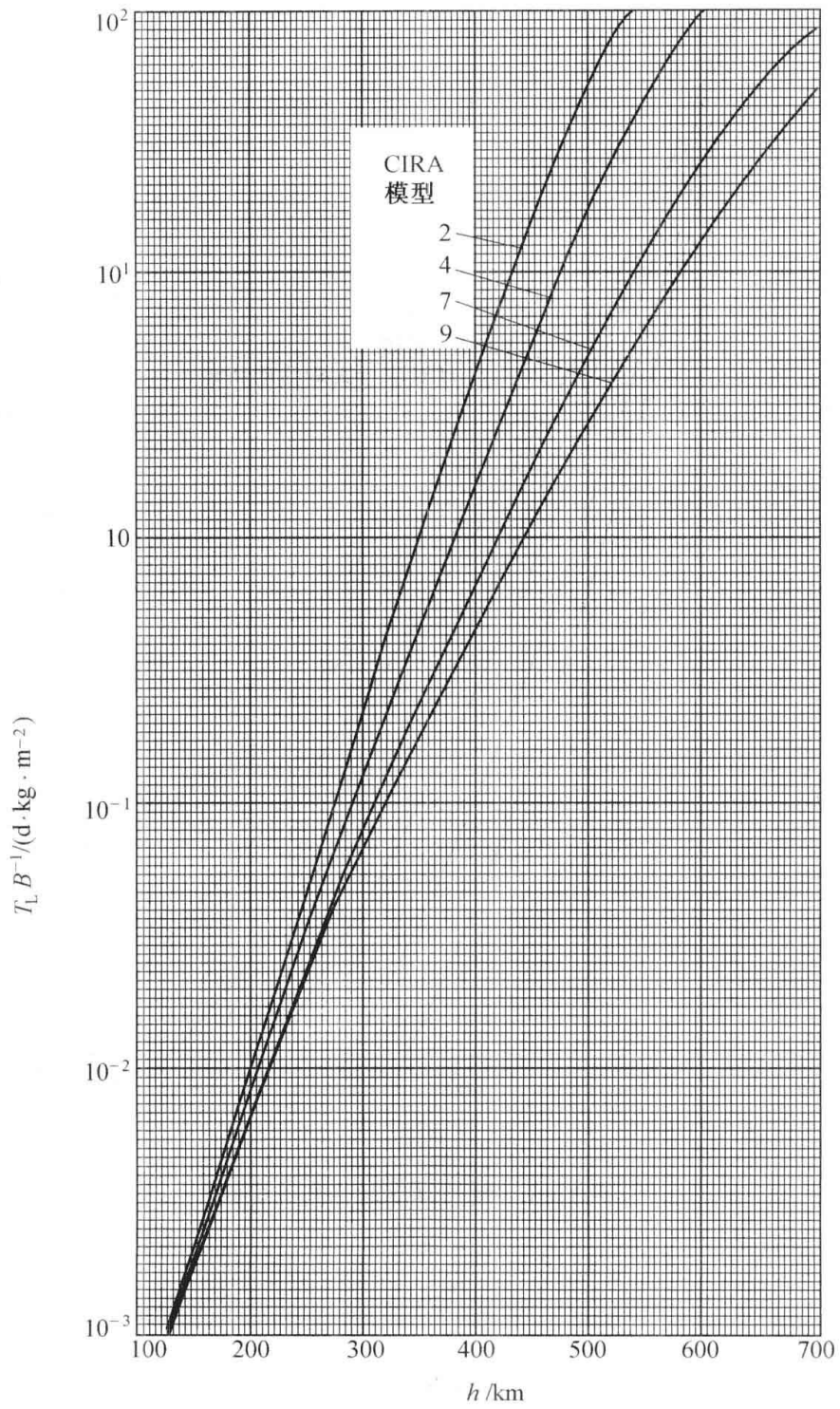


图 7.16 圆轨道的寿命

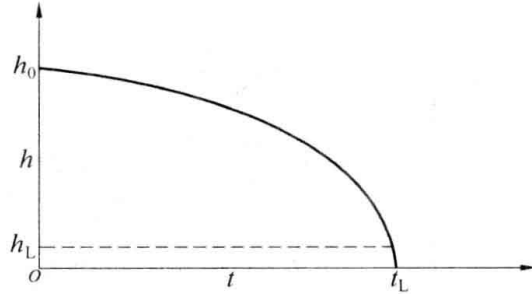


图 7.17 轨道高度与时间的关系

(4) 大气对椭圆轨道的摄动

大气阻力在近地点影响最大,远地点最小,对轨道形状和大小有直接的影响(见图 7.18)。

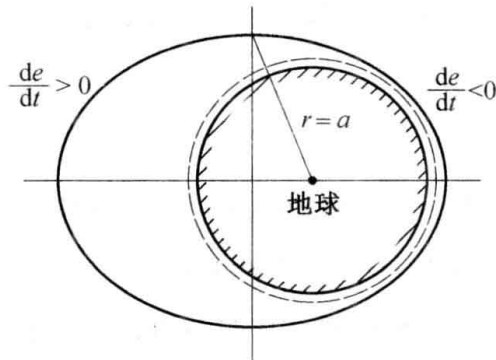


图 7.18 大气对椭圆轨道的摄动

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2 v}{\mu} f_{\tau} = -\frac{\rho a^2 v^3}{\mu B} \quad (7.66)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{2}{v} (e + \cos \theta) f_{\tau} = -\frac{\rho v}{B} (e + \cos \theta) \quad (7.67)$$

可见 da/dt 恒为负,长轴在不断变短,而 de/dt 在 $\cos \theta = -e$ 处变号,因在近地点一侧值大,在远地点一侧值小,所以大气的平均影响是负的。航天器的轨道在大气阻力的影响下,将越变越小,越来越圆。假如简单地考虑大气只在近地点对航天器有影响,远地点无阻力作用,则当航天器经近地点时会损耗一些能量,致使远地点降低;但在远地点因无阻力而不会产生能量损耗,近地点将不会变动。因此,航天器的远地点高度下降得要比近地点快得多,如图 7.19 所示。远地点距离、偏心率和周期都是下降很快的,近地点距离下降缓慢。

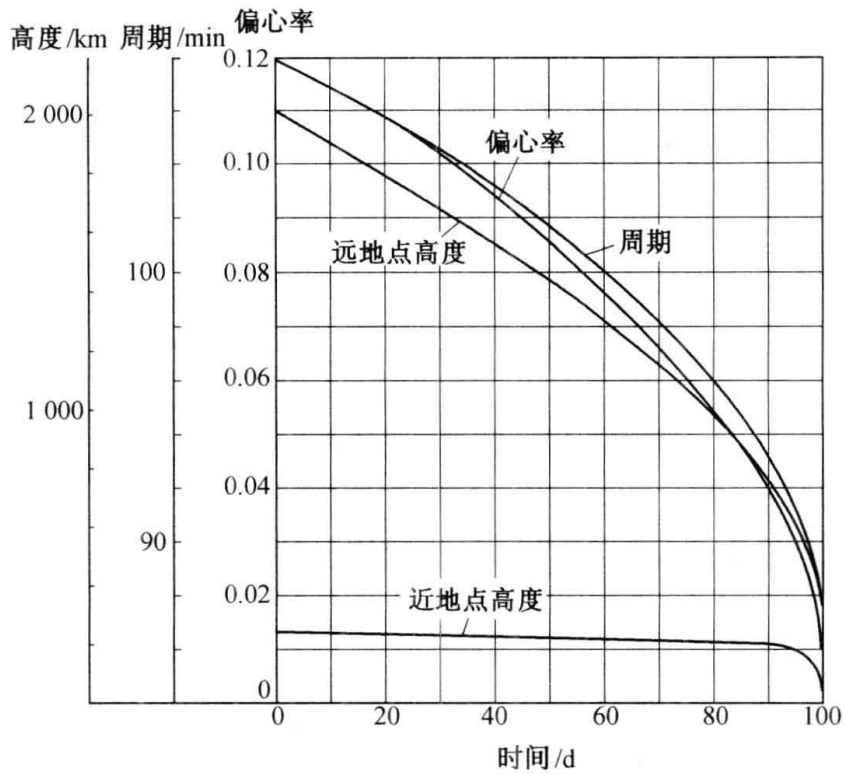


图 7.19 椭圆轨道参数的大气摄动

7.3.3 地球静止轨道(GSO, Geostationary Orbit) 的摄动

地球静止轨道的主要干扰力有:太阳和月球的引力,这是由于 GSO 的半径较大,为地球半径的 6.6 倍的原因;地球引力场的周向非理想性,这是沿地球周向质量分布不均造成的结果。

(1)GSO 的南-北摄动

地球赤道与黄道平面的夹角为 $23^{\circ}27'$, 卫星与太阳距离不同, 太阳引力大小略有差别(夏至为最大), 形成的绕春分点方向力矩造成静止轨道的南-北方向的摄动(周期 53 年, $\Delta i_{\max} = 14^{\circ}41'$), 见图 7.20 和图 7.21。静止轨道卫星的角动量 H 与地轴重合, 力矩 M 与春分点方向同向, 则轨道平面的进动角速度 ω 与它们的关系为 $M = \omega \times H$ 。

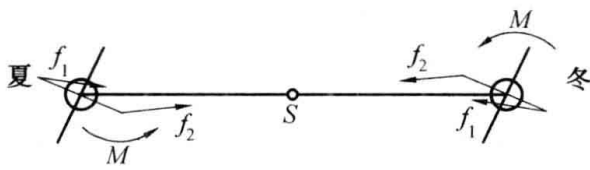


图 7.20 太阳的影响

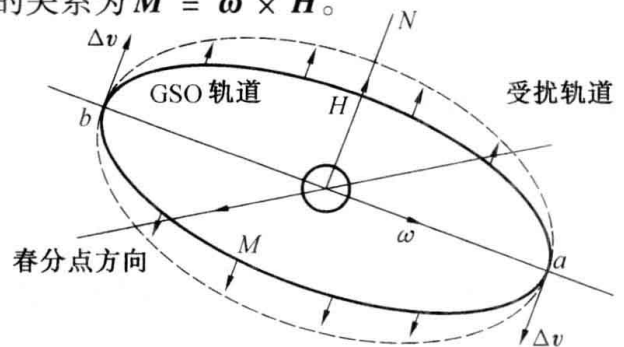


图 7.21 太阳引起的南-北摄动



太阳和月球的综合影响约为 $0.85^\circ(0.27 + 0.58)/\text{年}$, 现代通信卫星要求 $|\Delta i| < 0.1^\circ$, 需要在一定时间内在 a, b 点施加一垂直于轨道平面的速度脉冲修正南 - 北漂移。

$$\Delta v = 2v_{CS} \sin \frac{\Delta i_0}{2}$$

$$(\Delta v)_{\text{年}} = \Delta v \cdot \frac{0.85}{\Delta i_0} = 2 \times 3\,075 \times \sin \frac{\Delta i_0}{2} \times \frac{0.85}{\Delta i_0} = 45.6 \text{ m/s}$$

10年(小于通信卫星的寿命)的总速度增量需消耗20%质量的燃料(单组元的肼 $w = 2\,000 \text{ m/s}$)来维持卫星南北方向稳定, 如果采用电火箭($w = 30\,000 \text{ m/s}$), 此比例可减小到1.5%。

(2)GSO 东-西摄动

地球在横截面的非圆形将引起的周向摄动, 即出现 f_τ , 如图 7.22。地球周向的椭圆形将引起 GSO 上的卫星相对地球作东 - 西方向的谐振运动, 见图 7.23。 f_τ 的大小和方向与卫星所在经度有关, 可表示为

$$f_\tau = 0.58 \times 10^{-7} \sin[2(\lambda - 75^\circ)] (\text{m/s}^2) \tag{7.68}$$

即

$$f_\tau \begin{cases} > 0 & 75^\circ < \lambda < 165^\circ, 255^\circ < \lambda < 345^\circ \\ = 0 & 75^\circ, 165^\circ, 255^\circ, 345^\circ \\ < 0 & -15^\circ < \lambda < 75^\circ, 165^\circ < \lambda < 255^\circ \end{cases} \tag{7.69}$$

$$|f_\tau| = f_{\tau \text{max}}, \lambda = 30^\circ, 120^\circ, 210^\circ, 300^\circ$$

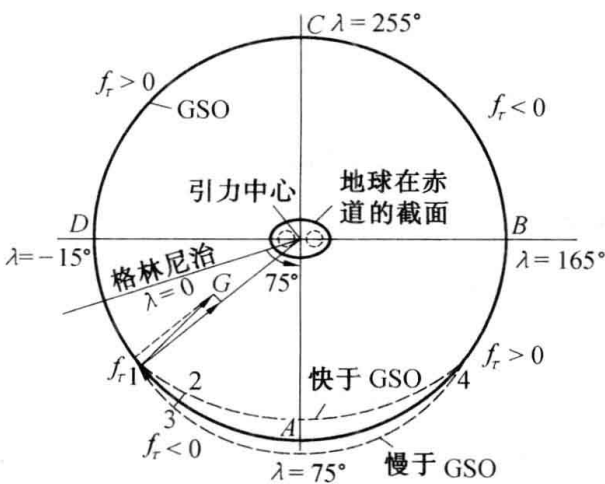


图 7.22 切向摄动力的分布

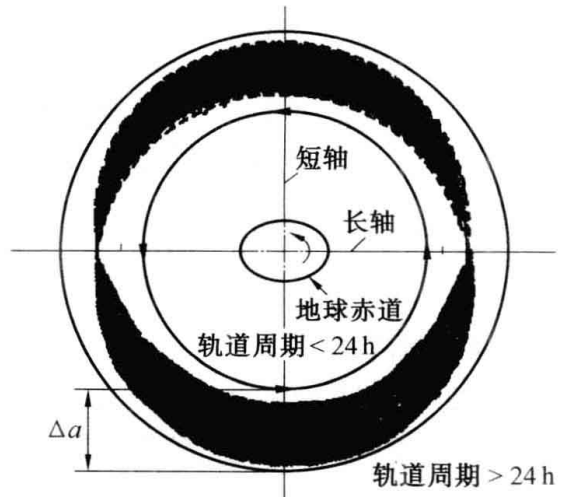


图 7.23 地球静止卫星的天平动

在 $-15^\circ < \lambda < 75^\circ$ 和 $165^\circ < \lambda < 225^\circ$ 区间, 摄动量 f_τ 起减小能量的作用;
 在 $75^\circ < \lambda < 165^\circ$ 和 $225^\circ < \lambda < 345^\circ$ 区间, 摄动量 f_τ 起增加能量的作用;
 在 $\lambda = 30^\circ, 120^\circ, 210^\circ, 300^\circ$ 时, 摄动量 f_τ 幅值最大;



在 $\lambda = 75^\circ, 165^\circ, 225^\circ, 345^\circ$ 时, 摄动量 f_r 幅值等于零, 为四个摄动平衡点。其中 $75^\circ, 225^\circ$ 处为稳定平衡点, $165^\circ, 345^\circ$ 处为不稳定平衡点。

f_r 对 GSO 的摄动

由式(7.41)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{da}{dt} = \frac{2a^2 v}{\mu} f_r$$

可以看出, f_r 直接对轨道的高度起作用, 由于能量守恒, 卫星的动能也会产生变化, 相对于原来的定点位置产生漂移(drift)。正的 f_r 使轨道高度升高, 运行速度减小, 卫星向西漂移; 负的 f_r 使轨道高度降低, 运行速度增大, 卫星向东漂移。不同经度, 漂移的速度不同, 见图 7.24。自由状态下, 为以 A 或 C 点为平衡点往复的运动(天平动), Δa 可达 34 km, 最大周期为 818 天(2.24 年)。B, D 为不稳定平衡点, 也是往复运动的边界。

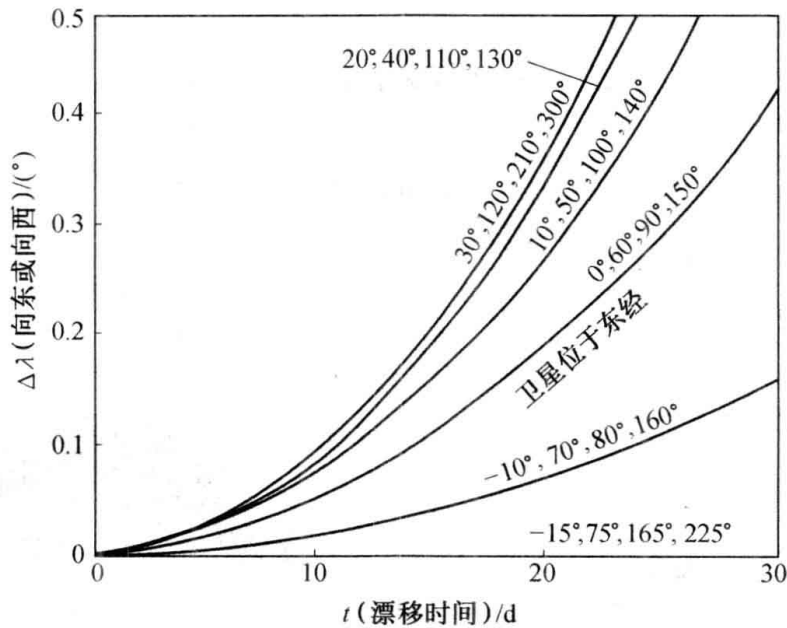


图 7.24 不同经度的漂移速度

东-西摄动的修正

在图 7.22 中, 1 点为定点位置的负差偏差, 有 $\Delta\lambda = -0.1^\circ$, 当卫星向东漂至 2 点到达正偏差, 即 $\Delta\lambda = +0.1^\circ$ (时间因定轨位置不同为 10 ~ 20 天不等) 时, 开始修正, 应用霍曼过渡 ($T/2$ 的时间), 将轨道提高 (向西漂移时为降低) 至 3 点, 如图 7.25。在 3 点卫星在 f_r 的作用下又漂回 1 点。东-西方向轨道保持的过程就是从 1 点漂至 2 点修正至 3 点再漂至 1 点的循环往复的过程, 根据不同的定轨位置, 修正的周期也各不相同, 轨道的修正量也不尽相同。

东-西向修正所需速度增量比南 - 北向修正的小, 一般有

$$(\Delta v)_{EW} < 1/20(\Delta v)_{SN}$$

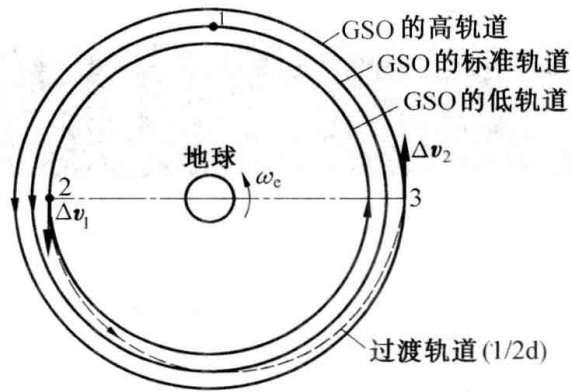


图 7.25 东-西摄动的修正

由于同经度的国家和地区都要使用这个位置的 GSO 资源,而卫星存在东-西向漂移,又要进行轨道保持工作,卫星的碰撞管理是非常必要的。

第 8 章 航天器的返回与软着陆

为了完成任务,航天器需要穿过外层大气到达引力体的表面,这个过程称为进入。进入地球大气叫再入,因为航天器绝大多数都是从地面发射的,已通过一次大气,所以称为再入。若能够在地面上安全着陆称作返回,返回式航天器显然是能够完成再入的。航天器再入技术与很多科学技术有关,如航天器动力学、空气动力学、防热与温控技术、导航与控制技术、火箭发动机技术、测控技术、着陆与回收技术等。它是由上述学科和技术的有关部分组成的一门新的综合性的交叉学科。

当引力体表面无大气或大气极为稀薄时,向其表面的降落,需要借助反作用发动机装置和辅助手段以确保航天器的安全着陆。

本章将着重研究向地球表面的返回的大气层外的轨道飞行段与在空气中的气动飞行段和在无大气引力体上软着陆段的动力学问题。

8.1 进入式航天器的分类

进入式航天器可以用多种分类方法,例如按是否载人可分为载人和非载人;按任务的不同可分为人造卫星、载人飞船和航天飞机;按用途可分为试验的、考察的和应用的航天器;按是否可重复使用又可分为一次性和多次重复使用的航天器等。按技术上的主要特征进行再入式航天器的分类,可以按这类航天器进入大气层后的气动特性和飞行特性的不同分别将进入式航天器进行分类。

按气动特性($K = C_y/C_x$ ——气动品质)分类:

弹道式进入航天器, $K \approx 0$;

弹道—升力式(半弹道式)进入航天器, $K = 0.2 \sim 0.5$;

升力式进入航天器, $K \geq 1.0$ 。

按进入过程中的控制方法,还可划分为:

利用攻角 α 控制的进入航天器;

利用滚转角 γ 控制的进入航天器;

同时利用 α 和 γ 角进行控制的复合控制的进入航天器。



8.1.1 弹道式进入航天器

弹道式进入航天器是指进入时,在其上只有气动阻力作用,不产生升力的航天器。人类第一个载人飞船,苏联的“东方号”,美国的第一代载人飞船“水星号”,我国的返回式卫星都属于此类飞行器。

弹道式进入航天器由于升阻比 $K = 0$,在大气层内的运动无控制,进入轨道由进入点位置、进入速度大小和进入角所决定,而进入状态是由过渡段轨道决定,过渡段轨道又由制动段的制动点位置和制动参数所决定。因此一旦制动点位置和制动参数确定后,整个返回轨道便确定了,中间是无法调整的。这样,运行轨道的偏差、制动点位置偏差、制动姿态的偏差、制动参数的偏差、质量偏差和气动系数偏差等都会造成落点参数很大的偏差,使着陆点有很大的散布。控制弹道式进入最大过载的主要办法就是控制进入角。例如为了使航天员所承受的过载值不超过容许值 $8 \sim 10 g$,进入角大小要控制在 3° 以下,这对制动离轨段的要求是很高的。尽管弹道式进入航天器存在落点散布大和再入难度高等主要问题,但由于进入大气层后不产生升力或不控制升力,再入轨道比较陡峭,所经历的航程和时间较短,因而气动加热的总量也较小,防热问题相对而言较易处理;它的气动外形也不复杂,可做成简单的、静稳定的旋成体。上述两点都使它的结构和防热设计大为简化,因而成为载人飞船最先采用的一种进入方式。

8.1.2 弹道-升力式进入航天器

在弹道式进入航天器的基础上,通过配置再入器质心的办法,使航天器进入大气层时产生一定的升力,这种进入方式称为弹道-升力式进入。采用弹道-升力式进入的航天器,其质心不配置在进入器的中心轴线上,而是配置在偏离中心轴线一小段距离的地方,这样配置质心,使进入器进入大气时产生一个不大的平衡攻角,同时产生一个不大的升力。这样偏离中心轴线配置质心在平衡状态下产生的攻角称为配平攻角,所产生的升力一般不大于阻力的一半,即升阻比 C_L/C_D 小于 0.5。

与弹道式进入相比,有一定升力的进入航天器,可以利用其升力增大再入走廊的宽度,改善再入状况。在相同的进入条件下,增大升阻比还可以减小最大过载值和降低最大热流。此外,弹道-升力式进入航天器,在进入段通过滚动控制可以改变升力矢量的方向,从而能在一定的程度上调整再入器在大气中的轨道,使进入航天器有一定的机动飞行能力,这样可以大大减小进入航天器的着陆点散布,有可能将进入航天器的着陆点控制在一定的区域内。美国的“双子座”号飞船首次采用了弹道-升力式进入方式,飞船可以在纵向 1 200 km,横向 110 km 的范围内调整着陆点。与采用弹道式进入的“水星”号载人飞船比较,“双子座”飞船的返回性能大大改善,进入角由 3° 增大到 7° ,最大过载由 $10 g$ 下降到 $5 g$ 以下,着陆点散布从百千米级下降到十千米级。

由于采用弹道-升力式进入的进入航天器既保持了弹道式再入航天器结构简单和防热易



于处理的特点,又能适当的利用升力,在一定程度上克服了弹道式进入的缺点。因此,在需要降低最大减速过载和减小着陆点散布的场合下,弹道-升力式进入方式被广泛采用。

8.1.3 升力式进入航天器

当要求进入航天器水平着陆时,必须给进入器足够大的升力,使进入轨道,特别是着陆段平缓到适合水平着陆的程度。进入器升力增大和进入段可调整升力,可以增加航天器的机动能力。平缓的再入段和大范围的机动飞行能力,使进入航天器水平着陆和着陆到指定的机场跑道上成为可能。

能够实现水平着陆的升力式进入航天器的升阻比一般都大于 1,也就是说进入器在进入段的升力大于阻力,这样大的升力不能再用偏离对称中心轴线配置质心的办法获得。因此升力式进入航天器不能再用旋成体,只能采用不对称的升力体。升力体又可分为带翼和不带翼两种,都能产生大于 1 的升阻比,但是不带翼的升力体全靠形体产生升力,会使形体复杂化、增大尺寸和质量,因此对航天器而言一般不采用。现有的和正在研制的升力式进入航天器,都是带翼的升力体,形状和飞机类似。

升力式进入航天器由于进入段比较平缓,进入段航程和飞行时间都比弹道式和弹道-升力式进入航天器长得多,虽然最大热流值和最大过载都减小,但总的加热量大且作用时间长。此外这种进入航天器的构形比弹道式的复杂得多,再加上多次重复使用的要求,使得这种进入航天器的气动力问题、防热问题和结构问题变得十分复杂,这些问题是设计这种再入器的关键,为此要付出很大代价。

8.2 大气层外的飞行

设进入航天器的初始状态为圆轨道,在 1 点处施加制动脉冲 Δv (与 v_0 夹角 $(\pi - \alpha)$) 后,航天器的运动状态由 r_0, v_0 变为 $v_1 = v_0 + \Delta v, r_1 = r_0, \theta_1$, 形成近心点距离小于大气边缘半径的椭圆返回轨道。到达大气边缘 2 点,以 v_2, r_2, θ_2 状态进入大气,见图 8.1。由于 1-2 的运动为椭圆轨道,则

由速度矢量关系,在 1 点有

$$v_1^2 = v_0^2 + \Delta v^2 - 2v_0\Delta v \cos \alpha \quad (8.1)$$

$$v_0 = v_1 \cos \theta_1 + \Delta v \cos \alpha \quad (8.2)$$

在 2 点,由能量和动量矩守恒有

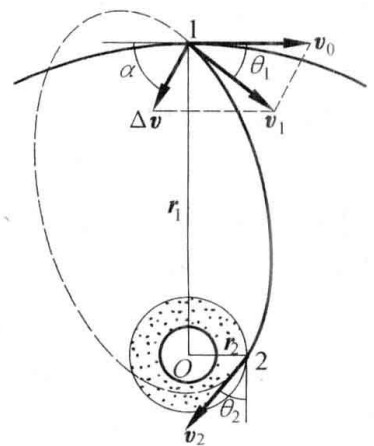


图 8.1 大气层外的飞行



$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{\mu}{r_1} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{\mu}{r_2} \quad (8.3)$$

$$r_1 v_1 \cos \theta_1 = r_2 v_2 \cos \theta_2 \quad (8.4)$$

给定 $\Delta v, \alpha$, 由以上四个方程可以解得 $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$ (r_1, r_2 已知) 四个状态。但为了能够返回, 一般以 θ_2 为控制目标, 则对于给定的 θ_2 , 四个方程含五个变量, 通常可解得某两个量如 $\Delta v, \alpha$ 的关系。对于不同的 α 角, 相应的制动速度脉冲 Δv 是否存在极小值, 可以通过求解 α_{opt} 来进行分析。

由式(8.2), (8.4) 消 $v_1 \cos \theta_1$ 得

$$r_2 v_2 \cos \theta_2 = r_1 v_0 - r_1 \Delta v \cos \alpha \quad (8.5)$$

上式对 α 求导, 且令 $d\Delta v/d\alpha = 0$, 有

$$\frac{dv_2}{d\alpha} r_2 \cos \theta_2 = r_1 \Delta v \sin \alpha \quad (8.6)$$

式(8.1) 和式(8.3) 对 α 求导, 消去 $dv_1/d\alpha$, 考虑到 $d\Delta v/d\alpha = 0$, 得

$$v_2 \frac{dv_2}{d\alpha} = v_0 \Delta v \sin \alpha \quad (8.7)$$

在式(8.6) 和式(8.7) 中消去 $dv_2/d\alpha$ 得

$$\left(r_1 - \frac{r_2 v_0}{v_2} \cos \theta_2\right) \Delta v \sin \alpha = 0 \quad (8.8)$$

即

$$\sin \alpha_{opt} = 0 \quad \text{或} \quad r_2 \frac{v_0}{v_2} \cos \theta_2 - r_1 = 0 \quad (8.9)$$

将式(8.9) 作为第五个方程, 可以解得最优的 α 对应的运动状态。显然 $\alpha_{opt1} = 0$ 为最优 α 值之一, 另一最优值 α_{opt2} 还可以利用式(8.9) 中的第二个式子求得。

由式(8.5) 求出 $r_2 \cos \theta_2$, 再将式(8.1) 和式(8.3) 代入(圆轨道 $v_0^2 = \mu/r_1$), 则有

$$(\Delta v/v_0)^2 - \cos \alpha_{opt2} (\Delta v/v_0) + 2(r_1/r_2 - 1) = 0 \quad (8.10)$$

$$\alpha_{opt2} = \arccos \left[\frac{2(r_1/r_2 - 1) + (\Delta v/v_0)^2}{\Delta v/v_0} \right] \quad (8.11)$$

当 α_{opt2} 取不同的值时, $(\Delta v/v_0)$ 与 (r_1/r_2) 的关系如图 8.2。

若 $\alpha_{opt2} = \alpha_{opt1} = 0^\circ$ 时, 只有一个最优值, 可以得到 γ 曲线。曲线方程为

$$(\Delta v/v_0)^2 - (\Delta v/v_0) + 2(r_1/r_2 - 1) = 0$$

γ 曲线与纵轴所围区域称 Γ 区域。

在 Γ 区域外(包括 γ 线), 有

$$\left. \frac{d\Delta v}{d\alpha} \right|_{\alpha = \alpha_{opt1}} = 0$$

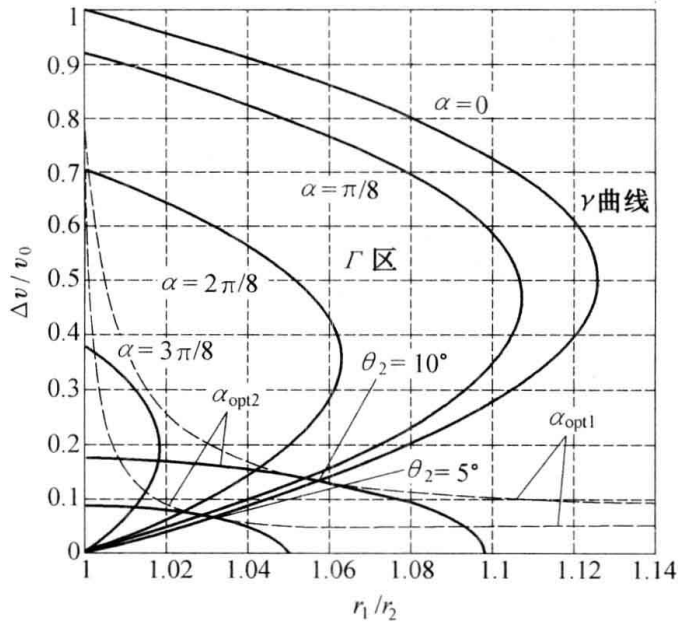


图 8.2 圆轨道制动参数特性

和

$$\left. \frac{d^2 \Delta v}{d\alpha^2} \right|_{\alpha = \alpha_{opt1}} > 0$$

在 Γ 区域之内,有

$$\left. \frac{d\Delta v}{d\alpha} \right|_{\alpha = \alpha_{opt2}} = 0$$

和

$$\left. \frac{d^2 \Delta v}{d\alpha^2} \right|_{\alpha = \alpha_{opt2}} > 0$$

因此,根据极值原理,有如下结论:

(1) 当 $(\Delta v/v_0) - (r_1/r_2)$ 在 Γ 区域之外和边界线上时,即

$$r_1/r_2 \geq 1.125$$

或 $r_1/r_2 \leq 1.125$,且

$$(\Delta v/v_0) \geq 1/2 + \sqrt{9 - 8(r_1/r_2)}/2$$

或

$$(\Delta v/v_0) \leq 1/2 - \sqrt{9 - 8(r_1/r_2)}/2$$

取 $\alpha = \alpha_{opt1}$,制动脉冲应朝圆轨道速度 v_0 的反方向施加。此时可以由式(8.1)和式(8.3)解得

$$v_2 = v_0 \sqrt{(1 - \Delta v/v_0)^2 + 2(r_1/r_2 - 1)} \quad (8.12)$$

此时显然还有 $\theta_1 = 0$,由(8.4)和(8.12)还可求解出给定 θ_2 时的最小速度脉冲。



$$\Delta v_{\min} = v_0 \left[1 - \sqrt{\frac{2(r_1/r_2 - 1)}{(r_1/r_2 \cos \theta_2)^2 - 1}} \right] \quad (8.13)$$

(2) 当 $(\Delta v/v_0) - (r_1/r_2)$ 在 Γ 区域之内, 即

$$1/2 - \sqrt{9 - 8(r_1/r_2)}/2 < (\Delta v/v_0) < 1/2 + \sqrt{9 - 8(r_1/r_2)}/2 \quad (r_1/r_2 < 1.125)$$

取 $\alpha = \alpha_{\text{opt}2}$ 。此时可以由式(8.9)和式(8.14)解得

$$v_2 = v_0 \sqrt{1 - (\Delta v/v_0)^2 - 2(r_1/r_2 - 1)} \quad (8.14)$$

$$\Delta v_{\min} = v_0 \sqrt{1 - 2(r_1/r_2 - 1) - \left(\frac{\cos \theta_2}{r_1/r_2}\right)^2} \quad (8.15)$$

8.3 进入式航天器气动飞行动力学

假设条件:球形大气,中心引力场,无姿态运动。

进入式航天器进入大气之后的运动方程式是

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{P} + \mathbf{F} + \mathbf{G} \quad (8.16)$$

式中, m 为进入式返回航天器的质量, \mathbf{P} , \mathbf{F} 和 \mathbf{G} 分别是作用在其上的发动机推力、气动力和中心星体的引力。过载和加热主要与纵面内的运动有关, 故在纵平面中的速度坐标系中进行研究, 见图 8.3。式(8.16)纵面内的分量形式为:

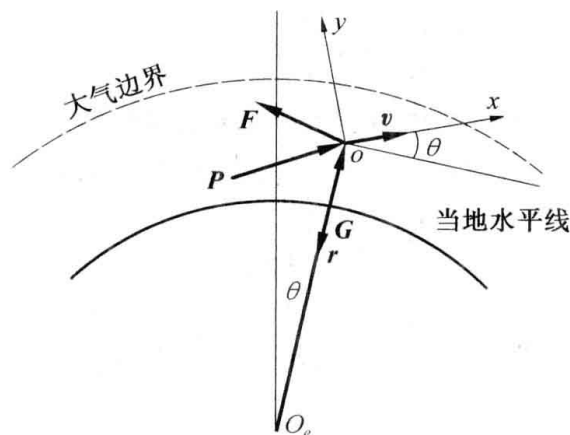


图 8.3 纵平面内的运动

$$m \frac{dv}{dt} = P_v - F_x - mg \sin \theta$$

$$m \left(v \frac{d\theta}{dt} - \frac{v^2}{r} \cos \theta \right) = P_\theta + F_y - mg \cos \theta$$

式中, P_v 和 P_θ 是推力在速度和其垂直方向的分量; 通常有大气 $P = 0$, 无大气 $F = 0$ 。第二式左侧第 1 项为速度方向的改变量, 坐标系旋转引起, 第 2 项是因沿轨道运动的向心加速度在速度



垂直方向的分量。

气动阻力和升力为

$$F_x = \frac{\rho v^2}{2} S_m C_x$$

$$F_y = \frac{\rho v^2}{2} S_m C_y$$

其中, C_x 和 C_y 为阻力和升力系数, S_m 为特征面积(一般取航天器横截面积), ρ 为大气密度, $\rho v^2/2$ 为动压头(具有压力的因次)。整理得

$$\frac{dv}{dt} = -\sigma \frac{\rho v^2}{2} - g \sin \theta + \frac{P_v}{m} \quad (8.17)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sigma K \frac{\rho v}{2} + \left(\frac{v}{r} - \frac{g}{v}\right) \cos \theta + \frac{P_\theta}{mv} \quad (8.18)$$

其中, $\sigma = S_m C_x/m$, 弹道参数——单位质量的气动阻力, $K = C_y/C_x$, 升阻比——气动品质。还有

$$g = g_0 \left(\frac{R_B}{r}\right)^2 \quad (8.19)$$

其中, R_B 为目标星体的半径。

运动学关系

$$\frac{dH}{dt} = v \sin \theta \quad (8.20)$$

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{R_B}{r}\right) v \cos \theta \quad (8.21)$$

式(8.20)和(8.21)分别是航天器高度和沿引力体表面运动距离变化率。

过载——物体上的作用力(这里是气动力)与其海平面重量之比。

$$n_x = \frac{F_x}{mg_0} = \frac{S_m C_x \rho v^2}{2mg_0} = \sigma \frac{\rho v^2}{2g_0} \quad (8.22)$$

$$n_y = \frac{F_y}{mg_0} = \frac{S_m C_y \rho v^2}{2mg_0} = K\sigma \frac{\rho v^2}{2g_0} \quad (8.23)$$

总的气动过载

$$n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = \sigma \frac{\rho v^2}{2g_0} \sqrt{1 + K^2} \quad (8.24)$$

式(8.17)和(8.18)是时变的非线性微分方程组,一般无解析解。为了获得过载、加热的基本规律,通常都是进行近似分析。通常有以下几种方法:

- (1) 忽略方程式次要项,导出近似解析解;
- (2) 对某些特例求精确解;
- (3) 升力和阻力系数可变的航天器可以进行小参数的级数求解;



(4) 利用相似理论,构造一条相对轨道,以无因次相似参数进行分析。
精确计算还是需要采用数值方法。

8.4 进入过程的加热、过载和控制

能够改变航天器运动状况的参数就是弹道参数 σ 和气动品质 K 。相对来说气动品质 K 的作用更大,通过对 K 控制,达到对运动过程的控制,使各项指标满足设计要求。各类航天器 K 的控制方法、可控程度也是不相同的。

8.4.1 弹道式进入

当 $K = 0$,为无控飞行,航天器在大气内的飞行状态由初始条件决定,最重要的是进入角 θ_2 。为进行近似分析,假设:

I. 大气密度随高度的变化符合

$$\rho = \rho_0 \exp(-\beta H) \quad (8.25)$$

其中, H 为飞行高度, β 是常数, ρ_0 是当 $H = 0$ 时的大气密度;

II. $H \ll R_B$, 即飞行高度远小于中心星体半径;

III. 阻力比重力在速度方向的分量大得多,即 $F_x \gg mg \sin \theta$, 则有

$$\frac{dv}{dt} = -\sigma \frac{\rho v^2}{2} \quad (8.26)$$

通常弹道式返回的进入角 θ_2 的绝对值是不大的,其初始段,因飞行速度高,接近于圆弧(轨道运动),即

$$\theta \doteq \theta_2 = \text{const.} \quad (8.27)$$

因此,式(8.20)成为

$$\frac{dH}{dt} = v \sin \theta = v \sin \theta_2 \quad (8.28)$$

式(8.26)除以式(8.28)得

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\sigma \rho_0}{2 \sin \theta_2} \exp(-\beta H) dH = \frac{\sigma d\rho}{2\beta \sin \theta_2} \quad (8.29)$$

从 v_2, ρ_2 开始积分得

$$\ln \frac{v}{v_2} = \frac{\sigma}{2\beta \sin \theta_2} (\rho - \rho_2)$$

$$\text{即} \quad v = v_2 \exp\left[\frac{\sigma}{2\beta \sin \theta_2} (\rho - \rho_2)\right] \quad (8.30)$$

(1) 气动过载

过载如式(8.24),其最大值发生在动压头 $\rho v^2/2$ 最大处



$$\frac{\rho v^2}{2} = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \exp\left[\frac{\sigma}{\beta \sin \theta_2} (\rho - \rho_2)\right] \quad (8.31)$$

上式对 ρ 取导数并令其为零, 求得

$$\rho^* = -\frac{\beta \sin \theta_2}{\sigma} \quad (8.32)$$

发生 n_{\max} 时的速度为 ($n_y = 0$)

$$v_{n\max} = v_2 \exp\left(-\frac{1}{2} - \frac{\rho_2}{2\rho^*}\right) \quad (8.33)$$

$$n_{\max} = \sigma \frac{\rho v^2}{2g_0} = -\frac{\beta \sin \theta_2}{2g_0} v_2^2 \exp\left(-1 - \frac{\rho_2}{\rho^*}\right) \quad (8.34)$$

通常有, $\rho_2 \ll \rho^*$, 则式(8.33)和式(8.34)成为:

$$v_{n\max} = v_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 0.61 v_2 \quad (8.35)$$

$$n_{\max} = -\frac{\beta \sin \theta_2}{2g_0 e} v_2^2 \quad (8.36)$$

n_{\max} 和 $v_{n\max}$ 都直接与 θ_2 和 v_2 (轨道初始状态) 相关, 与 σ 无关, 见图 8.4。

(2) 气动加热

气动加热产生的热量以对流与辐射方式传入航天器, 防护层的分解与烧蚀及航天器向外的辐射带走小部分热量。

仅考虑对流传热, 且气流呈层流状态时, 在临界点的热流量可近似取为

$$\dot{Q} = k \rho^n v^m \quad (8.37)$$

为单位面积、单位时间进入航天器的热量, k 是与航天器鼻端半径、附面层流动类型及气体的动力学特性有关的常数, 取 $n = 1/2$, $m = 3$ 。返回航天器的平均热流量可表示为

$$\dot{Q}_{cp} = \frac{1}{4} C_F \rho^{1/2} v^3 \quad (8.38)$$

C_F 是当量表面摩擦系数, 因此, 航天器吸入的总热量是

$$Q = \frac{1}{4} C_F S_F \int_{t_0}^{t_k} \rho^{1/2} v^3 dt$$

式中, t_0 和 t_k 分别是返回的初始和终了时间, S_F 为返回航天器的表面面积。

从式(8.38)易知, 最大热流量, 出现在 $\rho^{1/2} v^3$ 取最大值时。带入式(8.30)求极值可得

$$\rho^{**} = -\frac{\beta \sin \theta_2}{3\sigma} \quad (8.39)$$

此刻对应的速度是

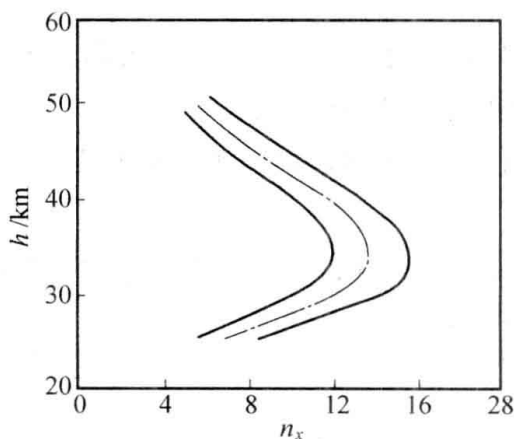


图 8.4 航天器的轴向过载



$$v_{\dot{Q}_{\max}} = v_2 \exp\left(-\frac{1}{6} - \frac{\rho_2}{6\rho^{**}}\right) \approx 0.85v_2 (\rho_2 \ll \rho^{**}) \quad (8.40)$$

最大热流量

$$\dot{Q}_{\max} = kv_2^3 \sqrt{-\frac{\beta \sin \theta_2}{3\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} - \frac{3\sigma\rho_2}{2\beta \sin \theta_2}\right)} \quad (8.41)$$

可见 \dot{Q}_{\max} 早于 n_{\max} 出现,增大可以减小 \dot{Q}_{\max} 。热量使航天器表面温度达 2 000 ~ 2 700 °C, 隔热材料烧蚀过程大约从 2 000 °C 开始。即使有隔热层,航天器内部仍可达到几十摄氏度。

8.4.2 小气动品质航天器的返回

弹道式进入的缺点,如落点精度低、过载和气动加热大等,可采用让航天器产生升力的方法来克服,当升阻比(或气动品质) $K = 0.2 \sim 0.3$ 时,各项指标已有很大的改进。

(1) 进入航天器的控制

处于稳定状态的航天器,如图 8.5 所示。气动力 F 在压心 a 与质心 c 的连线上。它被分解为沿速度方向的阻力 f_x 和垂直于它的升力 f_y ,它与重力 mg 及惯性力构成平衡力系,称此时的攻角为平衡攻角,记为 α_T 。气动力压心 a 在质心 c 之后,航天器俯仰和偏航运动是静稳定的。

当航天器存在滚转角 γ (绕速度轴)时,取有效值 $f_y = f_{y0} \cos \gamma$,侧向分力为 $f_x = f_{y0} \sin \gamma$,升阻比变为

$$K_{ef} = K \cos \gamma \quad (8.42)$$

通过改变 γ 角的大小,改变升力 f_y 的数值,从而达到调整纵向距离的目的,见图 8.6。这种利用滚转角同时控制纵向与横向位移的办法,又被称为返回轨道的滚转单通道控制方法,虽然有纵向与横向位移的耦合(可采用交替滚转的方法解决),但它简单、实用,省去了第二个控制通道,被广泛应用。

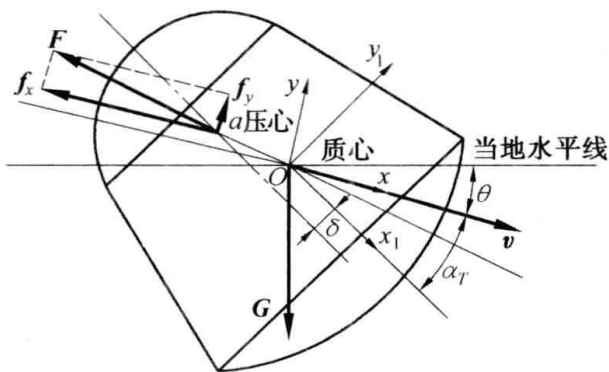


图 8.5 小气动品质航天器

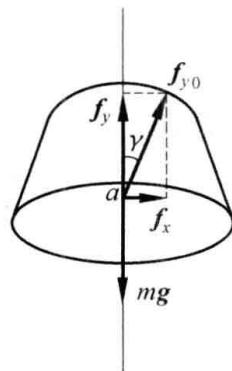


图 8.6 升力的有效值

一般取 $\alpha_T = -30^\circ \sim -20^\circ$, $\theta = -3^\circ \sim -1^\circ$, $K = 0.2 \sim 0.3$, $\gamma_0 = 20^\circ \sim 30^\circ$, 可实现 $n_{x\max} \leq 3.5$ 。当气动品质提高时,最大过载还要下降,这是因为返回轨道不像弹道式返回那样



陡的缘故。同样的原因,也使临界点最高温度也下降了约 300 ~ 400 °C。

返回航天器通过设置反推力控制装置来改变滚转角,它将产生一绕滚转轴的力矩,并维持所需 γ 角的数值。有的航天器滚转力矩是绕速度施加的,因此,反作用推力器的安装方向应相对纵对称轴转过一平衡攻角 α_T 的数值;有的航天器的滚转力矩是绕航天器纵对称轴施加的,它在产生滚转角的同时,也形成偏航运动。后者要靠航天器偏航运动的静稳定特性阻尼下来。

改变攻角 α 可通过改变阻力系数 C_x 和升力系数 C_y 来改变 K_{ef} 。攻角的控制可以采用变质心、反作用力矩、气动力矩等方式实现。图 8.7 所示, α 角与升力和阻力系数的关系。控制效果更佳的办法是同时控制攻角和滚转角。

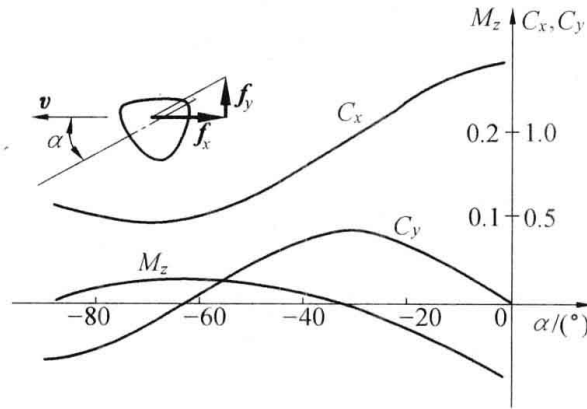


图 8.7 攻角与气动特性的关系

(2) 小气动品质返回航天器的过载及加热

由于有了升力,轨道降高变慢,近似于轨道运动。因此离心力与重力差不多相互抵消

$$\left(\frac{mv^2}{r} - mg\right) = mv\left(\frac{v}{r} - \frac{g}{v}\right) \approx 0 \quad (8.43)$$

则式(8.18) 成为

$$\frac{d\theta}{dt} = \sigma K \frac{\rho v}{2} \quad (8.44)$$

上式与式(8.20) 相除,考虑到 $|\theta| \leq 5^\circ$, 得

$$\theta \frac{d\theta}{dH} = \sigma K \frac{\rho_0}{2} \exp(-\beta H)$$

积分得

$$\rho = \rho_2 - \frac{\beta}{\sigma K} (\theta^2 - \theta_2^2) \quad (8.45)$$

再由式(8.17) 与式(8.44) 相除,所得方程式积分后,求得飞行速度

$$v = v_2 \exp\left(-\frac{\theta - \theta_2}{K}\right) \quad (8.46)$$

将式(8.45) 和式(8.46) 代入 $\rho v^2/2$, 对 θ 求导数,并令其等于零,可得



$$\theta^2 - K\theta - (\theta_2^2 + \frac{\sigma K}{\beta} \rho_2) = 0$$

略去 ρ_2 , 解得

$$\theta^* = \frac{K}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\theta_2^2}{K^2}} \right) \quad (8.47)$$

$K < 0$ 时取正根, $\theta^* < \theta_2$; $K > 0$ 时取负根, $\theta^* > \theta_2$; 近似时 $\theta^* = 0, K$ 。

代入式(8.45)和式(8.46), 得 n_{\max} 时对应的密度和速度

$$\rho^* = \rho_2 - \frac{\beta K}{2\sigma} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\theta_2^2}{K^2}} \right) \quad (8.48)$$

$$v^* = v_2 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\theta_2^2}{K^2}} \right) + \frac{\theta_2}{K} \right] \quad (8.49)$$

代入得

$$n_{\max} = \frac{\sigma v_2^2}{2g_0} \left[\rho_2 - \frac{\beta K}{2\sigma} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\theta_2^2}{K^2}} \right) \right] \cdot \exp \left[-\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\theta_2^2}{K^2}} \right) + \frac{2\theta_2}{K} \right] \quad (8.50)$$

将式(8.45)和式(8.46)代入 $\rho^{1/2} v^3$, 对 θ 求导数, 并令结果为零, 可得

$$\theta^2 - \frac{K\theta}{3} - \theta_2^2 = 0 \quad (8.51)$$

$$\theta^{**} = \frac{K}{6} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{36\theta_2^2}{K^2}} \right) \quad (8.52)$$

$K < 0$ 时取正根, $\theta^{**} < \theta_2$; $K > 0$ 时取负根, $\theta^{**} > \theta_2$; 近似时 $\theta^{**} = 0, K/3$ 。后者是对应于 $C_y > 0$ 的情况的, θ 角由进入大气时的负值 ($\theta_2 < 0$) 朝正方向变化, 在满足一定条件的情况下可以出现 $\theta > 0$, 即航天器的速度与当地水平线的夹角为正值, 航天器的轨道降低后又上升甚至能够冲出大气重返太空。这种现象称为进入式航天器的弹跳, 但多数情况都不能恢复轨道飞行, 还会再次进入大气。除非是在进行气动辅助变轨。

$$\dot{Q}_{\max} = kv_2^3 |\theta_2| \left(\frac{\beta}{\sigma K} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{3\theta_2}{K} \right)$$

可见, 临界点最大热流量随 K 的增大而减小。

即使不太大的气动品质, 返回航天器在大气中飞行的距离也比弹道式返回远很多, 将大大提高落点精度, 散布区域可降至 20 ~ 30 km 的范围。

8.4.3 进入走廊与过载特性

航天器的设计 n_{\max}, \dot{Q}_{\max} 就决定了最大进入角 $|\theta_2|$, 而 $|\theta_2|$ 亦有下限, 小了会冲出大气层。 $|\theta_2|_{\min}$ 与 $|\theta_2|_{\max}$ 间的进入轨道构成的空间为进入走廊, 为了方便度量, 以 v_2, r_2 与 $|\theta_2|_{\min}, |\theta_2|_{\max}$ 构成的假想椭圆轨道(无大气), 则进入走廊宽度为 $\Delta H_n = r_{p\max} - r_{p\min}$, 如图



8.8 和表 8.1、8.2。进入木星的进入走廊最窄,进入火星的进入走廊最宽。

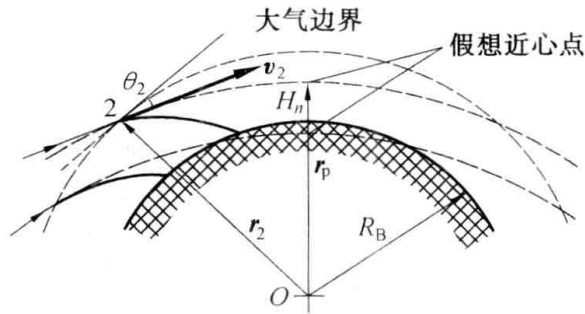


图 8.8 进入走廊

表 8.1 弹道式飞行器的进入走廊 ΔH_n

km

目标行星	$n_{x\max}$			
	5	10	20	40
地球	0	11.3	32.2	113
金星	0	12.9	37	129
火星	340	645	2 000	3 540
木星	0	0	0	16.1

表 8.2 弹道-升力式飞行器的进入走廊 ΔH_n

km

目标行星	n_{\max}								
	5			10			20		
	K								
	0	1	1 可调	0	1	1 可调	0	1	1 可调
地球	0	43.5	55	11.3	82	105	32.2	161	210
金星	0	43.5	58	12.9	84	113	37	169	226
火星	340	483	595	645	885	1 160	2 000	1 900	2 800
木星	0	55	67.6	0	84	113	0	145	193

图 8.9 是不同初始进入角 θ_2 时,过载随时间的变化规律。由图可见 θ_2 越小,最大过载的数值就越小,它的出现时刻也越迟。一般而言,弹道式返回,无论在什么初始条件下, n_x 的最大值都会超过 7,而 n_x 大于 5 的时间超过 60 ~ 70 s。图 8.10 给出的是过载值与气动品质、进入角的关系,当 θ_2 绝对值增加时,过载快速增加, K 增大时,过载下降。图 8.11 为 K 与过载曲线的关



系,当气动品质 K 增加时,返回飞行时间显著增加; K 大于 0.25 之后,运动呈振动性,过载 n_x 有若干峰值。

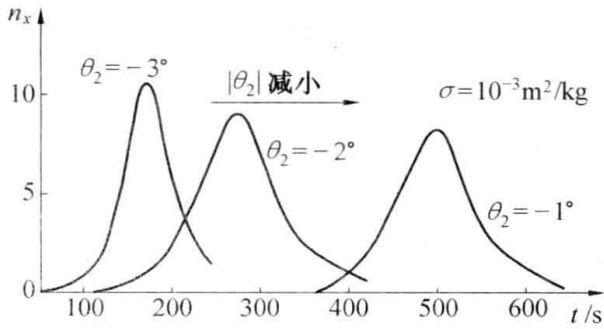


图 8.9 $|\theta_2|$ 对过载的影响

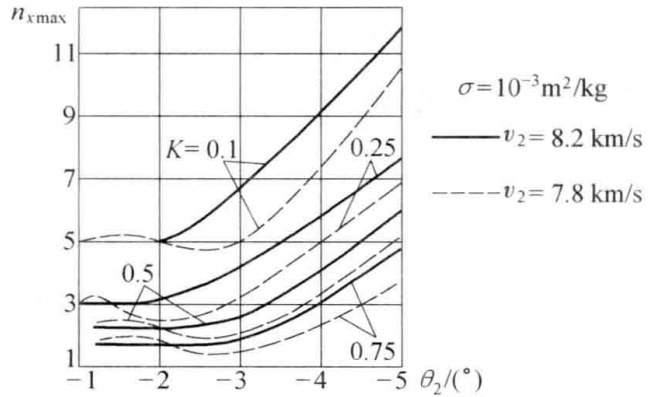


图 8.10 过载与进入角的关系

事实上,大气飞行段的初始条件,除了 θ_2 之外,还有 v_2 和 r_2 ,但 r_2 为规定的数值, v_2 虽可变动但变化范围不大,因此只有 θ_2 是影响最大的参量。

当载人飞行进入大气时,应考虑宇航员所能经受的最大过载和最大过载的作用方向及作用时间。图 8.12 表示允许过载、作用时间和作用方向间的关系, γ 是过载作用方向与人体纵轴线的夹角。过载越大,能够承受的时间就越少;过载的方向越接近于人体的纵轴,能够承受的过载就越小。

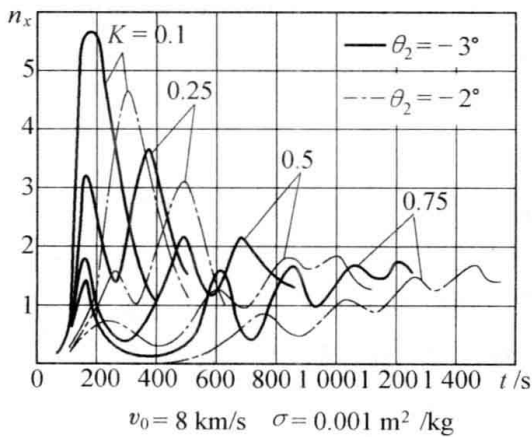


图 8.11 过载与升阻比的关系

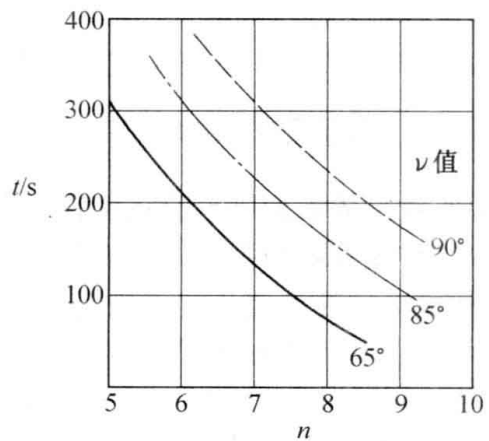


图 8.12 人体承受过载的时间

8.4.4 多次穿越大气的飞行

再入走廊与进入大气时的初始条件(v_2 和 θ_2),以及航天器的气动品质等有密切关系,其中尤以 v_2 影响最大,当航天器速度接近第二宇宙速度或超过此值时,再入走廊狭窄到只有几



千米或减至零,这给控制系统带来极大困难。

解决的办法有以下几种,可以利用减速发动机;提高航天器的气动品质;采用完善的控制方法;多次穿过大气层。

多次穿过大气层的方案充分利用大气的阻力减速,如图 8.13。美国的“阿波罗”飞船和苏联的“探测器”6号从月球返回时均采用一次跳跃式再入轨道返回地球,两次利用了大气阻力进行减速。

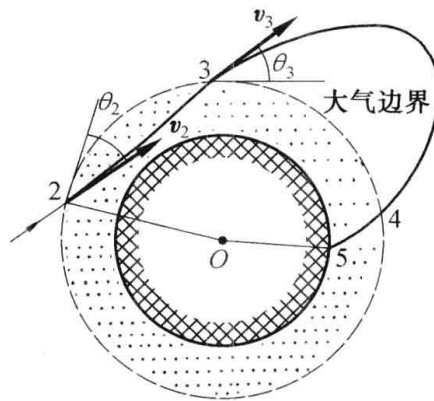


图 8.13 二次穿越大气

8.5 航天器的软着陆

当进入式航天器着陆的目标星体无大气可利用时,利用动力装置产生的反推力进行减速是唯一的选项。由于制动动力装置和燃料的增加,将大大减少了航天器所能携带的有效载荷质量。

8.5.1 硬着陆与软着陆

如果要对星体表面进行直接的科学考察,航天器需要在其表面着陆。星体表面的着陆可以分为硬着陆和软着陆两种方式。前者是以比较大的速度撞向星体表面,航天器及其设备将破损,因此硬着陆的航天器只能在接近星体的过程中传回表面的图像,主要的是能在星体表面产生冲击,可以借助其他方式对其内部进行探测;后者是以较小的速度(一般为几米/秒)到达星体表面,航天器着陆后可以继续在星体表面进行考察,从而获得更多的信息。

为了获得更好的效果一般会采用直飞轨道来完成硬着陆的,即航天器进入此星体的影响球时,形成一条近心点距离小于星体半径的双曲线轨道。这样航天器的着陆速度会大于当地的第二宇宙速度,早期的功能单一的航天器多采用这种方式。在环绕轨道上运行的航天器在结束其在轨任务时,如条件容许往往都会采用硬着陆的方式来结束它的使命。此时只需做一次制动,使航天器进入到一条近心点距离小于星体半径的椭圆轨道即可。

软着陆是指航天器以较小的相对速度在星体表面着陆,这个速度一般为几米每秒,航天器着陆后可以在星体表面进行考察和研究,从而获得更多的信息。为方便确定着陆时机和地点,



软着陆通常都是从圆形环绕轨道上出发的。从环绕轨道出发进行软着陆可以有两种形式:减速着陆和垂直着陆。前者航天器是在环绕星体的停泊轨道上伺机减速脱离停泊轨道,进入一条近心点在着陆点附近的椭圆过渡轨道,在接近星体表面时制动减速下降到星体表面。后者航天器沿击中星体的轨道向星球飞行,在接近星体表面时,先在某一高度将其水平速度基本减为零,然后利用小推力发动机把速度保持在很小的范围之内,从而使航天器陆时的速度在几米每秒的量级。前一种软着陆方式有着机动性强、适应性好、燃料消耗低、易于返回等优点,为主要的软着陆方式。

航天器从环绕轨道减速软着陆的过程与返回地球相似,大致可分为4个阶段:离轨段;自由下降段;动力下降段;最终着陆段。主要的工作是动力下降段,需要确保航天器在控制系统与制动发动机的作用下,后以较小的速度到达着陆点上空,确保最后着陆段的完成。

由于第三阶段的主要作用力由气动力变为发动机推力,自由下降段的轨道亦有所不同。由一段能以适当进入角到达大气边缘的部分开普勒轨道变为远心点为环绕轨道高度,近心点为星体表面适当高度(在月球上约为15 km)的霍曼转移轨道,这样能够使动力下降段有较好的初始条件。以近心点高度和速度为初始状态的动力下降段由于可以对制动力(大小、方向和作用时间)进行控制,基于不同的制导方式得到的下降轨道也不尽相同。

8.5.2 重力转弯下降轨道

航天器的软着陆过程大多采用经过环绕停泊轨道降落到星体表面的方式,最早采用的动力段下降的制导方式是重力转弯(Gravity-Turn)轨道。其基本思想是通过姿控系统使制动力与航天器的速度方向始终保持反向,在星体的引力和发动机推力的作用下,航天器体轴方向与铅垂方向的夹角会逐渐减小,直至到达星体表面时减小为零,实现垂直着陆。重力转弯制导较容易实现,是最早实际应用的动力下降段方式。

假设:(1)动力下降轨道为平面运动;(2)下降段为平行引力场;(3)制动发动机的最小推重比大于1。着陆坐标系中的航天器质心动力学方程为

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{qw}{m} \cos(\alpha - \psi) + g_p \cos \psi \\ v \frac{d\psi}{dt} = \frac{qw}{m} \sin(\alpha - \psi) - g_p \sin \psi \\ \frac{dH}{dt} = -v \cos \psi \\ \dot{m} = -q \end{cases} \quad (8.53)$$

其中, v 为航天器的速度, H 为航天器距离目标星体表面的高度, ψ 为航天器速度方向与铅垂直向下方向的夹角, α 为发动机推力 P 与铅垂方向的夹角, w 为制动发动机的喷气速度, q 为制动发动机的质量流量,如图8.14。

在重力转弯模式下,由姿控系统将制动发动机推力的方向始终保持在着陆器速度的反方向上,因而有 $\psi = \alpha$,方程(8.53)为可简化为



$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{qw}{m} + g_p \cos \psi \\ v \frac{d\psi}{dt} = -g_p \sin \psi \\ \frac{dH}{dt} = -v \cos \psi \\ \dot{m} = -q \end{cases} \quad (8.54)$$

重力转弯段的制导与控制就是基于上述动力学方程、飞控系统的约束条件和此段飞行所需要满足的参数指标给出控制为 $P(t)$, 使得着陆航天器由初始状态: $v(t_0) = v_0, H(t_0) = H_0, \psi(t_0) = 90^\circ$, 在推力和重力的作用下在到达星体表面时能够实现软着陆。即满足终端条件: $v(t_f) = 0, H(t_f) = 0, \psi(t_f) = 0^\circ$ 。航天器的高度、速度和姿态角可由所装备的高度表、多普勒雷达及惯导设备测得, 实现自主软着陆。

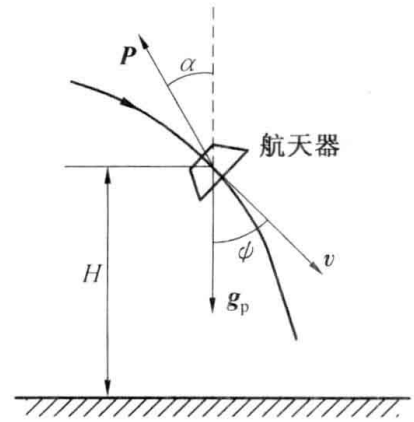


图 8.14 航天器受力示意

航天器重力转弯段动力学方程的求解受到推力调节形式的限制, 调节范围、精度、开关次数等因素直接影响到重力转弯段制导与控制的可实现性。在一定的假设前提下可以根据不同的控制原理得到易于实现的推力控制方法, 如常值推重比、小下降角等。相同的控制原理如最优控制, 不同的动力学模型和约束条件也会产生各异的控制算法, 这也是航天器控制的特点。同样的控制原理, 同样的动力学模型和约束条件, 不同的控制设计间也会有解算速度、控制精度、鲁棒性等方面的差异。这已超出本书的范围, 读者可以参阅相关的文献。

8.5.3 最优动力下降轨道

取消对推力方向的约束还可设计出以推力角与推力值为控制量的航天器软着陆动力下降段的制导与控制方法, 如在航天活动中经常使用的燃料最优控制。为了进行燃料最优制导律设计, 对软着陆航天器动力学模型要进行适当的化简: 忽略星体的自转角速度引起的科氏力的影响; 降落轨道为平面运动; 忽略姿态控制系统的能耗。

由以上的假设, 航天器动力学方程的平面运动可以描述为

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v_r \\ \frac{d\psi}{dt} = \frac{v_\psi}{r} \\ \frac{dv_r}{dt} = -\frac{\mu_P}{r^2} + \frac{v_\psi^2}{r^2} + \frac{P \cos \alpha}{m} \\ \frac{dv_\psi}{dt} = -\frac{v_r v_\psi}{r^2} + \frac{P \sin \alpha}{m} \\ \dot{m} = -q = -\frac{P}{w} \end{cases} \quad (8.55)$$



其中, r 为航天器到星体质心的距离, ψ 为航天器速度与铅垂方向的夹角, α 为发动机推力 P 与铅垂方向的夹角, v_r 和 v_ψ 为航天器的径向速度和水平速度, w 为制动发动机的喷气速度, q 为制动发动机工质的质量流量。

设制动发动机为常值推力的, 开机时间为可控的。式(8.55) 改写为

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\psi} \\ \dot{v}_r \\ r\dot{\psi} \\ \dot{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \\ \frac{v_\psi}{r} \\ -\frac{\mu_p}{r^2} + \frac{v_\psi^2}{r^2} \\ -\frac{v_r v_\psi}{r^2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\cos \alpha}{m} \\ \frac{\sin \alpha}{m} \\ -\frac{1}{w} \end{bmatrix} P \cdot u(t) \quad (8.56)$$

以能量最省为动力下降段的优化指标, 燃料消耗最少, 等价于剩余质量最大, 即

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \dot{m} dt = m(t_0) - \frac{P}{w}(t_f - t_0) = \max \quad (8.57)$$

其中, t_0 、 t_f 为软着陆动力下降段开始和结束的时刻。

应用庞特里亚金(L. S. Pontryagin) 极大值原理求解最优动力下降段飞行轨道。将状态变量向量 X 记为

$$X = [r \quad \psi \quad v_r \quad v_\psi \quad m]^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T$$

初始状态和结束状态分别为

$$X(t_0) = [r(t_0) \quad \psi(t_0) \quad v_r(t_0) \quad v_\psi(t_0) \quad m(t_0)]^T$$

$$X(t_f) = [r(t_f) \quad \psi(t_f) \quad v_r(t_f) \quad v_\psi(t_f) \quad m(t_f)]^T = [r_{t_f} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad m_{t_f}]^T$$

而末端约束条件

$$G[X(t_f), t] = \begin{bmatrix} r(t_f) - r_{t_f} \\ \psi(t_f) - 0 \\ v_r(t_f) - 0 \\ v_\psi(t_f) - 0 \end{bmatrix} = 0$$

控制向量 u

$$u = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5]^T$$

则动力学方程式(8.56) 可以写为

$$\dot{X} = f[x(t), u(t), t]$$

设协变量为

$$\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4 \quad \lambda_5]^T$$



引入哈密尔顿(Hamilton) 函数

$$H = G(x(t), u(t)) + \lambda^T \cdot f(x(t), u(t), t)$$

将式(8.56) 代入上式,运用极大值原理有

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} \\ \dot{X} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \\ \lambda(t_f) = \frac{\partial G^T[X(t_f)]}{\partial X(t_f)} \mu_p \\ H(t_f) = 0 \end{cases} \quad (8.58)$$

对所有的容许控制 $u(t)$

$$H(X^*, \lambda^*, u^*, t) \geq H(X^*, \lambda^*, u, t)$$

由式(8.58) 可得推力角控制方程

$$\alpha = a \tan\left(-\frac{\lambda_4}{\lambda_3}\right) \quad (8.59)$$

要 $H(X, \lambda, u)$ 取得最大值,有

$$u(t) = \begin{cases} 1 & s(t) > 0 \\ 0 & s(t) < 0 \\ \text{不定} & s(t) = 0 \end{cases} \quad (8.60)$$

其中

$$s(t) = \lambda_3 \frac{P \cos \alpha}{m} + \lambda_4 \frac{P \sin \alpha}{m} - \lambda_5 q$$

为切换界面。 $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ 满足共轭方程

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X}$$

通常方程(8.58) 很难得到解析解。最优着陆动力下降段轨道的初始条件和终端状态均为已知,所以最优控制量:推力方向角 α 以及推力开关函数 $u(t)$ 可以通过求解微分方程的两点边值问题得到。由于求解两点边值问题较为繁杂,涉及到很大的计算量,未知的变量初值设定需要有很多的经验。对应不同的初值,解的计算量差异很大。根据动力学方程进一步的假设和不同的初值设定方法,有很多种高速、简洁的两点边值问题的解法不断出现。加之计算机运行速度和容量的快速提高,使得航天器软着陆段燃料最优控制及其他类似的制导与控制方法能够具备运用的条件。

动力下降段的正确完成成为航天器最后的软着陆提供了保证,使得缓冲装置(火箭或气囊)能够正常工作,完成最后的安全着陆。

附 录

A1 太阳系基本参数

A1.1 八大行星的相关数据

太阳系 8 大行星与轨道动力学相关的参数详见表 A1.1

表 A1.1 太阳系 8 大行星主要参数

行星 Planet	水星 Mercury	金星 Venus	地球 Earth	火星 Mars	木星 Jupiter	土星 Saturn	天王星 Uranus	海王星 Neptune
质量比 (m_P/m_E)	0.055 2	0.815	1.0	0.107 4	317.834	95.159	14.50	17.20
引力常数 μ_P $/10^5 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$	0.220	3.253	3.986	0.428 1	1 266.88	379.9	57.98	69.77
赤道平均半径 $/10^3 \text{ km}$	2.439	6.052	6.378	3.398	71.398	60.33	25.40	24.75
大气边界高度 /km	—	120	100	100	400	500	500	400
影响球半径 $/10^5 \text{ km}$	1.12	6.16	9.29	5.78	482	545	519	868
轨道半长轴 $/10^6 \text{ km}$	57.91	108.21	149.598	227.94	778.34	1 427.0	2 882.3	4 523.8
轨道偏心率 e	0.205 63	0.006 79	0.016 72	0.093 38	0.048 45	0.055 69	0.047 24	0.008 58
赤道与轨道夹角	0°	178°	23°27′	24°48′	3°6′	26°45′	98°	28°48′
轨道与黄道夹角	7°	3°23′	0°	1°51′	1°18′	2°29′	0°46′	1°46′
平均轨道速度 $/\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$	47.89	35.03	29.79	24.11	13.06	9.64	6.81	5.43
轨道恒星周期 /d	87.969	224.70	365.26	686.98	4 332.589	10 759.5	30 685	60 192
自转周期 /d	58.646	- 243.01	0.997 3	1.026	0.414	0.426	0.725	0.658
与地球的会合周期 /d	115.86	583.90	—	779.94	398.88	378.09	369.66	367.49
自地球的过渡时间 /d	105.5	146.1	—	258.9	997.6	2 209.2	5 428.9	11 183.6



A1.2 日、地、月的基本参数

1. 太阳的相关数据

质量: 1.989×10^{30} kg
平均密度: 1.409×10^3 kg/m³
引力常数: $1.327\ 178 \times 10^{20}$ m³/s²
半径: 696 000 km
有效温度: 5 770 K
自转周期: 26.9 d(赤道), 31.1 d(极区)
表面重力加速度: 2.74×10^2 m/s²
逃逸速度: 617.7 km/s
中心温度: 约 1.5×10^7 K
日地平均距离: $1.495\ 978\ 7 \times 10^8$ km

2. 地球的相关数据

质量: 5.976×10^{24} kg
平均密度: 5.52×10^3 kg/m³
引力常数: $3.986\ 004\ 7 \times 10^{14}$ m³/s²
赤道半径: 6 378 140 m
扁率: 1/298.257
轨道半径: 149 597 870 km
轨道速度: 29.79 km/s
公转的恒星周期: 365.256 4 d
轨道偏心率: 0.016 72
逃逸速度: 11.2 km/s
自转周期: 0.997 3 d
黄赤交角: 23°27'
影响球半径: 9.29×10^5 km (相对于太阳)

3. 月球的相关数据

质量: 7.348×10^{22} kg
密度: 3.34×10^3 kg/m³
引力常数: $4.902\ 793\ 455 \times 10^{12}$ m³/s²
平均半径: 1 738 km
扁率: 0.001 2



自转周期:27d7h43 min 11.559 s
逃逸速度:2.38 km/s
平均轨道半径:384 400 km
轨道偏心率:0.054 9
平均轨道速度:1.023 km/s
平均公转周期:27d7h43 min 11.559 s
轨道倾角:18.28° ~ 28.58°(与赤道面的交角)
影响球半径:66 100 km(相对于地球)

A1.3 地球的恒星角速度

地球每天相对于太阳自转一周,365.256 4 天绕太阳转一周。则相对于恒星坐标系共转了(365.256 4 + 1.000)周,历时 365.256 4 天。所以,地球自转的恒星角速度 ω_{sid} 为

$$\omega_{\text{sid}} = 366.256 4 / 365.256 4 = 1.002 737 8 \text{ rad/d} = 15.041 067 \text{ }^\circ/\text{h}$$

地球相对于恒星坐标系转一周的时间为

$$T_{\text{sid}} = 360^\circ / \omega_{\text{sid}} = 23.934 472 \text{ h} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4.1 \text{ s}$$



A2 大气密度

科学联合会国际委员会(International Council of Scientific Union)建立了一种 CIRA 大气模型,它考虑了温度和高度对大气密度的影响,写成

$$\rho = \rho(T, h)$$

影响温度的因素有很多,如季节、昼夜、地磁和太阳活动程度,一天内的平均温度主要与太阳活动有关。描述太阳活动程度的指标是 10.7 cm 波长的电磁波强度 $F_{10.7}$,它随太阳活动周期(11 年)和太阳自旋周期(27 天)变化,具有这两种周期分量(图 A2.1)。按照不同的 $F_{10.7}$ 数值,可将大气划分为十种类型(见表 A2.1),不同类型大气的密度随高度的变化规律见图 A2.2。

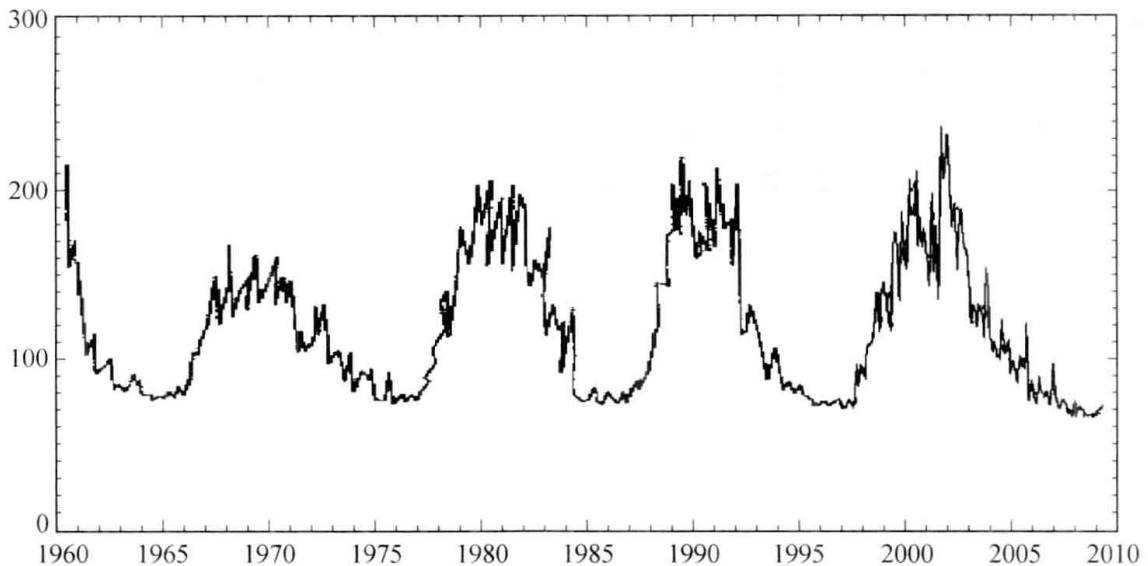


图 A2.1 太阳活动程度随时间的变化

表 A2.1 大气类型的划分

大气类型 No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_{10.7}/10^{-22}(\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1})$	65	75	100	125	150	175	200	225	255	275

考虑到太阳活动影响后,大气密度随高度变化的规律可取为

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{h-h_0}{H}}$$

其中, ρ 和 ρ_0 分别是高度为 h 和 h_0 处的大气密度, H 为标高。标高 H 与大气类型及距理论地球表面高度有关,见图 A2.3。

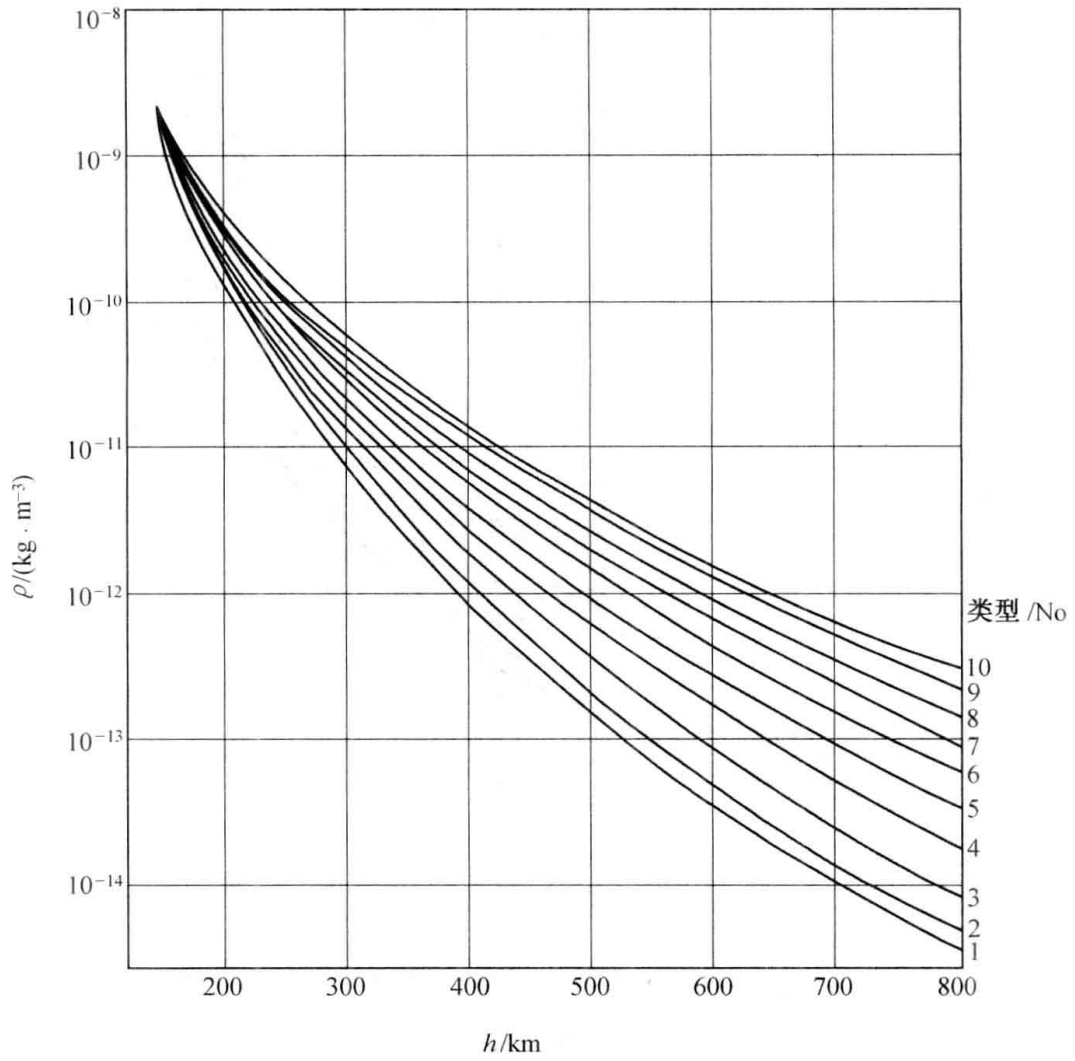


图 A2.2 不同类型大气白天平均密度与高度的关系

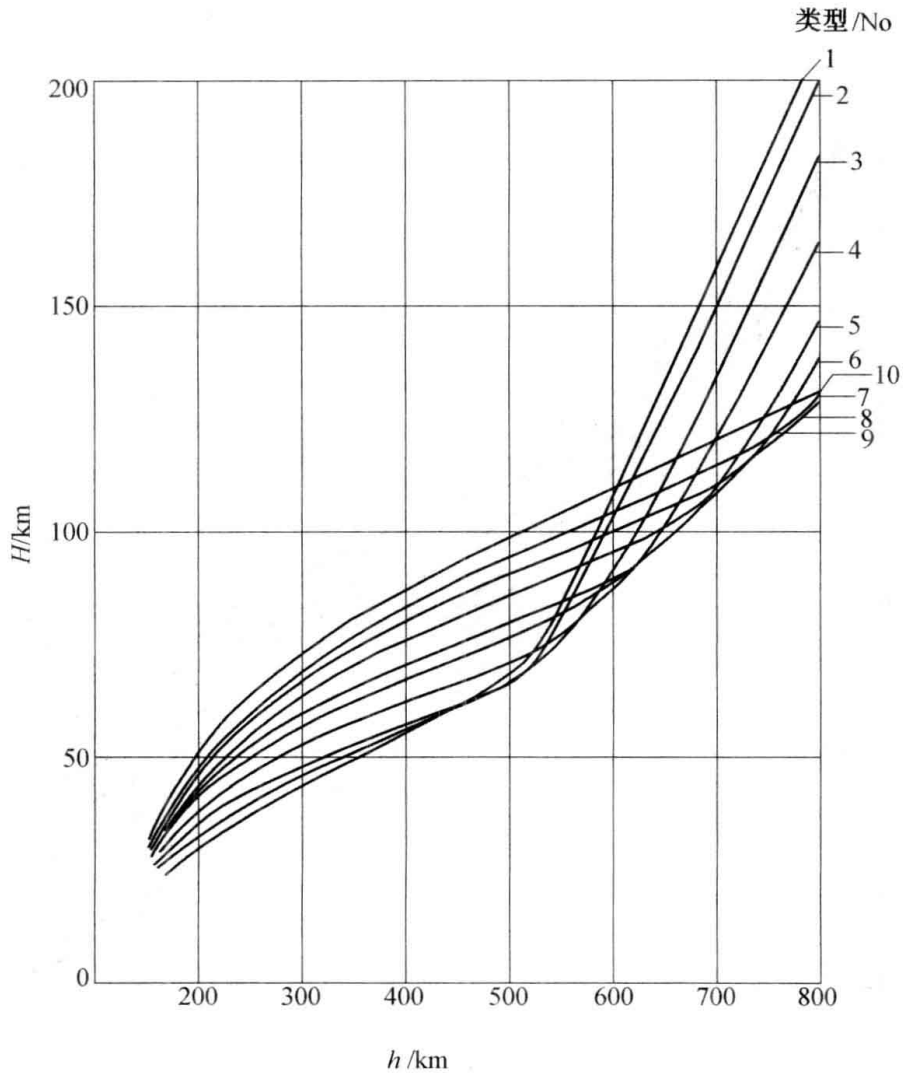


图 A2.3 不同类型大气标高 H 与高度 h 的关系



A3 矢量和矢量运算

A3.1 矢量的描述

任意矢量 \mathbf{A} 可用三个分量 A_1 、 A_2 和 A_3 及对应的单位矢量 \mathbf{e}_1 、 \mathbf{e}_2 和 \mathbf{e}_3 的线性组合写为

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{A3.1})$$

其中的三个单位矢量又总称为基矢或基,并用

$$\underline{\mathbf{e}} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3]^T \quad (\text{A3.2})$$

表示。式中,变量下面的一横表示变量是个矩阵(维数任意),其元素可以是矢量也可以是标量,这里 $\underline{\mathbf{e}}$ 是 3×1 的矢量列阵,其元素是矢量 \mathbf{e}_1 、 \mathbf{e}_2 和 \mathbf{e}_3 。互相正交的基矢有如下特性

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \quad i, j = 1, 2, 3 \\ 0, & i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

则

$$\underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^T = \underline{E}_3 \quad (\text{A3.3})$$

这里 \underline{E}_3 是 3×3 的单位阵。

当需要使用多个基矢描述空间物理量时,可用上标加以区别,如 $\underline{\mathbf{e}}^{(s)}$ 和 $\underline{\mathbf{e}}^{(r)}$ 等。某一基矢的分量可以表述为另一基矢分量的线性组合,如

$$\underline{\mathbf{e}}_i^{(s)} = \sum_{j=1}^3 C_{ij} \underline{\mathbf{e}}_j^{(r)} \quad i = 1, 2, 3$$

表示为矩阵式时,成为

$$\underline{\mathbf{e}}^{(s)} = \underline{C}_{sr} \underline{\mathbf{e}}^{(r)} \quad (\text{A3.4})$$

\underline{C}_{sr} 是由 (r) 基矢向 (s) 基矢变换的 3×3 维矩阵,其元素由相应单位矢量之间的夹角余弦组成,即 C_{ij} 是 $\underline{\mathbf{e}}_i^{(s)}$ 和 $\underline{\mathbf{e}}_j^{(r)}$ 的夹角余弦 $\cos(\underline{\mathbf{e}}_i^{(s)} \cdot \underline{\mathbf{e}}_j^{(r)})$ 。该变换矩阵是正交矩阵,具有 $\underline{C}_{sr} = \underline{C}_{rs}^T = \underline{C}_{rs}^{-1}$ 。因此,从式(A3.4)可以求得

$$\underline{\mathbf{e}}^{(s)} = \underline{C}_{sr} \underline{\mathbf{e}}^{(r)} = \underline{C}_{rs}^T \underline{\mathbf{e}}^{(r)} \quad (\text{A3.5})$$

由正交矩阵特性,有

$$\det \underline{C}_{sr} = \det \underline{C}_{rs} = 1 \quad (\text{A3.6})$$

变换矩阵 \underline{C}_{sr} 或 \underline{C}_{rs} 的同一行(或列)的三个元素平方和为 1;不同行(或列)的相同列元素相乘后再相加结果为零,亦是正交变换矩阵的固有特性。

如果把 \mathbf{A} 的分量写成 $\underline{\mathbf{A}} = [A_1 \quad A_2 \quad A_3]^T$,则式(A3.1)可以写为

$$\mathbf{A} = \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{e}} \quad (\text{A3.7})$$

这是矢量的矩阵形式表达式。



假如 \underline{A} 矢量分别在如 $\underline{e}^{(s)}$ 和 $\underline{e}^{(r)}$ 基矢中表示,则有

$$\underline{A} = \underline{e}^{(s)\text{T}} \underline{A}^{(s)} = \underline{e}^{(r)\text{T}} \underline{A}^{(r)}$$

利用式(A3.5)消去 $\underline{e}^{(r)}$,得

$$\underline{A}^{(s)} = \underline{C}_{sr} \underline{A}^{(r)} \quad (\text{A3.8})$$

可见,坐标系之间的变换矩阵就是基矢间的变换矩阵。

A3.2 矢量的点积(dot product)或标积(scalar product)

若两个矢量 \underline{a} 和 \underline{b} 在某基矢中的分量分别是 $\underline{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ 和 $\underline{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$, 则据式(A3.7)可写成

$$\underline{a} = \underline{a}^T \underline{e} \text{ 和 } \underline{b} = \underline{e}^T \underline{b}$$

点乘积 $\underline{a} \cdot \underline{b}$ 是 $\underline{a}^T \underline{e} \underline{e}^T \underline{b}$, 按照(A3.3)有

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a}^T \underline{b} \quad (\text{A3.9})$$

由于矢量点乘满足交换律,则有

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b}^T \underline{a}$$

若 \underline{a} 在 $\underline{e}^{(s)}$ 中分解,而 \underline{b} 在 $\underline{e}^{(r)}$ 中分解,式(A3.9)成为

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a}^{(r)\text{T}} \underline{C}_{rs} \underline{b}^{(s)} = \underline{b}^{(s)\text{T}} \underline{C}_{sr} \underline{a}^{(r)} \quad (\text{A3.10})$$

A3.3 矢量的叉乘(cross product)或矢量积(vector product)

由定义同基矢的两矢量叉乘,得

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

如以分量形式表示,可写成

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{e}^T \underline{a}^\times \underline{b} \quad (\text{A3.11})$$

其中

$$\underline{a}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.12})$$

式(A3.11)的正确性,可以通过直接展开右侧得到证明。由于 \underline{a}^\times 是反对称的,即 $\underline{a}^{\times\text{T}} = -\underline{a}^\times$, 并考虑到 $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$, 可得

$$\underline{b} \times \underline{a} = \underline{e}^T \underline{a}^\times \underline{b} \quad (\text{A3.13})$$

显然还有

$$\underline{a}^\times \underline{a} = 0 \quad (\text{A3.14})$$



\underline{a} 在不同基矢 $\underline{e}^{(s)}$ 和 $\underline{e}^{(r)}$ 中的分量 $\underline{a}^{(s)}$ 和 $\underline{a}^{(r)}$ 满足

$$\underline{a}^{(s)\times} = (\underline{C}_{sr}\underline{a}^{(r)})^\times = \underline{C}_{sr}\underline{a}^{(r)\times}\underline{C}_{rs} \quad (\text{A3.15})$$

此式也可通过将等式左右侧展开而得到证明。

A3.4 矢量的不定乘积(indeterminate product)和张量(tensor)

两矢量 \underline{a} 和 \underline{b} 的不定乘积是它们的有序并列排序,亦称为并矢(dyadic),记为 \underline{ab} 。两者的模可以相乘,表示方向的单位矢量位置不能颠倒。

张量是一种表达式,是由若干个当坐标系改变时满足转换关系的分量组成的集合。 m 维空间的 n 阶张量有 m^n 个分量,常用于描述复杂的科学现象。

标量是 0 阶张量,由一个数表示其大小;矢量是 1 阶张量,在二维空间里可以由一个 2×1 的向量表示其在某个基中的分量,在三维空间里可以由一个 3×1 的向量表示其在某个基中的分量;并矢是 2 阶张量,在三维空间里可以用一个 3×3 的矩阵表示其在 9 个并矢构成的基上的分量; m 维空间上的 n 阶张量可以由一个 n 维空间阵表示其在 m^n 个基上的分量。

并矢,也就是 2 阶张量通常用大写字母表示,如 D 。在三维空间里可以写成 9 个基的线性组合:

$$D = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j \quad (\text{A3.16})$$

其中, $\underline{e}_i \underline{e}_j (i, j = 1, 2, 3)$ 称为 2 阶张量的并基(共 9 个)。则并矢矩阵

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \underline{e}_1 & \underline{e}_1 \underline{e}_2 & \underline{e}_1 \underline{e}_3 \\ \underline{e}_2 \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \underline{e}_2 & \underline{e}_2 \underline{e}_3 \\ \underline{e}_3 \underline{e}_1 & \underline{e}_3 \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \underline{e}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.17})$$

为 D 的一个并基阵。

矩阵

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A3.18})$$

为 D 的坐标或分量。

1. 并矢与数量的运算

除交换律外,服从初等代数的运算规律。

结合律:

$$\begin{aligned} m(\underline{ab}) &= (\underline{ma})\underline{b} = \underline{a}(\underline{mb}) = \underline{mab} \\ (\underline{ma})(\underline{nb}) &= (\underline{mn})\underline{ab} \end{aligned}$$

分配律:

$$\underline{a}(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{ab} + \underline{ac}$$



$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} &= \mathbf{ac} + \mathbf{bc} \\ m(\mathbf{ab} + \mathbf{cd}) &= m\mathbf{ab} + m\mathbf{cd} \\ (m + n)\mathbf{ab} &= m\mathbf{ab} + n\mathbf{ab}\end{aligned}$$

共扼并矢

\mathbf{ab} 与 \mathbf{ba} , $D = \mathbf{ab}$ 与 $D^* = \mathbf{ba}$ 互称共扼并矢。

2. 并矢与矢量间的运算

点乘

$$\begin{aligned}(\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\ \mathbf{c} \cdot (\mathbf{ab}) &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}\end{aligned}$$

并矢与矢量间的点乘运算结果亦为矢量。

满足分配律

$$\begin{aligned}(\mathbf{ab} + \mathbf{ac}) \cdot \mathbf{d} &= \mathbf{ab} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{ac} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d} \\ (\mathbf{ac} + \mathbf{bc}) \cdot \mathbf{d} &= \mathbf{ac} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{bc} \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}\end{aligned}$$

叉乘

$$\begin{aligned}(\mathbf{ab}) \times \mathbf{c} &= \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\ \mathbf{c} \times (\mathbf{ab}) &= (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\mathbf{b}\end{aligned}$$

并矢与矢量间的叉乘运算结果亦为并矢。

3. 张量的分量

$$D = \mathbf{ab}, \mathbf{a} = \underline{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{e}}, \mathbf{b} = \underline{\mathbf{b}}^T \underline{\mathbf{e}}$$

$$D = \mathbf{ab} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 d_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

其中, $d_{ij} = a_i b_j (i, j = 1, 2, 3)$ 为 D 在基 $\underline{\mathbf{e}}$ 中的分量——张量矩阵

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{a}} \underline{\mathbf{b}}^T \quad (\text{A3.19})$$

$$D = \underline{\mathbf{e}}^T \underline{D} \underline{\mathbf{e}}$$

因 $D^* = \mathbf{ba}$, 所以有 $\underline{D}^* = \underline{D}^T$

4. 单位张量

$$E = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{e}} \quad (\text{A3.20})$$

显然

$$\underline{E} = \underline{E}_3$$

5. 张量与矢量点乘的分量形式

$$D \cdot \mathbf{a} = \underline{\mathbf{e}}^T \underline{D} \underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{e}}^T \underline{D} \underline{\mathbf{a}} \quad (\text{A3.21})$$



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{D} = \underline{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^T \mathbf{D} \underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{a}}^T \mathbf{D} \underline{\mathbf{e}}$$

对于 \mathbf{E} , 有

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

不同的基 $\underline{\mathbf{e}}^{(s)}, \underline{\mathbf{e}}^{(r)}$, \mathbf{D} 分量阵为 $\underline{\mathbf{D}}^{(s)}$ 与 $\underline{\mathbf{D}}^{(r)}$, 则有

$$\underline{\mathbf{D}}^{(r)} = \underline{\mathbf{C}}_{rs} \underline{\mathbf{D}}^{(s)} \underline{\mathbf{C}}_{sr} \quad (\text{A3.22})$$

6. 矢量混合积与张量

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b}\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \underline{\mathbf{e}}^T (\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}) \times \underline{\mathbf{c}}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}\mathbf{b} - \mathbf{c}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{E} - \mathbf{c}\mathbf{a}] \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{c}} \times^T \underline{\mathbf{b}}$$



A4 齐奥尔科夫斯基公式

火箭在空间飞行时,从发动机喷管不断以高速向外喷射出的工质产生了使火箭向前飞行的推力。在火箭上的作用力还有空气动力(在低空飞行)、重力和太阳光压力、其他星体的引力(在高空飞行)等。研究火箭的飞行,应考虑上述全部作用力的影响。然而发动机推力的作用是上述诸力之中影响最大的,这里先略去其他作用力,只研究在发动机作用下的火箭(理想火箭)的运动。

设火箭飞行时,在 t 和 $t + dt$ 时刻的速度分别是 \boldsymbol{v} 和 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$ (见图 A4.1),火箭在 t 时刻的动量是 $m\boldsymbol{v}$,在 $t + dt$ 时刻的动量分为两部分:火箭因喷射出 dm_r 质量工质后,速度变为 $\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$,所具有的动量为 $(m + dm)(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})$;质量为 dm_r 的工质以相对火箭 \boldsymbol{w} 速度喷出,其动量为 $(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v})dm_r$ 。根据动量守恒原理,整个火箭(包括喷出去的工质) t 和 $t + dt$ 时刻的动量应该相等,即

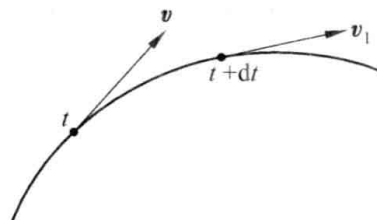


图 A4.1 理想火箭的速度

$$m\boldsymbol{v} = (m + dm)(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}) + dm_r(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \quad (\text{A4.1})$$

质量守恒,有

$$dm + dm_r = 0 \quad (\text{A4.2})$$

式(A4.1)展开并略去二阶小量,考虑式(A4.2)得

$$m d\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} dm = 0 \quad (\text{A4.3})$$

通常 \boldsymbol{v} 和 \boldsymbol{w} 为共线的,只考虑它们的绝对值。若初始时刻火箭速度为 v_0 ,质量是 m_0 ,则上式积分后得

$$v = v_0 + w \ln \frac{m_0}{m} \quad (\text{A4.4})$$

这就是齐奥尔科夫斯基公式,亦称为理想火箭运动方程式。上式还可以写成速度增量形式

$$\Delta v = w \ln \frac{m_0}{m_0 - \Delta m} \quad (\text{A4.5})$$

火箭将其中的燃料全部耗尽时的质量是 m_k ,则该瞬时速度增量达到最大。

$$\Delta v_k = w \ln \frac{m_0}{m_k} \quad (\text{A4.6})$$

由此可见,工质从发动机喷管喷出的速度 w 越大,火箭原始质量和最终质量之比 m_0/m_k (结构比) 也就是燃料所占比例越大,则火箭的速度增量就越大。

分析式(A4.4)可以得出以下两个结论:

(1) 按现代技术一般水平: $m_0/m_k = 10$, $w = 3\,500$ m/s, $v_k = 0$,得 $v_k = 8$ km/s。似乎用一级火箭可以获得人造地球卫星所需的第一宇宙速度(7.9 km/s),实际上若考虑到重力和空气



阻力的影响, v_k 值远低于上述计算量, 这就是现代运载火箭多数为多级的原因;

(2) 如将 w 增加 x 倍, 则火箭末速度 v_k 也将增加同一倍数。若将 m_0/m_k 增大 x 倍, 将有 $v_k = w \ln(m_0/m_k) + w \ln(x)$, 即末速增加到 $[1 + \ln(x)/\ln(m_0/m_k)]$ 。显然, 靠提高 w 来取得更大的末速度效果要好得多, 这就是为什么人们总是首先设法提高 w 而不是 m_0/m_k 比值的缘故。应用现代最新技术, 提高发动机对工质的喷射速度, 同时尽可能提高结构比, 已有可能开发出单级入轨的运载火箭和航天器。

如果定义 Δm 是火箭在初始和最终时刻的质量差, 则(A4.5) 还可以写成

$$\Delta m = m_0(1 - e^{-\frac{\Delta v_k}{w}}) \quad (\text{A4.7})$$

此式可用于航天器轨道和姿态机动、保持时燃料耗量的估计。



A5 STK 软件简介

A5.1 概况

STK 是卫星工具箱(Satellite Tool Kit) 软件英文名称的缩写,是由美国分析图形有限公司 (Analytical Graphics) 开发的一款应用于航空航天领域的商品化分析软件。它可以支持航空航天任务周期的全过程,包括概念、分析、设计、制造、测试、发射、运行和应用等方面。STK 可以快速方便地分析复杂的陆、海、空、天任务,并以高度仿真的三维可视化动态景象和精确的数据图表给出任务的分析结果,是在该领域中处于领先地位的商品化分析软件。

STK 是标准的商业化的工具软件。经过相应的严格测试,有着很高的适用性和稳定性。它既可以运行于高级工作站(Work Station)上,也可以运行于普通个人计算机(PC)上。既有基于 Windows 的版本,亦有基于 Unix 的版本。界面设计人性化较强,人机交互性很好。从学生、工程师、设计师到研究人员都可以使用 STK 来完成各自的任务。从高等院校相关专业、科研机构、欧空局(ESA)到美国国家航空航天局(NASA)都在使用 STK。

A5.2 STK 的组成

STK 主要由基础本应用部分和多个附加模块来构成。STK 的分析引擎主要用于计算数据和图像处理,其中心内容是产生飞行器的位置和姿态数据、获取时间、遥感器覆盖分析。包括附加的轨道预报算法、姿态定义、坐标类型和系统、遥感器类型、高级约束条件,以及卫星、城市、地面站和恒星等方面的最新数据库。通过附加的分析模块,STK 可以解决精确定轨、轨道机动、覆盖分析、通信分析、雷达分析、实时操作等特定的分析问题。三维可视化模块为 STK 和其他附加模块提供了先进的三维显示效果。

表 A5.1 STK 模块组成

基本模块	
基本版	Satellite Tool Kit (STK)
专业版	STK/Professional (STK/PRO)
三维显示	STK/Visualization Option (STK/VO)
高级三维显示	STK/Advanced VO
分析模块	
轨道机动	STK/Astrogator
链路分析	STK/Chains
通信分析	STK/Comm
接近分析	STK/Conjunction Analysis Tools



续表 A5.1

覆盖分析	STK/Coverage
拦截飞行工具	STK/Interceptor Flight Tool(IFT)
导弹飞行工具	STK/Missile Flight Tool(MFT)
精确定轨	STK/Precision Orbit Determination System (PODS)
雷达分析	STK/Radar
空间环境	STK/Space Environment
综合数据	
高精度数字地图	STK/High Resolution Maps
高分辨率地球影像	STK/VO Earth Imagery
雷达高级环境	STK/Radar Advanced Environment (RAE)
全球三维地形	STK/Terrain
扩展与接口	
连接模块	STK/Connect and Server
网络实时播放	STK/Web Cast
MATLAB 接口	STK/MATLAB Interface
分布式仿真	STK/Distributed Interactive Simulation (DIS)
地理信息接口	STK/Geographic Information Systems (GIS)
程序开发库	STK/Programmer's Library (PL)

A5.3 STK 的功能

STK 主要功能包括以下几个部分

1. 内容丰富的数据库

包括三个附加的数据库,最新的城市数据库、地面站数据库、恒星数据库;

2. 用于可见性分析的约束定义

超过 20 个约束条件定义,飞行器、遥感器、地面站和其他对象之间的可见性,增强用户的分析性能;

3. 高精度轨道预报(HPOP)

应用高精度动力学模型生成不同轨道卫星的星历表,包括:圆轨道、椭圆轨道、抛物线轨道、双曲线轨道,有效范围从地球表面直到月球;

4. 长期轨道预报(LOP)

精确预报卫星数月或数年后的轨道;



5. 寿命工具(Lifetime)

估计低轨卫星在轨保持圈数,即轨道寿命;

6. 区域目标

可定义 N 多边形区域,用于地面区域链路计算;

7. 附加坐标类型和系统

以不同的方式给出卫星的位置和速度信息;

8. 姿态仿真和指向

定义飞行器姿态,包括 19 种姿态定义;

9. 多种遥感器类型

增加了简单圆弧以外的 5 种遥感器类型:复杂圆弧、半功率、矩形、SAR、自定义。

由上述主要功能可以实现以下内容

综合分析 —— 通过复杂的数学公式迅速、准确地计算出卫星任意时刻的位置、姿态,评估陆地、海洋、空中和空间对象之间的复杂关系,以及卫星或地面站遥感器的覆盖区域;

生成轨/弹道星历表 —— STK 包含复杂的数学算法,可以快速而准确地确定卫星在任意时刻相应坐标系下的位置。STK 提供卫星轨道生成向导,可以指引用户建立常见的轨道类型如:地球同步、临界倾角、太阳同步、莫尼亚、重复轨道等等。

可见性分析 —— 计算任意对象间的访问时间并在窗口中以二维动画显示,计算结果为图表或文字报告。可在对象间增加几何约束条件,如遥感器的可视范围、地基或天基系统最小仰角、方位角和可视距离等;

遥感器分析 —— 遥感器可以附加在任何空基或地基对象上,用于可见性分析的精确计算。遥感器覆盖区域的变化动态地显示在二维地图窗口,包括多种遥感器类型(复杂圆弧、半功率、矩形、扫摆、用户定义);

姿态分析 —— STK 提供标准姿态定义,或从外部输入姿态数据文件(标准四元数姿态文件),为计算姿态运动对其他参数的影响提供多种分析手段;

可视化的计算结果 —— STK 在二维地图窗口可以显示所有以时间为单位的信息,多个窗口可以分别以不同的投影方式和坐标系显示。可以向前、向后或实时地显示任务场景的动态变化:空基或地基对象的位置、遥感器覆盖区域、可见情况、光照条件、恒星/行星位置,可将结果保存为 BMP 位图或 AVI 视频;

全面的数据报告 —— STK 提供全面的图表和文字报告总结关键信息,包含上百种数据,用户可以为一个对象或一组对象定制图表和报告。所有报告均以工业标准格式输出,可以输出到常用的电子制表软件中。

A5.4 STK 的基本应用

1. 用户界面

通过 STK 的用户界面可以完成 STK 中的基本功能:在一个场景(scenario)中生成、操纵和



修改对象,定义打印机的设置,定义对象的属性和在 STK 中进行选择等等。无论是对于初学者还是经验丰富的卫星系统分析员,STK 的用户界面都能使分析工作变得很容易。

运行 STK 后进入用户界面,这是一个复合的 Windows 窗口。每一个窗口都列在下拉式菜单,使得用户更好的在 STK 中控制和组织的不同任务。在 STK 运行过程中,可以随时选择感兴趣的窗口使它出现在前面,例如复合的地图窗口和多个对象的属性窗。

2. 场景建立

场景是 STK 中的对象,它是作为其他所有对象(工具,设施,目标,面目标,行星,恒星和传感器)的集合出现的。用户可以生成并维持任意数目的场景;生成的用来组成不同的场景的对象同时应用于一些或所有的场景。

通过用户界面的 File 菜单,可以建立一个新场景或者打开一个已存在的场景。图 A5.1 为新建的场景“全球观测计划”和其属性窗口。

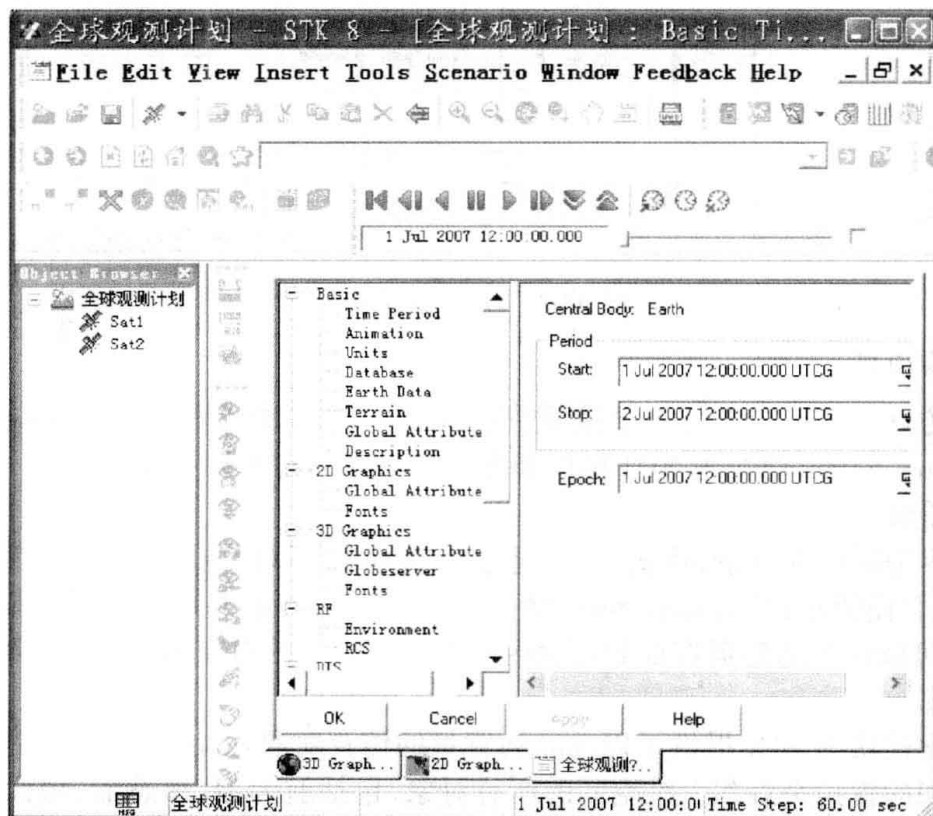


图 A5.1 建立场景窗口

通过用户界面的 Insert 菜单,可以为所建立的场景添加新的对象,如卫星。图 A5.2 为卫星“Sat1”的属性窗口,为基本参数、2D 图形参数、3D 图形参数、约束条件、射频和精确轨道测定系统等参数的输入窗口。

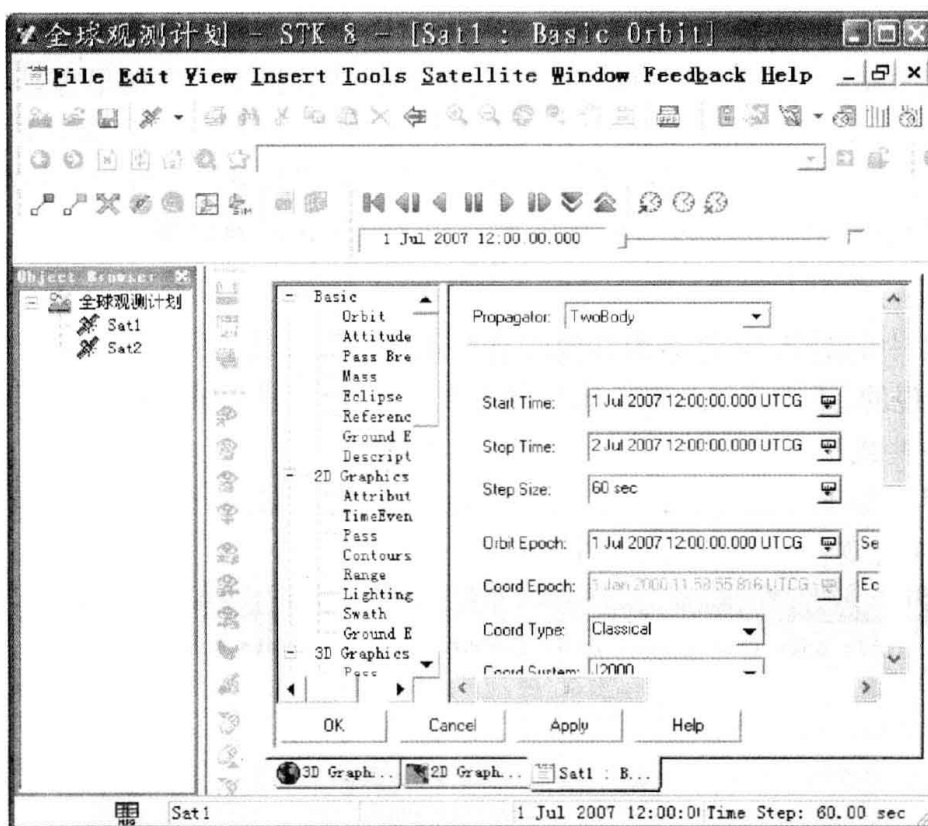


图 A5.2 参数设置窗口

3. 可视化的仿真

可视化的仿真结果是 STK 的一个重要特征。包括二维地图投影 (map project) 窗口、三维可视化 (visualization option, 简称为 VO) 窗口和曲线与数据的动态显示及保存。

a. 二维地图窗口

以二维世界地图作为背景, 将航天器、遥感器、地面站等对象投影在其上, 并且提供了多种投影方式, 如墨卡托圆柱投影 (Mercator), 球面投影 (stereo graphic), 等距圆柱投影 (equidistant cylindrical)。还可以给出遥感器在地面覆盖区域以及地面站的对在轨航天器的测控范围等。

b. 三维视窗

三维可视化模块为 STK 提供了以地球为背景的仿真对象运动的三维动画显示功能。三维视窗可以以不同的视角来观察三维空间的所有对象, 包括航天器、遥感器、地面测控站以及太阳、月球、行星、恒星等其他天体。在一个窗口中显示航天器不同时刻的轨道、姿态、动作以及与各天体的方位关系等。

c. 曲线与数据的动态显示

用户可以根据自己的需要选择要显示的参数 (如轨道要素、姿态参数等) 及它们的显示方式, 还能以数字或者曲线形式动态显示, 也可以一次性生成可供用户查看和其他软件调用的数据文件。

运行状态下可以实时的看到仿真结果, 如图 A5.3、图 A5.4。

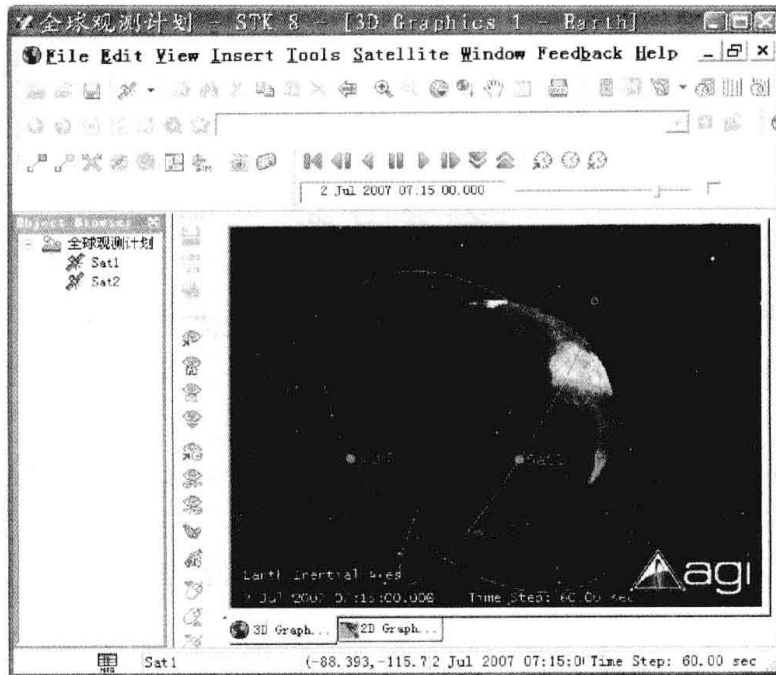


图 A5.3 卫星运动仿真的 3D 视图

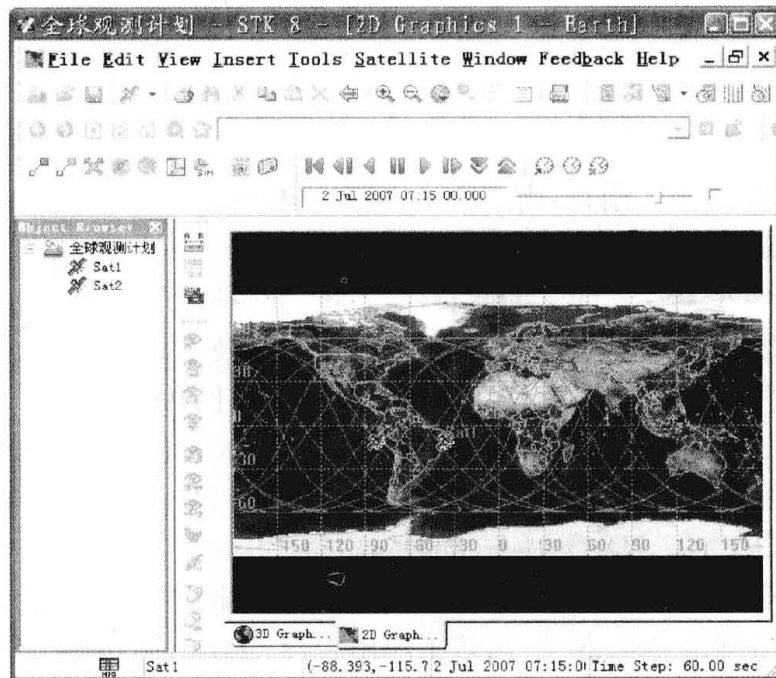


图 A5.4 卫星运动仿真的 2D 视图

参考文献

- [1] 张光海. 气动辅助变轨的研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 1991.
- [2] BRYSON A E, HO YUCHI. Applied Optimal Control[M]. New York, John Wiley and Sons, 1975.
- [3] RICHARDSON D L. Analytic Construction of Periodic Orbits about the Collinear Points[J]. Celestial Mechanics, Vol. 22, 1980.
- [4] 关肇直, 韩晶清, 等. 极值控制与极大值原理: 现代控制理论丛书[M]. 北京, 科学出版社, 1980.
- [5] 章仁为. 静止卫星的轨道和姿态控制[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- [6] 任萱. 人造卫星轨道动力学[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1986.
- [7] 刘延柱. 人造卫星动力学讲义[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1979.
- [8] 郑学塘. 人造地球卫星的运动和预报[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
- [9] 欧洲空间局. 地球静止轨道手册[M]. 王正才, 等译. 北京: 国防工业出版社, 1999.
- [10] KAPLAN M H. Modern spacecraft dynamics control[M]. New York, John Wiley & Sons, 1976.
- [11] 刘林. 天体力学方法[M]. 南京: 南京大学出版社, 1998.
- [12] 竺苗龙. 最佳轨道引论[M]. 北京: 宇航出版社, 1998.
- [13] 赵汉元. 飞行器再入动力学与制导[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1997.
- [14] 韩京清. 线性系统理论代数基础[M]. 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 1985.
- [15] 刘延柱. 航天器姿态动力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.
- [16] 刘林, 胡松杰, 王歆. 航天动力学引论[M]. 南京: 南京大学出版社, 2006.
- [17] YUTAKA TAKANO, SHIGEAKI WADA, NORIKI IWANAGA. Study on reference trajectory for the Lunar lander[R]. NASA Tech Memorandum, 1996.
- [18] 杨颖, 王琦. STK 在计算机仿真中的应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.
- [19] 刘林. 航天器轨道理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.
- [20] DUNNIG R S. The orbital mechanics of flight mechanics[R]. NASA SP-325, 1973.
- [21] DESKOV A C, IVASKIN V V. On a history of Luna-9 spacecraft project for soft landing on the moon[R]. USSR Academy of Sciences, 1988.
- [22] 王威, 于志坚. 航天器轨道确定[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007.



- [23] WALKER J A, SCHMITENDORF W E. A simple test asymptotic stability in partially dissipative symmetric systems.[J]. J. Appl. Mech, 1973,40(4).
- [24] MORAN J P. Effects of librations on the orbital motion of a Dumbell Soctellite[J]. ARS J. , 1961,3.
- [25] KANE T R, LIKINS P W. Likins. Spacecraft dynamics[M]. McGraw-Hill Book Comp,1983.
- [26] GOMEZ, G. etc. Dynamics and mission design near libration points, Vol. III. Advanced methods for collinear points[M]. World Scientific, Singapore. New Jersey. London. Hong Kong, 2001.

■ 责任编辑/杜 燕

■ 封面设计/卞秉利

ORBITAL DYNAMICS OF SPACECRAFT

航天器轨道动力学

ISBN 978-7-5603-3166-9



9 787560 331669 >

定价 38.00 元